

參考公式及可能用到的數值

- 一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的公式解： $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
 - 平面上兩點 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ 間的距離為 $\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
 - 通過 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 的直線斜率 $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $x_2 \neq x_1$
 - 首項為 a 且公差為 d 的等差數列前 n 項之和 $S_n = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$
 - 等比數列 $\langle ar^{k-1} \rangle$ 的前 n 項之和 $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$, $r \neq 1$
 - 三角函數的和角公式：
 $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$
 $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
 $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$
 - $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑)
 $\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
 - 一維數據 X : x_1, x_2, \dots, x_n , 算術平均數 $\mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$
標準差 $\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - n\mu_X^2 \right)}$
 - 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$, $\sqrt{3} \approx 1.732$, $\sqrt{5} \approx 2.236$, $\sqrt{6} \approx 2.449$, $\pi \approx 3.14159$
 - 對數值： $\log_{10} 1.1 \approx 0.0414$, $\log_{10} 2 \approx 0.3010$, $\log_{10} 3 \approx 0.4771$, $\log_{10} 5 \approx 0.6990$, $\log_{10} 7 \approx 0.8451$

數學

105 學年度全國高級中學 學科能力測驗模擬考試

數學考科

—作答注意事項—

考試範圍：第一～三冊全

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 5 題，多選題 6 題，選填題第 A 至 I 題共 9 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記，請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{18}{19}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\frac{3}{8}$ 與第 19 列的 $\frac{8}{8}$ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	\pm
18	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input checked="" type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>				
19	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input checked="" type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{20\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 二 與第 21 列的 七 畫記，如：

20	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 0	-	<input checked="" type="checkbox"/> ±
21	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 6	<input checked="" type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 0	-	<input type="checkbox"/> +

※試題後附有參考公式及可能用到的數值

祝考試順利



版權所有・翻印必究

第壹部分：選擇題（占 55 分）

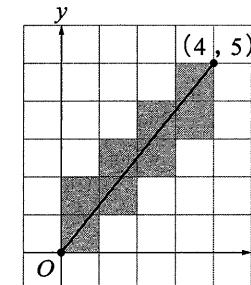
一、單選題（占 25 分）

說明：第 1 題至第 5 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 數學科普作家馬丁·加德納(Martin Gardner, 1914-2010)曾說：「世界上僅存在一個九位數，其中首位數是 1 的倍數，前兩位數是 2 的倍數，前三位數是 3 的倍數，……，前 n 位數是 n 的倍數，……，前九位數是 9 的倍數，但是 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 只能用過一次。」請問下列哪一個九位數符合要求？
- 187654923
 - 987654321
 - 789456132
 - 381654729
 - 147285936

2. 右圖表示從坐標 $(0, 0)$ 到坐標 $(4, 5)$ 的線段所「經過」的格子數為 8，「經過」是指線段必須落在格子內，亦即通過格子點就不屬於「經過」。試問從坐標 $(0, 0)$ 到坐標 (a, b) ，其中 $a \in N$, $b \in N$, $a \neq b$ 所經過的格子數為何？

- $\frac{a \cdot b}{2} - 2$
- $\frac{a}{4} + b + 2$
- $a + b - (a, b)$ ，其中 (a, b) 代表 a, b 的最大公因數
- $\frac{[a, b]}{2} - 2$ ，其中 $[a, b]$ 代表 a, b 的最小公倍數
- $a + \left\lceil \frac{b}{2} \right\rceil + 2$ ，其中 $\left\lceil \frac{b}{2} \right\rceil$ 代表小於或等於 $\frac{b}{2}$ 的最大整數



- C. 俊賢想求 7386027^{10} 除以 101×103 的餘數 R ，數學老師提示他可以利用多項式的除法，即 $(7x^3 + 38x^2 + 60x + 27)^{10} = (x+1)(x+3)Q(x) + (ax+b)$ 。試求餘數 $R = \underline{\textcircled{17}\textcircled{18}\textcircled{19}}$ 。
- D. 若數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = \frac{n^2}{5}$ ，其中 $n \in N$ 。試求 $\sum_{k=1}^{30} a_k = \underline{\textcircled{20}\textcircled{21}\textcircled{22}}$ 。
- E. 若方程式 $(\log_3(x^2+y))^2 + \left(\log_3 \frac{xy}{3}\right)^2 + 4 = \log_3(x^2+y)^4$ 的數對解分別為 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) 。試求 $y_1 + y_2 + y_3 = \underline{\textcircled{23}}$ 。
- F. 已知 $\frac{x_1}{x_1+2} = \frac{x_2}{x_2+4} = \frac{x_3}{x_3+6} = \dots = \frac{x_n}{x_n+2n}$ ，又 $\sum_{k=1}^{20} x_k < 1000$ ，若 $x_1 \in N$ 。試求 x_1 的最大值為 $\underline{\textcircled{24}}$ 。
- G. 若 1, 2, 3, 4, ……, 99998, 99999, 100000 這十萬個正整數中，各位數字和小於 8 的正整數有 k 個，例如：3211 就是其中一個，因為 $3+2+1+1=7<8$ 。試求 $k = \underline{\textcircled{25}\textcircled{26}\textcircled{27}}$ 。
- H. 指數函數 $f(x) = a^x + b$ 通過 $(1, 2)$, $(2, 8)$ 兩點。若 $f(99)$ 的個位數為 c ，且 $f(99)$ 的位數為 d 。試求 $c+d = \underline{\textcircled{28}\textcircled{29}}$ 。
- I. 若 $i = \sqrt{-1}$ ，且 $1 + 2i + 3i^2 + \dots + 200i^{199} = a + bi$ ，其中 a, b 為實數，求 $a+b = \underline{\textcircled{30}\textcircled{31}\textcircled{32}\textcircled{33}}$ 。

11. 若 $\sin \theta, \cos \theta$ 為方程式 $5x^2 - 7x + k = 0$ 的兩根，且 $45^\circ < \theta < 90^\circ$ ，則下列哪些選項是正確的？

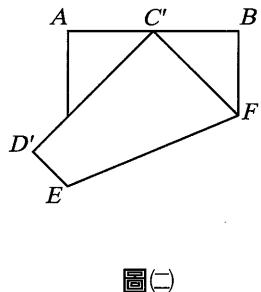
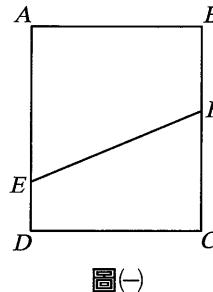
- (1) $\cos \theta = \frac{3}{5}$
- (2) $\sin 2\theta = \frac{24}{25}$
- (3) $\cos(\theta + 60^\circ) = \frac{3-4\sqrt{3}}{10}$
- (4) $\cos \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$
- (5) $\sin 3\theta + \cos 3\theta = -\frac{73}{125}$

第二部分：選填題（占 45 分）

說明：1. 第 A 至 I 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(12—33)。
2. 每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 長方形紙張 $ABCD$ ，已知 E, F 分別在 $\overline{AD}, \overline{BC}$ 上(如圖(一))，今沿著 \overline{EF} 將長方形摺疊，頂點 C 正好落在 \overline{AB} 的中點 C' 上(如圖(二))，若 $\overline{AB} = 10, \overline{BC} = 12$ ，求 $\overline{EF} = \underline{\underline{\frac{12+13}{14}}}$ 。

(化為最簡分數)



B. 設 $\vec{a} = (x, y), \vec{b} = (3, 4)$ ， x, y 均為實數，且 $|\vec{a}| = 1$ ，求 \vec{a} 與 \vec{b} 內積的最小值為 $\underline{\underline{\frac{15+16}{17}}}$ 。

3. 若數列 $x_i = i, i = 1, 2, 3, \dots, 11$ 的算術平均數為 μ_x 、標準差為 σ_x ；另一數列

$$y_i = \frac{x_i - \mu_x}{\sigma_x}, i = 1, 2, 3, \dots, 11 \text{ 的算術平均數為 } \mu_y \text{、標準差為 } \sigma_y; \text{ 若 } x_i, y_i \text{ 的相關}$$

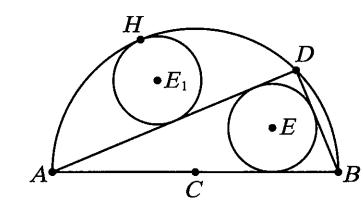
係數為 r_{xy} ；又 y 對 x 的迴歸直線斜率為 m 。下列哪一個選項敘述是正確的？

- (1) $\mu_x < \sigma_x$
- (2) $\mu_y^2 + \sigma_y^2 > 1$
- (3) $|r_{xy}| < 1$
- (4) y 對 x 的迴歸直線必過 (μ_y, μ_x)
- (5) $m \cdot \sigma_x = 1$

4. 印度數學史上最負盛名的數學家拉瑪努江(Srinivasa Ramanujan, 1887-1920)是數論專家，他曾經研究過由正整數組成正整數的組合方式，例如：正整數 5 的組合方式有 5, 4+1, 3+2, 3+1+1, 2+2+1, 2+1+1+1, 1+1+1+1+1 共 7 種可能，其中 3+2, 2+3 視為同一種組合。試問正整數 7 的組合方式有幾種？

- (1) 12 種
- (2) 13 種
- (3) 14 種
- (4) 15 種
- (5) 16 種

5. 如右圖的兩小圓為半徑相等的圓且圓心分別為 E_1, E ，圓 E 與直角三角形 ADB 相切，圓 E_1 與弓形 AHD 相切，且通過 \overline{AD} 中點， C 為大圓圓心，又 C, E_1, H 共線，令小圓半徑與大圓半徑分別為 r 與 R ，求 $r : R = ?$



- (1) 4 : 13
- (2) 5 : 13
- (3) 4 : 11
- (4) 3 : 13
- (5) 5 : 12

二、多選題（占 30 分）

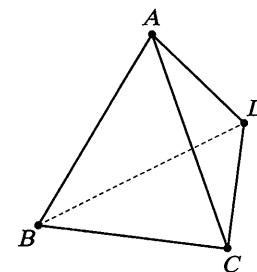
說明：第 6 題至第 11 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

6. 俊賢出國度假一週，臨行前託好友明義為植物澆水，因天氣炎熱，若沒有澆水，一週後植物死亡的機率為 80%，但是，即便有適當的澆水，一週後植物死亡的機率仍有 30%，依照過往的經驗知，明義忘記為植物澆水的機率為 20%，下列哪些選項中的敘述是正確的？
- 植物順利活過本週的機率為 60%
 - 當俊賢回國時，若植物死亡，則是因為明義忘記為植物澆水的機率為 $\frac{3}{5}$
 - 若明義忘記為植物澆水，當俊賢回國時，則植物死亡的機率為 80%
 - 若想要植物順利活過本週的機率超過 65%，則明義忘記為植物澆水的機率必須小於 10%
 - 在本題中，明義忘記為植物澆水事件與植物死亡事件是獨立事件

7. 設 x, y 為實數，滿足 $x \geq 0, y \geq 0, 2x+y \leq 7, x+2y \leq 8$ 的區域為 R ，下列哪些選項是正確的？
- 若 $3x-y$ 的最大值為 a ，最小值為 b ，則 $a+b=\frac{21}{2}$
 - 區域 R 的面積為 $\frac{37}{4}$
 - 若 $(x-2)^2+(y-1)^2$ 的最大值為 c ，則 $c=12$
 - 若 $\frac{y}{x-8}$ 的最小值為 d ，則 $d=\frac{1}{2}$
 - 區域 R 的格子點個數大於 10 個，其中格子點的定義為其橫坐標與縱坐標皆為整數

8. 已知 $ABCD$ 為棱線 1 公尺的正四面體，今小蟲在 A 點開始出發沿稜線爬行，到 B, C, D 三點的機率均相同；若從 B 點開始出發沿稜線爬行，到 A, C, D 三點的機率亦均相同，其餘類推。設 a_n 表示小蟲爬行 n 公尺後在 A 點的機率。下列哪些選項是正確的？

- $a_1=0$
- $a_2=\frac{1}{3}$
- 若 $n \in N$ ，則 $a_{n+1}=\frac{1-a_n}{4}$
- 若 $n \in N$ ，則 $a_n=\frac{1}{4}+\frac{3}{4} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$
- 若 $n=5$ ，則小蟲在 B 點的機率為 $\frac{80}{243}$



9. 試用正切函數的和角公式 $\tan(A+B)=\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B}$ 導出下列式子。下列哪些選項是正確的？

- $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$
- $\tan 3\theta = \frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$
- $\tan 4\theta = \frac{4\tan\theta-4\tan^3\theta}{1-6\tan^2\theta+\tan^4\theta}$
- 若 $k=\frac{\tan 20^\circ+\tan 205^\circ}{1-\tan 20^\circ \cdot \tan 205^\circ}$ ，則 $k>0$
- $\frac{\sqrt{3}}{5} < \tan 20^\circ < \frac{\sqrt{3}}{3}$

10. 設 $\triangle ABC$ 中，若 $\overline{BQ} : \overline{QC} = 3 : 2$ ，又 $\overline{CR} : \overline{RA} = 1 : 2$ 且 C, S, P 共線，若 $\overrightarrow{CS} = x\overrightarrow{CA} + y\overrightarrow{CB} = k\overrightarrow{CP}$ ，下列哪些選項是正確的？

- $y-x=\frac{1}{11}$
- $\overline{AP} : \overline{PB} = y : x$
- $k=\frac{7}{11}$
- $a_{\triangle APS} : a_{\triangle ABC} = 24 : 91$ ，其中 $a_{\triangle APS}$ 代表 $\triangle APS$ 的面積
- 若 G 為 $\triangle ABC$ 之重心，且 $\overrightarrow{SG} = t\overrightarrow{CA} + s\overrightarrow{CB}$ ，則 $t+s=\frac{5}{33}$

