全國公私立高級中學108學年度學科能力測驗第一次聯合模擬考試

數學考科解析

考試日期：108年7月30~31日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	4	1	5	1	5	23	15	235	124	245	235	1234	7	7
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
2	0	−	2	8	8	3	2	1	1	2	0	2	1	1
31	32													
1	5													

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 題目未說 a 是不是實數，不可使用虛根成對定理

$\because$ 兩根之積為 -4

故另一根為 $-\dfrac{4}{1+i}=-2+2i$

＜另解＞

$\because (1+i)^2+a(1+i)-4=0$

$\Rightarrow a(1+i)=4-2i \Rightarrow a=\dfrac{4-2i}{1+i}=1-3i$

又 $\because$ 兩根之和為 $-1+3i$，故另一根為 $-2+2i$

故選(2)

2. $(x^2-4x+2)(3x-7)(3x-22)\le 0$

$\Rightarrow 2-\sqrt{2}\le x\le \dfrac{7}{3}$ 或 $2+\sqrt{2}\le x\le \dfrac{22}{3}$

所以整數解為 $x=1,2,4,5,6,7$，故選(4)

3. 眞數 $x-3>0$，$x-4>0\Rightarrow x>4\cdots$①

又 $\because \log_2(x-3)(x-4)=1\Rightarrow (x-3)(x-4)=2$ $\therefore x=2$ 或 $5\cdots$②

由①②即可得 $x=5$，故選(1)

4. $\log(1.1)^{60}=60\times\log 1.1\approx 60\times 0.0414=2.484$

$=2+0.4840\approx \log 10^2+\log 3.05=\log 305$

5年本利和＝10萬 $\times(1.1)^{60}\approx$ 10萬 $\times 305=3050$ 萬，故選(5)

5. $\because \overline{AC}\perp\overline{BC}$ $\therefore m_{\overline{AC}}\times m_{\overline{BC}}=-1$

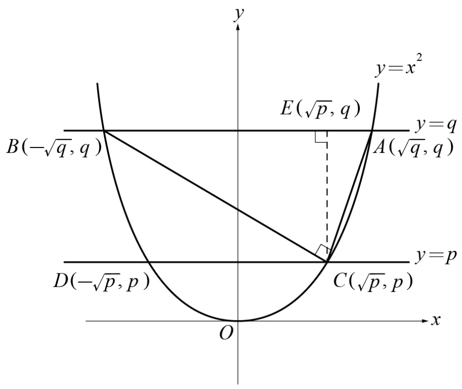
$\Rightarrow \dfrac{q-p}{\sqrt{q}-\sqrt{p}}\times\dfrac{q-p}{-\sqrt{q}-\sqrt{p}}=-1\Rightarrow q-p=1$

＜另解＞

$\because \triangle BCE\sim\triangle CAE$

$\therefore \dfrac{\overline{BE}}{\overline{CE}}=\dfrac{\overline{CE}}{\overline{AE}}\Rightarrow \dfrac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{q-p}=\dfrac{q-p}{\sqrt{q}-\sqrt{p}}\Rightarrow q-p=1$

故選(1)



6. 由有理根檢驗法知 $f(x)=0$

可能的有理根有 $x=\pm1,\pm2,\pm\dfrac{1}{2},\pm\dfrac{1}{3},\pm\dfrac{2}{3},\pm\dfrac{1}{6}$

檢驗可知

$f(x)=6x^4+11x^3-15x^2+2=(2x-1)(3x+1)(x^2+2x-2)$

$\therefore f(x)=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{3},-1\pm\sqrt{3}$

故選(5)

二、多選題

7. $x^2+4x+1>mx$ 恆成立

$\Rightarrow x^2+(4-m)x+1>0$ 恆成立

$\Rightarrow$ 判別式 <0，$(4-m)^2-4<0$

$\Rightarrow m^2-8m+12<0$

$\Rightarrow 2<m<6$

故選(2)(3)

8. (1) ○：$f(0)=-(\sqrt{2}+\sqrt{3})=-\sqrt{2}-\sqrt{3}$

(2) ×：$f(1)=-\sqrt{2}$

(3) ×：$f(2)=\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

(4) ×：$f(x)$ 的 x^2 項係數為 $\dfrac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{2}-(\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2})+\sqrt{2}$

$=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}-(\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2})+\sqrt{2}=0$

從 $f(0)$，$f(1)$，$f(2)$ 的值得知 $f(x)$ 不是常數函數

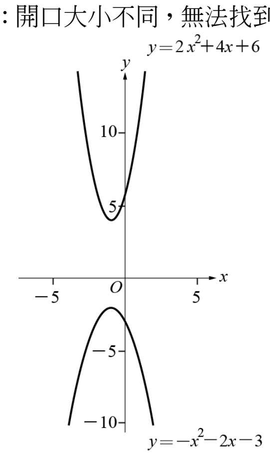
$\therefore f(x)$ 為一次函數

(5) ○：由(4)可知 $f(x)$ 為一次函數，圖形為一直線，

故 $f(4)=\dfrac{f(3)+f(5)}{2}$

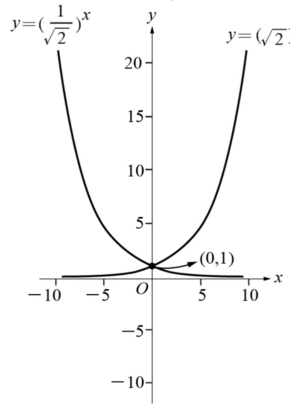
故選(1)(5)

9. (1) ×：開口大小不同，無法找到直線 L 使得兩圖形互相對稱

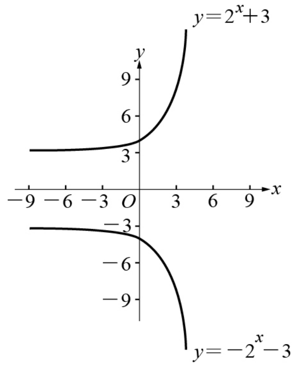


(2) ○：$f(x)=\sqrt{2}^{\,x}$，$g(x)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^x=\left(\sqrt{2}\right)^{-x}$，

故兩圖形對稱於 y 軸

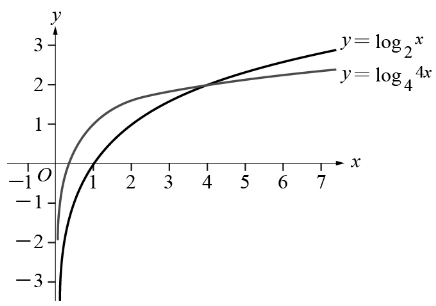


(3) ○：兩圖形對稱於 x 軸



(4) ×：無法找到直線 L 使得兩圖形互相對稱

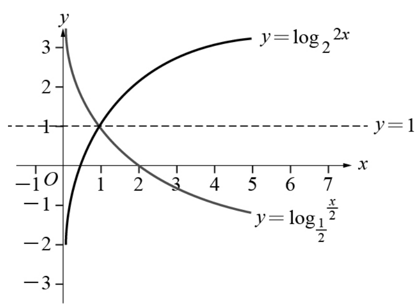
$\because y=\log_4 4x=1+\log_4 x$



(5) ○：$f(x)=\log_2 2x=1+\log_2 x$，$g(x)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{x}{2}=1+\log_{\frac{1}{2}} x$

兩圖形是由原本對稱的兩圖形 $y=\log_2 x$，

$y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 上移 1 單位，故對稱於 $y=1$



故選(2)(3)(5)

10. (1) ○：三次實係數方程式必有實根

(2) ○：$\because f(x)$為實係數三次多項式

$\therefore f(x)=0$，三根為 $1,1-i,1+i$

則 $b=-(1+1-i+1+i)=-3$

(3) ×：若 $f(x)=(x-1)(x-\frac{1+i}{2})(x-\frac{1-i}{2})\Rightarrow d=-\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$

(4) ○：$f(x)=x(x-1)(x-2)+(x+1)$

(5) ×：令 $h(x)=f(x)-(x+1)$

若 $y=f(x)$的圖形同時通過(0,1),(1,2),(2,3),(3,4)四點，

則 $x(x-1)(x-2)(x-3)\mid h(x)$，但 $\deg h(x)=3$，矛盾

<另解>

$f(x)=x^3+bx^2+cx+d$，

(0,1) , (1,2) , (2,3) , (3,4) 代入 $f(x)$

則 $\begin{cases} d=1 \\ 1+b+c+d=2 \\ 8+4b+2c+d=3 \\ 27+9b+3c+d=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b+c=0 \\ 4b+2c=-6 \\ 9b+3c=-24 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} b=-c \\ 4b+2c=-6 \\ 9b+3c=-24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c=6 \\ 6c=24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=3 \\ c=4 \end{cases}$ 不合

$\therefore$找不到三次多項式通過此四點

故選(1)(2)(4)

11. (1) ×：$f(0)=-12+8\sqrt{2}=-12+\sqrt{128}<0$

(2) ○：$f(\frac{\sqrt{2}}{4})=\frac{17\sqrt{2}}{2}-12=\frac{\sqrt{578}-24}{2}>0$

可依序代入函數完成下表

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
$f(x)$	−	−	+	−	+

(3) ×：$\frac{1}{4}\le x\le\frac{\sqrt{2}}{4}$ 之間有實根

(4) ○：由上表可知三根會出現的區間為

$\frac{1}{4}<x<\frac{\sqrt{2}}{4}$，$\frac{\sqrt{2}}{4}<x<\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}<x<1$

因此在 $\frac{1}{2}\le x\le 1$ 只有一實根

(5) ○：同上，沒有負實根

故選(2)(4)(5)

12. $f(x)=(x-2)Q_1(x)+1$ ……………………………①

$=(x-2)[(x-2)Q_2(x)+2]+1$

$=(x-2)^2Q_2(x)+2(x-2)+1$ ……………………②

$=(x-2)^2[(x-2)(x-3)+3]+2(x-2)+1$

$=(x-2)^3(x-3)+3(x-2)^2+2(x-2)+1$ ………③

(1) ×：由③可知 $f(x)$為四次多項式

(2) ○：由①可知 $f(2)=1$

(3) ○：由①可知 $f(x)$除以 $Q_1(x)$的商為$(x-2)$，餘式為 1

(4) ×：由②可知 $f(x)$除以$(x-2)^2$ 的商為 $Q_2(x)$，

餘式為 $2(x-2)+1$

(5) ○：由③可知 $f(2+\sqrt{2})=$

$(\sqrt{2})^3(-1+\sqrt{2})+3(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}+1=11$

故選(2)(3)(5)

13. (1) ○：由圖形中可判讀 $d>c>a>b>1$

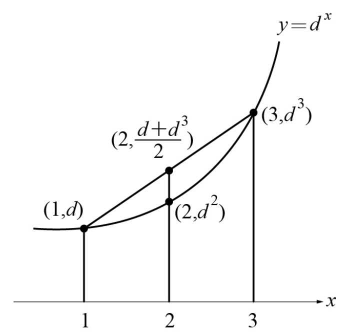
(2) ○：承(1)

(3) ○：$\because a>b$ 且$-0.5<0$

$\therefore \left(\frac{1}{b}\right)^{0.5}=b^{-0.5}>a^{-0.5}=\left(\frac{1}{a}\right)^{0.5}$

(4) ○：$\because d>1$，$y=d^x$ 的圖形凹口向上

$\therefore \frac{d+d^3}{2}>d^2$



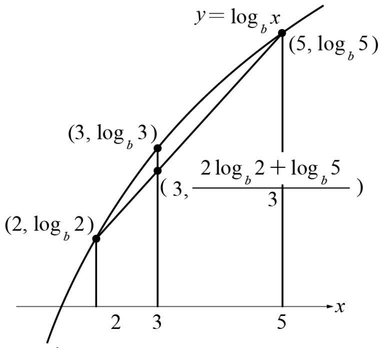
<另解>

$\because d,d^3$ 皆為正數，且 $d\ne d^3$

$\therefore$由算幾不等式可知 $\frac{d+d^3}{2}>\sqrt{d\cdot d^3}=d^2$

(5) ×：$\because b>1$，$y=\log_b x$ 的圖形凹口向下

$\therefore \frac{2\log_b 2+\log_b 5}{3}<\log_b 3$



＜另解＞

$\because \log_b 20<\log_b 27=3\log_b 3$

$\therefore \frac{2\log_b 2+\log_b 5}{3}<\log_b 3$

故選(1)(2)(3)(4)

第貳部分：選填題

A. $\log 6^{100}=100\times\log 6=100\times(\log 2+\log 3)\approx 77.81$

$=77+0.81=\log 10^{77}+\log 6.\cdots$

$=\log 6.\cdots\times 10^{77}$

$\Rightarrow 6^{100}\approx 6.\cdots\times 10^{77}$

$\therefore n=77$

B. 設矩形長為 a，寬為 b，其中 $a,b>0$

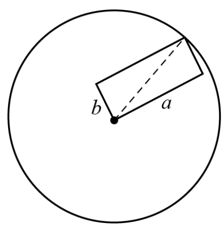
則 $ab=10$，對角線長為 $\sqrt{a^2+b^2}$

圓面積$=(a^2+b^2)\pi$

由算幾不等式可知 $\frac{a^2+b^2}{2}\geq\sqrt{a^2b^2}=ab$

$\therefore a^2+b^2\geq 2ab=20$

故當 $a=b=\sqrt{10}$ 時，面積最小值為 20π



C. 由除法原理可得$(2x+3)^3\cdot(2x-1)^7=(2x+1)^{10}\cdot 1+R(x)$

$\therefore R(x)=(2x+3)^3\cdot(2x-1)^7-(2x+1)^{10}$

常數項$=R(0)=3^3\cdot(-1)^7-1^{10}=-28$

D. 設里程位置為 x 時可免費救援

則 $|x-10|+2|x-25|\leq 36$

(1) 當 $x<10$，$10-x+2(25-x)\leq 36\Rightarrow 8\leq x$

$\therefore 8\leq x<10$

(2) 當 $10\leq x<25$，$x-10+2(25-x)\leq 36\Rightarrow 4\leq x$

$\therefore 10\leq x<25$

(3) 當 $x\geq 25$，$x-10+2(x-25)\leq 36\Rightarrow x\leq 32$

$\therefore 25\leq x\leq 32$

由(1)(2)(3)可知，$8\leq x\leq 32$

故最小值為 8，最大值為 32

E. $\because a^{\log_3 5}=3\sqrt{3}\Rightarrow \log_3 a^{\log_3 5}=\log_3 3\sqrt{3}\Rightarrow(\log_3 5)\log_3 a=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow(\log_3 5)^2\log_3 a=\frac{3}{2}\log_3 5\Rightarrow\log_3 a^{(\log_3 5)^2}=\log_3 5^{\frac{3}{2}}$

$\Rightarrow a^{(\log_3 5)^2}=5^{\frac{3}{2}}=5\sqrt{5}\approx 5\times 2.236\approx 11$

＜另解＞

$a^{(\log_3 5)^2}=a^{(\log_3 5)(\log_3 5)}=(3\sqrt{3})^{\log_3 5}=(3^{\frac{3}{2}})^{\log_3 5}=3^{\frac{3}{2}\log_3 5}=3^{\log_3 5^{\frac{3}{2}}}$

$=5^{\frac{3}{2}}=5\sqrt{5}\approx 11$

F. $\because 1500\times 10^{\frac{t-2018}{10}}>3000$

$\Rightarrow 10^{\frac{t-2018}{10}}>2$

$\Rightarrow\frac{t-2018}{10}>\log 2\approx 0.3010$

$\Rightarrow t-2018>3.010$

$\Rightarrow t>2021.010$，t 無條件捨去取 2021

故為 2021 年

G. 設二次函數 $y=a(x-1)^2+b$

依題意可知對稱軸 $x=1$，$\overline{AB}=4$

$\therefore A(-1,0)$, $B(3,0)$，且 $D(2,\frac{3}{2})$也在 Γ 上

$\Rightarrow\begin{cases}0=4a+b\\ \frac{3}{2}=a+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\frac{1}{2}\\ b=2\end{cases}$

可得二次函數為 $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2+2$

如圖，$C(0,\frac{3}{2})\Rightarrow\overline{CD}\,/\!/\,\overline{OB}$

設 L 與 $\overline{CD}$ 交於 M，與 $\overline{OB}$ 交於 N，

可得 $M(\frac{7}{2m},\frac{3}{2})$, $N(\frac{2}{m},0)$

梯形 $ONMC$ 面積＝梯形 $NBDM$ 面積

$\Rightarrow\frac{1}{2}(\overline{ON}+\overline{CM})\times\overline{OC}=\frac{1}{2}(\overline{NB}+\overline{MD})\times\overline{OC}$

$\Rightarrow\frac{2}{m}+\frac{7}{2m}=(3-\frac{2}{m})+(2-\frac{7}{2m})$

$\Rightarrow m=\frac{11}{5}$