

107 學年度全國高級中學 學科能力測驗模擬考試

數學考科

—作答注意事項—

考試範圍：第一～二冊全

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 7 題，多選題 5 題，選填題第 A 至 H 題共 8 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記，請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\frac{3}{\square}$ 與第 19 列的 $\frac{8}{\square}$ 畫記，如：

18	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\frac{-}{\square}$ 與第 21 列的 $\frac{7}{\square}$ 畫記，如：

20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

※試題後附有參考公式及可能用到的數值

祝考試順利



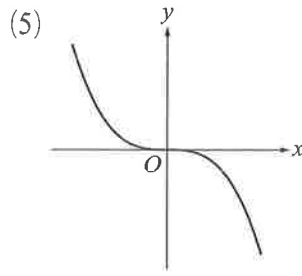
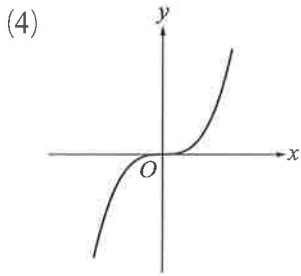
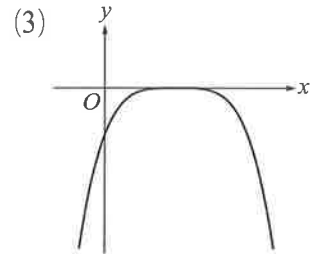
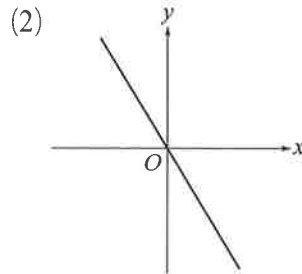
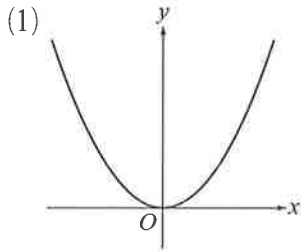
版權所有 · 翻印必究

第壹部分：選擇題（占 60 分）

一、單選題（占 35 分）

說明：第 1 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 設 $f(x) = ax^n$ 為實係數多項式函數，若 $a \times (-1)^n < 0$ ，則 $f(x)$ 的圖形可能為下列何者？



2. 設投擲兩顆公正骰子一次的點數和為 a ，且 $f(x) = (a-7)x^2 + 4x + 2$ ，已知 $f(x)$ 的圖形為開口向上的拋物線，則 $f(x)$ 的圖形與 x 軸相交於相異兩點的機率為下列何者？

(1) $\frac{5}{36}$

(2) $\frac{1}{5}$

(3) $\frac{5}{18}$

(4) $\frac{1}{3}$

(5) $\frac{3}{5}$

3. 設 a, b, c, d 皆為實數，且 $f(x) = (x-a)^2 + (x-b)^2 + (x-c)^2 + (x-d)^2$ ，已知 $f(2) = 80$ ， $f(6) = 48$ ，則 a, b, c, d 的標準差為下列何者？
- (1) $\sqrt{11}$
 - (2) $\sqrt{13}$
 - (3) 4
 - (4) $\sqrt{19}$
 - (5) $\sqrt{21}$
4. 已知等比數列 $\langle a_n \rangle$ 的首項 $a_1 > 0$ ，公比 $r > 1$ ，且 $3a_5 + a_7 = 4a_6$ ，若此數列中有兩相異項 a_t, a_s 滿足 $\sqrt{a_t a_s} = a_7$ ，則 $t+s-r$ 之值為下列何者？
- (1) 10
 - (2) 11
 - (3) 12
 - (4) 13
 - (5) 14
5. 設 $a > 0$ ， $b = \log_2 5$ ，若 $a^b = 16$ ，則 $a^{(b^2)}$ 之值為下列何者？
- (1) $\sqrt[4]{5}$
 - (2) 25
 - (3) 32
 - (4) 256
 - (5) 625

6. 若將 1, 3, 5, 7 四個數字任意排列成一個四位數 $abcd$, 則滿足 $c+d \geq a+b$ 的機率為下列何者? (例如: 四位數 3175, 即滿足 $7+5 \geq 3+1$)

- (1) $\frac{1}{4}$
- (2) $\frac{1}{3}$
- (3) $\frac{2}{3}$
- (4) $\frac{3}{4}$
- (5) $\frac{5}{6}$

7. 試問下列五個數中, 何者最大?

- (1) $\frac{22!}{5!}$
- (2) 10^{11}
- (3) 6^{14}
- (4) $4^5 \times 5^{12}$
- (5) $\sum_{k=0}^{34} C_k^{34}$

二、多選題 (占 25 分)

說明: 第 8 題至第 12 題, 每題有 5 個選項, 其中至少有一個是正確的選項, 請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定, 所有選項均答對者, 得 5 分; 答錯 1 個選項者, 得 3 分; 答錯 2 個選項者, 得 1 分; 答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者, 該題以零分計算。

8. 設 $A(\sqrt{2})$, $B(\sqrt{8})$ 為數線上兩點且 $P(t)$ 為線段 \overline{AB} 上一點, 已知 $a > 0$, $b > 0$,

$\overline{PA} : \overline{PB} = a : b$, 試問下列哪些選項是正確的?

- (1) 若 $a > b$, 則 $|t - \sqrt{2}| < |t - \sqrt{8}|$
- (2) 若 a, b 為有理數, 則 t 必為有理數
- (3) 若 a 為有理數且 b 為無理數, 則 t 必為無理數
- (4) 若 $a = b$, 則 $\sqrt{2}, t, \sqrt{8}$ 成等差數列
- (5) 若 $a = b$, 則 $\sqrt{2}, t, \sqrt{8}$ 成等比數列

9. 設一次函數 $f(x) = ax + b$ 的圖形為斜率大於 0、 y 截距大於 0 的一直線，且與直線 $x = 1$ 交於點 $A(1, k)$ ，若 $f\left(1 - \frac{b}{a}\right) \times f(0) = 9$ ，則 k 之值可能為下列哪些選項？

(1) $\frac{1}{\sqrt{11} - \sqrt{10}}$

(2) $\sqrt{19 + 2\sqrt{90}}$

(3) $5.\bar{9}$

(4) $3^{\sqrt{5}}$

(5) π

10. 設 $a > 0$ ，若不等式 $|2x + 1| > |3x - a|$ 的其中一個整數解為 $x = 2$ ，則 a 之值可能為下列哪些選項？

(1) $\frac{1}{107}$

(2) $\frac{107}{108}$

(3) $\frac{2019}{2018}$

(4) $\log_5 107$

(5) $(\sqrt{11})^{\sqrt{5}}$

11. 設多項式 $f(x) = (x - 12)^{16}$ 展開式中的 x^2 項係數為 a ，試問下列哪些選項是正確的？

(1) $f(x)$ 為偶函數

(2) 不等式 $f(x) > 0$ 的解為全體實數

(3) 多項式 $f(x)$ 除以 $(x - 11)(x - 13)$ 的餘式為 1

(4) a 的最高位數字為 1

(5) a 的末兩位數為 80

12. 設實係數多項式 $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax + b$ ，已知 1 為方程式 $f(x) = 0$ 之一根，試問下列哪些選項是正確的？
- (1) $f(0)f(4) < 0$
 - (2) $1 - 3i$ 可能為方程式 $f(x) = 0$ 之一根
 - (3) $2 + i$ 可能為方程式 $f(x) = 0$ 之一根
 - (4) 若方程式 $f(x) = 0$ 有虛根，則 $f(\pi) > 0$
 - (5) 若 $a > 3$ ，則不等式 $f(x) < 0$ 的解為 $x < 1$

第貳部分：選填題（占 40 分）

說明：1. 第 A 至 H 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(13—30)。
2. 每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 若集合 $U = \{2^{-2}, 2^{-1}, 2, 2^2, 2^3\}$ ， $a \in U, b \in U$ ，且 $a \neq b$ ，則滿足 $ab > 1$ 的數對 (a, b) 共有 ⑬⑭ 組。
- B. 在 1 與 32 之間插入 n 項後，此 $n+2$ 個數成等比數列，若所有項(包含 1 與 32)乘積的整數部分為 10 位數，則 n 至少為 ⑮⑯。
- C. 仲逸參加今年的大學個人申請，已知所填的六個校系全部通過第一階段篩選，且各校系第二階段甄試日期如下：

校系	霍金大學 量子學系	柴山大學 大數據系	神崎大學 數學系	宮城大學 AI 系	幻影大學 神學系	浦度大學 精算系
第二階段 甄試日期	4 月 3 日	4 月 11 日	4 月 3 日	4 月 5 日	4 月 3 日	4 月 11 日

仲逸決定從六個校系中至少選一個校系參加第二階段甄試，若甄試日期在同一天的校系，則最多只參加其中一校系的甄試，試問仲逸選擇參加第二階段甄試的情形共有 ⑰⑱ 種。

D. 爾琪諾幼兒園為了因應少子化的衝擊，近幾年推出了以下幾項措施：

- (一) 每天上午都有外籍老師親自教導美語
- (二) 每星期免費提供兩個時段的才藝班
- (三) 每個月的月費全面六折

根據園長 Alice 統計發現 105 年與 106 年學生人數的成長率分別為 5 % 與 10 %，出現逆勢成長的趨勢。若 105 年、106 年、107 年這三年學生人數的平均成長率要超過 25 %，則 107 年的成長率必須至少為 19 20 %。(無條件進位到整數位)

E. 設 $z = ((a + b) + 2i)((c - 8) + 2i)$ ，其中 a, b, c 分別代表投擲一顆公正骰子三次依序出現的點數，試問滿足 z 為實數的序組 (a, b, c) 共有 21 22 組。

F. 彩彩老師統計班上 28 位學生補習的科目數 (x) 與學期總成績的分數 (y)，已知 x, y 的算術平均數分別為 $\mu_x = 3, \mu_y = 60$ ，標準差分別為 σ_x, σ_y ，且相關係數為 $r = \frac{-3}{5}$ ，若班上的小雨目前只有物理與英文兩科有補習，且用 y 對 x 的迴歸直線方程式推估她的學期總成績為 70 分，則 $\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{23}{24 25}$ 。(請化為最簡分數)

G. 若從各位數字皆相異且各位數字和為 8 的所有三位數中任意選出一個三位數，則此數可被 11 整除的機率為 $\frac{26}{27 28}$ 。(請化為最簡分數)

H. 在數列 $\langle a_n \rangle$ 中，已知 $a_2 = 10, a_5 = 23, a_{15} = -8$ 且任意連續四項之和均為 20，則 $a_{108} = \underline{29 30}$ 。

參考公式及可能用到的數值

1. 一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的公式解：
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2. 以 α, β 為兩根的一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根與係數關係：
$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \text{ 及 } \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

3. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為
$$S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$$

首項為 a ，公比為 r ($r \neq 1$) 的等比數列前 n 項之和為
$$S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

4. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，算術平均數
$$\mu_x = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

標準差
$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - n\mu_x^2 \right)}$$

5. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，相關係數
$$r_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)}{n\sigma_x\sigma_y}$$

迴歸直線(最適合直線)方程式
$$y - \mu_y = r_{XY} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \mu_x)$$

6. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$

7. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ， $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ ， $\log_{10} 7 \approx 0.8451$