

# 全國公私立高級中學

108 學年度學科能力測驗第一次聯合模擬考試

考試日期：108 年 7 月 30~31 日

## 數學考科

### — 作答注意事項 —

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 6 題，多選題 7 題，選填題第 A 至 G 題共 7 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是  $\frac{18}{19}$ ，而依題意計算出來的答案是  $\frac{3}{8}$ ，則考生必

須分別在答案卡上的第 18 列的  $\frac{3}{\square}$  與第 19 列的  $\frac{8}{\square}$  畫記，如：

18	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若第 C 題的答案格式是  $\frac{20(21)}{50}$ ，而答案是  $\frac{-7}{50}$  時，則考生必須分別在答案

卡的第 20 列的  $\frac{-}{\square}$  與第 21 列的  $\frac{7}{\square}$  畫記，如：

20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

※ 試題後附有參考公式及可能用到的數值

## 第壹部分：選擇題（占 65 分）

### 一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 已知  $i = \sqrt{-1}$ ，若  $1 + i$  是方程式  $x^2 + ax - 4 = 0$  的其中一根，則此方程式的另一根為何？
  - (1)  $2 - 2i$
  - (2)  $-2 + 2i$
  - (3)  $1 - i$
  - (4)  $-1 + i$
  - (5)  $1 + 2i$
  
2. 不等式  $(x^2 - 4x + 2)(3x - 7)(3x - 22) \leq 0$  的整數解有幾個？
  - (1) 3
  - (2) 4
  - (3) 5
  - (4) 6
  - (5) 7
  
3. 方程式  $\log_2(x-3) + \log_2(x-4) = 1$  的所有實數解之和為何？
  - (1) 5
  - (2) 6
  - (3) 7
  - (4) 8
  - (5) 9

4. 表(1)為常用對數表  $\log_{10} N$  的一部分，小南向地下錢莊借 10 萬元，月利率 10%，每月複利計算，如果一個月後還款，須還本利和 11 萬元，若過兩個月才還款，則本利和為 12.1 萬元，若小南經過 5 年後才打算還款，則本利和最接近下列何值？

表(1)

$N$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900

- (1) 170 萬  
 (2) 248 萬  
 (3) 300 萬  
 (4) 2484 萬  
 (5) 3000 萬
5. 設  $p, q$  都是實數且  $p < q$ ，已知二次函數  $y = x^2$  的圖形和直線  $y = q$  的圖形相交於相異兩點  $A$  和  $B$ ，而二次函數  $y = x^2$  的圖形和直線  $y = p$  的圖形相交於相異兩點  $C$  和  $D$ ，若  $\triangle ABC$  恰為直角三角形且  $\angle ACB = 90^\circ$ ，則  $q - p$  的值為何？
- (1) 1  
 (2)  $\sqrt{2}$   
 (3) 2  
 (4) 3  
 (5) 4
6. 設  $f(x) = 6x^4 + 11x^3 - 15x^2 + 2$ ，試選出正確的選項。
- (1) 方程式  $f(x) = 0$  沒有實根  
 (2) 方程式  $f(x) = 0$  有兩個實根和兩個虛根  
 (3) 方程式  $f(x) = 0$  沒有有理根  
 (4) 方程式  $f(x) = 0$  恰有一個有理根  
 (5) 方程式  $f(x) = 0$  恰有兩個相異有理根

## 二、多選題 (占 35 分)

說明：第 7 題至第 13 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇 (填) 題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7. 坐標平面上，有一直線  $L: y = mx$  與二次函數  $f(x) = x^2 + 4x + 1$ ，已知  $L$  的圖形恆在  $f(x)$  圖形的下方，則  $m$  值可能為下列哪些選項？

- (1) 1
- (2) 3
- (3) 5
- (4) 7
- (5) 9

8. 關於多項式  $f(x) = \frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{2}x(x-1) - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}(x-1)(x-2) + \sqrt{2}x(x-2)$ ，試選出正確的選項。

- (1)  $f(x)$  的常數項為  $-\sqrt{2}-\sqrt{3}$
- (2)  $f(x)$  的各項係數總和為  $\sqrt{2}$
- (3)  $f(2) = \sqrt{2}-\sqrt{3}$
- (4)  $f(x)$  是二次多項式
- (5)  $f(4) = \frac{f(3)+f(5)}{2}$

9. 「若函數  $y=f(x)$  的圖形，沿一直線  $L$  對稱後，與函數  $y=g(x)$  的圖形完全重合，則稱此兩函數圖形對稱於直線  $L$ ，例如  $y=2^x$  與  $y=\log_2 x$  對稱於直線  $y=x$ 。」下列哪些選項中的兩個函數圖形也會對稱於某一直線  $L$ ？

- (1)  $f(x) = 2x^2 + 4x + 6$ ， $g(x) = -x^2 - 2x - 3$
- (2)  $f(x) = \sqrt{2}^x$ ， $g(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$
- (3)  $f(x) = 2^x + 3$ ， $g(x) = -2^x - 3$
- (4)  $f(x) = \log_2 x$ ， $g(x) = \log_4 4x$
- (5)  $f(x) = \log_2 2x$ ， $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{2}$

10. 給定一個實係數三次多項式  $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ ，試選出正確的選項。

- (1) 存在實數  $\alpha$ ，使得  $f(\alpha) = 1000$
- (2) 若  $f(1) = f(1-i) = 0$ ，則  $b = -3$
- (3) 若  $f(1) = 0$ ，且  $b, c, d$  為整數，則  $\frac{1+i}{2}$  可能為  $f(x) = 0$  的解
- (4)  $y = f(x)$  的圖形可能同時通過  $(0,1), (1,2), (2,3)$  三點
- (5)  $y = f(x)$  的圖形可能同時通過  $(0,1), (1,2), (2,3), (3,4)$  四點

11. 19 世紀起，日本的數學家會在寺廟留下自己精心設計的考題，供人挑戰演練，這類寫有題目的木板稱為「算額」。前來挑戰解答的師生也會留下更簡易的解答方法，互相切磋。小波到日本旅遊時參觀了桐生市天滿宮，該寺廟流傳一道「算額」，小波挑戰後發現答案  $x$  是方程式  $8x^3 - 8\sqrt{2}x^2 + 5x - 12 + 8\sqrt{2} = 0$  的其中一個根，為了求出此根，他令  $f(x) = 8x^3 - 8\sqrt{2}x^2 + 5x - 12 + 8\sqrt{2}$ ，並計算  $f(\frac{1}{2}), f(\frac{1}{4})$  數值的正負，如表(2)。

試選出正確的選項。

表(2)

$x$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
$f(x)$		-		-	

- (1)  $f(0) > 0$
- (2)  $f(\frac{\sqrt{2}}{4}) > 0$
- (3)  $f(x) = 0$  在  $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}$  沒有實根
- (4)  $f(x) = 0$  在  $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$  只有一實根
- (5)  $f(x) = 0$  沒有負實根

12. 已知多項式  $f(x)$ ，經三次的除法運算，其結果分述如下：

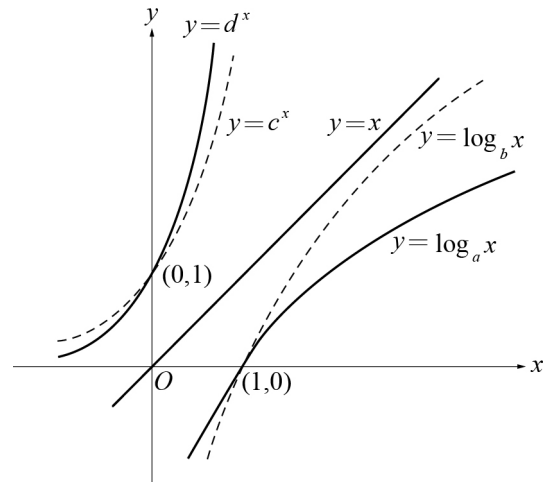
- ①  $f(x)$  除以  $x-2$ ，得商式為  $Q_1(x)$ ，餘式為 1
- ②  $Q_1(x)$  除以  $x-2$ ，得商式為  $Q_2(x)$ ，餘式為 2
- ③  $Q_2(x)$  除以  $x-2$ ，得商式為  $x-3$ ，餘式為 3

試選出正確的選項。

- (1)  $f(x)$  是三次多項式
- (2)  $f(2) = 1$
- (3)  $f(x)$  除以  $Q_1(x)$  的餘式為 1
- (4)  $f(x)$  除以  $(x-2)^2$  的餘式為  $Q_2(x)$
- (5)  $f(2+\sqrt{2}) = 11$

13. 設  $a, b, c, d$  皆為大於 1 的實數，圖(1)中有兩個指數函數與兩個對數函數的圖形，試選出正確的選項。

- (1)  $d > c$   
 (2)  $c > a$   
 (3)  $\left(\frac{1}{b}\right)^{0.5} > \left(\frac{1}{a}\right)^{0.5}$   
 (4)  $\frac{d+d^3}{2} > d^2$   
 (5)  $\frac{2\log_b 2 + \log_b 5}{3} > \log_b 3$



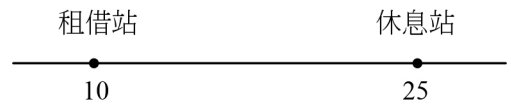
圖(1)

第貳部分：選填題（占 35 分）

說明：1. 第 A 至 G 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（14-32）。  
 2. 每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 若將  $6^{100}$  以科學記號表示為  $a \times 10^n$ ，其中  $1 \leq a < 10$ ， $n$  為整數，則  $n =$  ⑭⑮。
- B. 已知矩形的面積為 10 平方單位，若以矩形的任一頂點為圓心，對角線為半徑作一圓，則此圓面積的最小值為 ⑯⑰  $\pi$  平方單位。
- C. 多項式  $(2x+3)^3 \cdot (2x-1)^7$  除以  $(2x+1)^{10}$  的餘式為  $R(x)$ ，則  $R(x)$  的常數項為 ⑱⑲⑳。

- D. 如圖(2)，在一條東西向的筆直道路上，設置了電動機車租借站與休息站，分別位於道路里程 10 與 25 的位置。遊客租借電動車騎乘遊玩時，偶爾會在路上耗盡電力而需要道路救援。由於人力與成本的考量，若「救援位置與租借站的距離」加上「救援位置與休息站距離的 2 倍」不大於 36 時，可以免費服務。則可免費救援的里程位置最小值為 ⑲，最大值為 ⑳㉑。



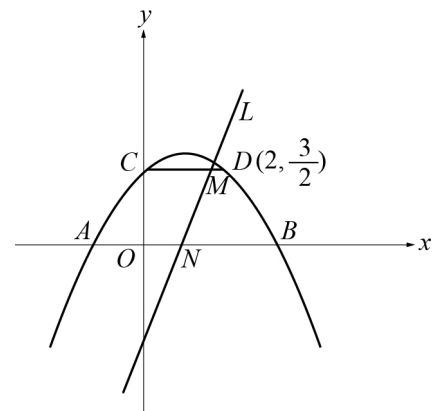
圖(2)

- E. 設  $a > 0$ ，若  $a^{\log_3 5} = 3\sqrt{3}$ ，則最接近  $a^{(\log_3 5)^2}$  的整數為 ㉔㉕。

- F. 1999 年丹恩颱風過後，金門縣有許多藍孔雀從畜產試驗所逃出並大量繁殖，截至 2018 年，金門全縣有 1500 隻的野生藍孔雀。若不有效控制，生態學家估計在西元  $t (t \geq 2018)$  年，藍孔雀的數量會有  $p(t) = 1500 \times 10^{\frac{t-2018}{10}}$  隻。若按照此函數估計，則在西元 ㉖㉗㉘㉙ 年，藍孔雀的數量會超過 3000 隻。(年份小數點後無條件捨去至整數位，例如  $t=2025.75$ ，約為 2025 年九月，須回答 2025 年)

- G. 如圖(3)，二次函數  $\Gamma$  的對稱軸為  $x=1$ ，與  $x$  軸交於  $A, B$  兩點，與  $y$  軸交於  $C$  點。已知  $O$  為原點， $\overline{AB}=4$ ，且點  $D(2, \frac{3}{2})$  也在  $\Gamma$  上，直線  $L$  恰平分四邊形  $OBDC$  的面積。若

直線  $L$  的方程式為  $y = mx - 2$ ，則  $m = \frac{\textcircled{30} \textcircled{31}}{\textcircled{32}}$ 。



圖(3)

### 參考公式及可能用到的數值

1. 一元二次方程式  $ax+bx+c=0$  的公式解： $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 。
2. 平面上兩點  $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$  間的距離為  $\overline{P_1P_2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ 。
3. 通過  $(x_1, y_1)$  與  $(x_2, y_2)$  的直線斜率  $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ ， $x_2\neq x_1$ 。
4. 算幾不等式：若  $a, b$  為非負的實數，則  $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ ；當  $a=b$  時， $\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$ 。
5. 分點公式：設數線上相異兩點  $A(a), B(b)$ ，若  $P$  點在  $\overline{AB}$  上，且  $\overline{AP}:\overline{BP}=m:n$ ，則  $P$  點坐標為  $\frac{mb+na}{m+n}$ 。
6. 參考數值： $\sqrt{2}\approx 1.414$ ， $\sqrt{3}\approx 1.732$ ， $\sqrt{5}\approx 2.236$ ， $\sqrt{6}\approx 2.449$ ， $\pi\approx 3.142$ 。
7. 對數值： $\log_{10} 2\approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3\approx 0.4771$ ， $\log_{10} 5\approx 0.6990$ ， $\log_{10} 7\approx 0.8451$ 。