

第壹部分：選擇題 (占 55 分)

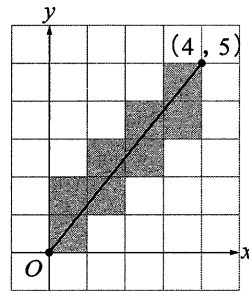
一、單選題 (占 25 分)

說明：第 1 題至第 5 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 數學科普作家馬丁·加德納(Martin Gardner, 1914-2010)曾說：「世界上僅存在一個九位數，其中首位數是 1 的倍數，前兩位數是 2 的倍數，前三位數是 3 的倍數，……，前 n 位數是 n 的倍數，……，前九位數是 9 的倍數，但是 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 只能用過一次。」請問下列哪一個九位數符合要求？

- (1) 187654923
- (2) 987654321
- (3) 789456132
- (4) 381654729
- (5) 147285936

2. 右圖表示從坐標 $(0, 0)$ 到坐標 $(4, 5)$ 的線段所「經過」的格子數為 8，「經過」是指線段必須落在格子內，亦即通過格子點就不屬於「經過」。試問從坐標 $(0, 0)$ 到坐標 (a, b) ，其中 $a \in N, b \in N, a \neq b$ 所經過的格子數為何？



- (1) $\frac{a \cdot b}{2} - 2$
- (2) $\frac{a}{4} + b + 2$
- (3) $a + b - (a, b)$ ，其中 (a, b) 代表 a, b 的最大公因數
- (4) $\frac{[a, b]}{2} - 2$ ，其中 $[a, b]$ 代表 a, b 的最小公倍數
- (5) $a + \left\lceil \frac{b}{2} \right\rceil + 2$ ，其中 $\left\lceil \frac{b}{2} \right\rceil$ 代表小於或等於 $\frac{b}{2}$ 的最大整數

C. 俊賢想求 7386027^{10} 除以 101×103 的餘數 R ，數學老師提示他可以利用多項式的除法，即 $(7x^3 + 38x^2 + 60x + 27)^{10} = (x+1)(x+3)Q(x) + (ax+b)$ 。試求餘數 $R = \underline{\textcircled{17}\textcircled{18}\textcircled{19}}$ 。

D. 若數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = \frac{n^2}{5}$ ，其中 $n \in N$ 。試求 $\sum_{k=1}^{30} a_k = \underline{\textcircled{20}\textcircled{21}\textcircled{22}}$ 。

E. 若方程式 $(\log_3(x^2+y))^2 + \left(\log_3 \frac{xy}{3}\right)^2 + 4 = \log_3(x^2+y)^4$ 的數對解分別為 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 。試求 $y_1 + y_2 + y_3 = \underline{\textcircled{23}}$ 。

F. 已知 $\frac{x_1}{x_1+2} = \frac{x_2}{x_2+4} = \frac{x_3}{x_3+6} = \dots = \frac{x_n}{x_n+2n}$ ，又 $\sum_{k=1}^{20} x_k < 1000$ ，若 $x_1 \in N$ 。試求 x_1 的最大值為 $\underline{\textcircled{24}}$ 。

G. 若 $1, 2, 3, 4, \dots, 99998, 99999, 100000$ 這十萬個正整數中，各位數字和小於 8 的正整數有 k 個，例如：3211 就是其中一個，因為 $3+2+1+1=7 < 8$ 。試求 $k = \underline{\textcircled{25}\textcircled{26}\textcircled{27}}$ 。

H. 指數函數 $f(x) = a^x + b$ 通過 $(1, 2), (2, 8)$ 兩點。若 $f(99)$ 的個位數為 c ，且 $f(99)$ 的位數為 d 。試求 $c+d = \underline{\textcircled{28}\textcircled{29}}$ 。

I. 若 $i = \sqrt{-1}$ ，且 $1+2i+3i^2+\dots+200i^{199} = a+bi$ ，其中 a, b 為實數，求 $a+b = \underline{\textcircled{30}\textcircled{31}\textcircled{32}\textcircled{33}}$ 。

11. 若 $\sin \theta, \cos \theta$ 為方程式 $5x^2 - 7x + k = 0$ 的兩根，且 $45^\circ < \theta < 90^\circ$ ，則下列哪些選項是正確的？

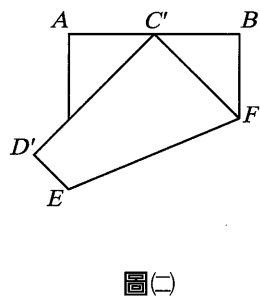
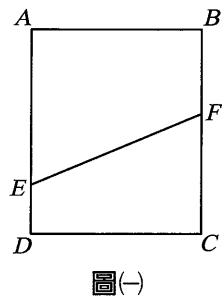
- (1) $\cos \theta = \frac{3}{5}$
- (2) $\sin 2\theta = \frac{24}{25}$
- (3) $\cos(\theta + 60^\circ) = \frac{3 - 4\sqrt{3}}{10}$
- (4) $\cos \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$
- (5) $\sin 3\theta + \cos 3\theta = -\frac{73}{125}$

第貳部分：選填題（占 45 分）

說明：1. 第 A 至 I 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(12-33)。
2. 每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 長方形紙張 $ABCD$ ，已知 E, F 分別在 $\overline{AD}, \overline{BC}$ 上(如圖(-))，今沿著 \overline{EF} 將長方形摺疊，頂點 C 正好落在 \overline{AB} 的中點 C' 上(如圖(=))，若 $\overline{AB} = 10, \overline{BC} = 12$ ，求 $\overline{EF} = \frac{\textcircled{12}\textcircled{13}}{\textcircled{14}}$ 。

(化為最簡分數)



B. 設 $\vec{a} = (x, y), \vec{b} = (3, 4), x, y$ 均為實數，且 $|\vec{a}| = 1$ ，求 \vec{a} 與 \vec{b} 內積的最小值為 。

3. 若數列 $x_i = i, i = 1, 2, 3, \dots, 11$ 的算術平均數為 μ_x 、標準差為 σ_x ；另一數列 $y_i = \frac{x_i - \mu_x}{\sigma_x}, i = 1, 2, 3, \dots, 11$ 的算術平均數為 μ_y 、標準差為 σ_y ；若 x_i, y_i 的相關

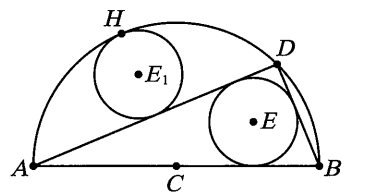
係數為 r_{xy} ；又 y 對 x 的迴歸直線斜率為 m 。下列哪一個選項敘述是正確的？

- (1) $\mu_x < \sigma_x$
- (2) $\mu_y^2 + \sigma_y^2 > 1$
- (3) $|r_{xy}| < 1$
- (4) y 對 x 的迴歸直線必過 (μ_y, μ_x)
- (5) $m \cdot \sigma_x = 1$

4. 印度數學史上最負盛名的數學家拉瑪努江(Srinivasa Ramanujan, 1887-1920)是數論專家，他曾經研究過由正整數組成正整數的組合方式，例如：正整數 5 的組合方式有 $5, 4+1, 3+2, 3+1+1, 2+2+1, 2+1+1+1, 1+1+1+1+1$ 共 7 種可能，其中 $3+2, 2+3$ 視為同一種組合。試問正整數 7 的組合方式有幾種？

- (1) 12 種
- (2) 13 種
- (3) 14 種
- (4) 15 種
- (5) 16 種

5. 如右圖的兩小圓為半徑相等的圓且圓心分別為 E_1, E ，圓 E 與直角三角形 ADB 相切，圓 E_1 與弓形 AHD 相切，且通過 \overline{AD} 中點， C 為大圓圓心，又 C, E_1, H 共線，令小圓半徑與大圓半徑分別為 r 與 R ，求 $r : R = ?$



- (1) 4 : 13
- (2) 5 : 13
- (3) 4 : 11
- (4) 3 : 13
- (5) 5 : 12

二、多選題 (占 30 分)

說明：第 6 題至第 11 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

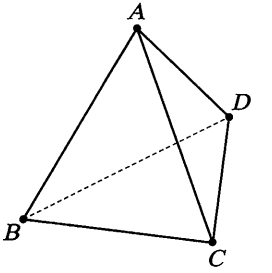
6. 俊賢出國度假一週，臨行前託好友明義為植物澆水，因天氣炎熱，若沒有澆水，一週後植物死亡的機率為 80%，但是，即便有適當的澆水，一週後植物死亡的機率仍有 30%，依照過往的經驗知，明義忘記為植物澆水的機率為 20%，下列哪些選項中的敘述是正確的？
- (1) 植物順利活過本週的機率為 60%
 - (2) 當俊賢回國時，若植物死亡，則是因為明義忘記為植物澆水的機率為 $\frac{3}{5}$
 - (3) 若明義忘記為植物澆水，當俊賢回國時，則植物死亡的機率為 80%
 - (4) 若想要植物順利活過本週的機率超過 65%，則明義忘記為植物澆水的機率必須小於 10%
 - (5) 在本題中，明義忘記為植物澆水事件與植物死亡事件是獨立事件

7. 設 x, y 為實數，滿足 $x \geq 0, y \geq 0, 2x + y \leq 7, x + 2y \leq 8$ 的區域為 R ，下列哪些選項是正確的？

- (1) 若 $3x - y$ 的最大值為 a ，最小值為 b ，則 $a + b = \frac{21}{2}$
- (2) 區域 R 的面積為 $\frac{37}{4}$
- (3) 若 $(x - 2)^2 + (y - 1)^2$ 的最大值為 c ，則 $c = 12$
- (4) 若 $\frac{y}{x - 8}$ 的最小值為 d ，則 $d = \frac{1}{2}$
- (5) 區域 R 的格子點個數大於 10 個，其中格子點的定義為其橫坐標與縱坐標皆為整數

8. 已知 $ABCD$ 為稜線 1 公尺的正四面體，今小蟲在 A 點。若從 A 點開始出發沿稜線爬行，到 B, C, D 三點的機率均相同；若從 B 點開始出發沿稜線爬行，到 A, C, D 三點的機率亦均相同，其餘類推。設 a_n 表示小蟲爬行 n 公尺後在 A 點的機率。下列哪些選項是正確的？

- (1) $a_1 = 0$
- (2) $a_2 = \frac{1}{3}$
- (3) 若 $n \in N$ ，則 $a_{n+1} = \frac{1 - a_n}{4}$
- (4) 若 $n \in N$ ，則 $a_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$
- (5) 若 $n = 5$ ，則小蟲在 B 點的機率為 $\frac{80}{243}$



9. 試用正切函數的和角公式 $\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B}$ 導出下列式子。下列哪些選項是正確的？

- (1) $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}$
- (2) $\tan 3\theta = \frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta}$
- (3) $\tan 4\theta = \frac{4 \tan \theta - 4 \tan^3 \theta}{1 - 6 \tan^2 \theta + \tan^4 \theta}$
- (4) 若 $k = \frac{\tan 20^\circ + \tan 205^\circ}{1 - \tan 20^\circ \cdot \tan 205^\circ}$ ，則 $k > 0$
- (5) $\frac{\sqrt{3}}{5} < \tan 20^\circ < \frac{\sqrt{3}}{3}$

10. 設 $\triangle ABC$ 中，若 $\overline{BQ} : \overline{QC} = 3 : 2$ ，又 $\overline{CR} : \overline{RA} = 1 : 2$ 且 C, S, P 共線，若 $\overrightarrow{CS} = x\overrightarrow{CA} + y\overrightarrow{CB} = k\overrightarrow{CP}$ ，下列哪些選項是正確的？

- (1) $y - x = \frac{1}{11}$
- (2) $\overline{AP} : \overline{PB} = y : x$
- (3) $k = \frac{7}{11}$
- (4) $a_{\triangle APS} : a_{\triangle ABC} = 24 : 91$ ，其中 $a_{\triangle APS}$ 代表 $\triangle APS$ 的面積
- (5) 若 G 為 $\triangle ABC$ 之重心，且 $\overrightarrow{SG} = t\overrightarrow{CA} + s\overrightarrow{CB}$ ，則 $t + s = \frac{5}{33}$

