

臺中市立高級中等學校

107 學年度學科能力測驗第一次聯合複習考試

考試日期：107 年 10 月 31 日~11 月 1 日

數學考科

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 6 題，多選題 6 題，選填題第 A 至 H 題共 8 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{18}{19}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生必須分

別在答案卡上的第 18 列的 $\frac{3}{19}$ 與第 19 列的 $\frac{8}{19}$ 畫記，如：

18	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{20(21)}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的

第 20 列的 $\frac{-}{50}$ 與第 21 列的 $\frac{7}{50}$ 畫記，如：

20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

※ 試題後附有參考公式及可能用到的數值

第壹部分：選擇題（占 60 分）

一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 櫻桃家族成員有爺爺、奶奶、爸爸、媽媽、姐姐、小丸子，一家六口要去照相館拍全家福照，有六張椅子排成一列供拍照者就坐，然而因前一晚某些爭吵導致爺爺與爸爸不相鄰、爸爸與媽媽不相鄰、媽媽與姐姐不相鄰，請問攝影師有幾種安排座位的排法？

- (1) 132
- (2) 180
- (3) 240
- (4) 276
- (5) 426

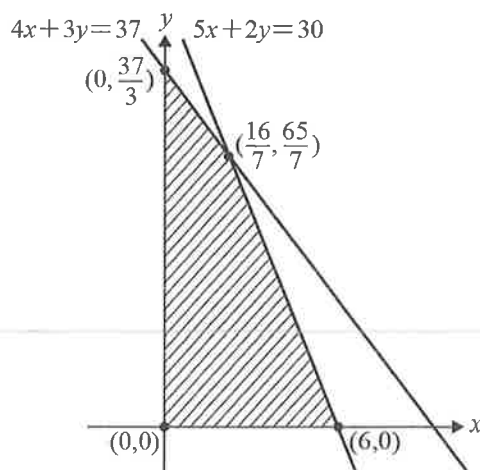
2. 擲一個公正的正四面體骰子(四面點數分別為 1, 2, 3, 4)二次，設第一次擲出點數為 a ，第二次擲出點數為 b ，求直線 $L: ax+2y=3a+1$ 與圓 $C: x^2+y^2=b^2$ 相交的機率為多少？

- (1) $\frac{7}{16}$
- (2) $\frac{1}{2}$
- (3) $\frac{9}{16}$
- (4) $\frac{5}{8}$
- (5) $\frac{11}{16}$

3. 已知可行解區域為 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 5x+2y \leq 30 \\ 4x+3y \leq 37 \end{cases} x, y \in Z$ ，如圖(1)，

求目標函數 $f(x, y) = 8x + 5y$ 的最大值

- (1) 63
- (2) 61
- (3) 60
- (4) 59
- (5) 48



圖(1)

4. 求方程組 $\begin{cases} |x-4|-y=2 \\ y^2+4x=29 \end{cases}$ 的所有解 (x, y) 中 x 值的總和為何？

- (1) 8
- (2) 2
- (3) 0
- (4) -2
- (5) -8

5. 若遞迴數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n \quad (n \geq 1) \end{cases}$ ，則此數列第 51 項最接近下列哪一個數？

- (1) 10^{-5}
- (2) 10^{-6}
- (3) 10^{-7}
- (4) 10^{-8}
- (5) 10^{-9}

6. 小明參加國防課實彈射擊，一排 10 個人，由右到左分別為 1~10 號靶位，小明在 5 號靶位，每位同學每發子彈射中自己靶位的機率 $\frac{4}{10}$ ，射中右邊同學靶位的機率 $\frac{3}{10}$ (例如：小明射中 4 號靶位)，射中左邊同學靶位的機率 $\frac{2}{10}$ ，完全沒射中的機率 $\frac{1}{10}$ ，每人有 2 發子彈，射擊結束後，已知 5 號靶位上有 2 個彈孔，試問這 2 個彈孔均由小明射中的機率為何？

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| (1) $\frac{1296}{8821}$ | (2) $\frac{1296}{20665}$ |
| (3) $\frac{16}{55}$ | (4) $\frac{3136}{8821}$ |
| (5) $\frac{3136}{20665}$ | |

二、多選題 (占 30 分)

說明：第 7 題至第 12 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇 (填) 題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7. 下列敘述何者正確？

(1) 若 a, b 為異於 0 之實數，若 $a > b$ ，則 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

(2) 沒有實數 x 滿足 $|x-2|+|x+3| \leq 4$

(3) 若 a, c 為有理數， b, d 為無理數，且 $a+b=c+d$ ，則 $a=c, b=d$

(4) $a < 0, b < 0$ ，則 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$

(5) 數線上 A 點坐標為 a ， B 點坐標為 b ，滿足 $\overline{PA}:\overline{PB}=m:n$ ，則 P 點坐標為 $\frac{na+mb}{m+n}$

8. 坐標平面上，直線 $y=k(k>0)$ 與函數 $y=3^x$ ， $y=9^x$ 的圖形分別交於 A, B 兩點。 $d_k = \overline{AB}$ 代表 A, B 兩點的距離，下列何者正確？

(1) $d_1 = 6$

(2) $d_3 = \frac{1}{2}$

(3) A 在 B 右側

(4) d_3, d_9, d_{27} 三數成等差數列

(5) $d_k = \log_9 k$

9. 設 50 筆資料 $(x_i, y_i) \quad i=1, 2, 3, \dots, 50$ ，平均數 $\mu_x = 60$ ， $\mu_y = 60$ ， x 與 y 的相關係數為 0.8， y 對 x 的迴歸直線 L 過點 $(30, 45)$ ，下列何者正確？

(1) 迴歸直線斜率為 0.8

(2) 迴歸直線過點 $(40, 50)$

(3) x 的標準差大於 y 的標準差

(4) 若將 50 筆資料標準化，得到新數據 (x'_i, y'_i) ，則 y' 對 x' 的迴歸直線斜率為 0.8

(5) 若第 51 筆資料的 $y_{51} = 80$ ，則可用 50 筆資料的迴歸直線 L 預測 $x_{51} = 100$

10. 請問下列選項何者正確？

(1) $\sum_{k=1}^{20} k^2 = \sum_{k=1}^{30} (k-10)^2$

(2) $\sum_{k=1}^n k(k+1) = \sum_{k=1}^n k \times \sum_{k=1}^n (k+1)$

(3) $\sum_{k=1}^m mn = (1+2+\cdots+m)n$

(4) 若 $\{a_k\}_{k=1}^{3n}$ 為等比數列，則 $\sum_{k=1}^n a_k, \sum_{k=n+1}^{2n} a_k, \sum_{k=2n+1}^{3n} a_k$ 亦為等比數列

(5) 若 a, b, c 為等比數列，則 b 必不為 0

11. 設 $f(x) = 5x^3 + 2x^2 + 2x - 3$ ，則下列敘述哪些正確？

(1) $f(3^x) = 0$ 恰有一個正實根

(2) $x^{10}f(x) + f(x^2) + f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘數為 18

(3) 不等式 $f(x) \geq 0$ 與 $\frac{5x-3}{(x-1)^2} \geq 0$ 的解集合相同

(4) $f(\log_{16} 12) > 0$

(5) 若 $\triangle ABC$ 中， $\angle A$ 為鈍角且 $\sin A$ 為 $f(x) = 0$ 的一個有理根，則

$$\sin(270^\circ - A) + \sin(360^\circ - A) = -\frac{1}{5}$$

12. 如圖(2)所示：等腰直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle A$ 為直角， $A(0,6)$ ， B, C 分別位於第二象限與第一象限，若直線 AB 與 x 軸正向之夾角為 θ ，且 $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ，斜邊 BC 之斜率為正且與 y

軸交於點 $D(0, \frac{8}{3})$ ，則下列敘述哪些正確？

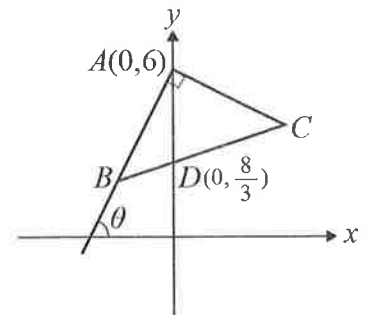
(1) AB 直線方程式為 $3x - y + 6 = 0$

(2) BC 直線方程式為 $x - 3y + 8 = 0$

(3) $\vec{BA} \cdot \vec{CB} = -30$

(4) 若 (x, y) 為 $\triangle ABC$ 內部及邊界上之任一點，則 $-3x + y$ 的最大值為 6

(5) $\triangle ABC$ 邊上有 9 個點與原點距離為整數



圖(2)

第貳部分：選填題（占40分）

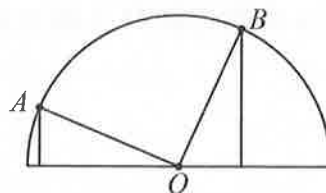
說明：1.第 A 至 H 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（13-38）。

2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 有一透明建築物名為「超級圓」，從側面觀察形狀是個標準的半圓，如圖(3)，有一個小舞台在圓心 O 點。今有兩工人要進行表面維修，分別站於 A 、 B 兩點，由 A 點看 O 點的俯角為 $23^\circ 20'$ ，由 B 點看 O 點的俯角為 $66^\circ 50'$ ，已知 A 、 B 兩點之高度差為 370 公尺，求 O 點到 A 點的距離為 ⑬⑭⑮ 公尺。(四捨五入至整數位)

參考數據

角度	sin	cos
$23^\circ 00'$	0.3907	0.9205
$23^\circ 10'$	0.3934	0.9194
$23^\circ 20'$	0.3961	0.9182
$23^\circ 30'$	0.3987	0.9171
$23^\circ 40'$	0.4014	0.9159
$23^\circ 50'$	0.4041	0.9147



圖(3)

- B. 設 x_1, x_2, \dots, x_{20} 是從 1, 2, 3 這三個數中重複取值所構成的數列，若 $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{20}^2 = 110$ ，

$x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_{20}^3 = 296$ ，則 x_1, x_2, \dots, x_{20} 這 20 筆資料的標準差 $\sigma = \sqrt{\frac{\textcircled{16}\textcircled{17}}{\textcircled{18}\textcircled{19}}}$ 。

- C. $\triangle ABC$ 中， A 的內角平分線交 \overline{BC} 於 D ， $\overline{BD} = 5$ ， $\overline{CD} = 7$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ，求

$\overline{AD} = \frac{\textcircled{20}}{\textcircled{21}} \sqrt{\textcircled{22}}$ 。

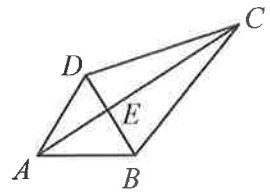
- D. 若 x 的一元二次方程式 $x^2 - (\log_{\sqrt{3}} a)x + 2\log_3 a + 3 = 0$ 有兩相異實根，則 a 的範圍：

$a > \underline{\textcircled{23}\textcircled{24}}$ or $\underline{\textcircled{25}} < a < \frac{\textcircled{26}}{\textcircled{27}}$ 。

E. 設 $f(x) = 5^{x+1}$ 的圖形 Γ 交 y 軸於 A 點，且 Γ 上一點 B 在 x 軸正向的投影點為 C ，已知 $\triangle ABC$ 的面積為 5^{14} ，若 B 點的 x 座標落在正整數 n 與 $n+1$ 之間，則 $n = \underline{\quad 28 \quad 29 \quad}$ 。

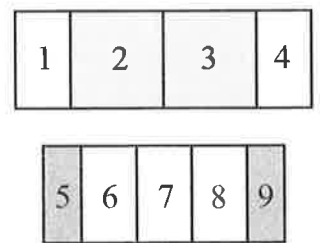
F. $A、B、C、D$ 四人在足球場上踢球，將足球場坐標化後，這四人的位置分別對應的坐標為 $A(1,2)、B(3,4)、C(4,5)、D(7,3)$ ，球在 A 腳下，當 A 以秒速 $\sqrt{2}$ 公尺的速度跑向 B 時，同一時間 C 以秒速 $\sqrt{13}$ 公尺的速度跑向 D ， $B、D$ 不動， A 要將球傳給 C ，試問幾秒後有最短傳球距離： $\frac{\textcircled{30}}{\textcircled{31} \textcircled{32}}$ 秒。

G. 如圖(4)，四邊形 $ABCD$ 中， \overline{AC} 與 \overline{BD} 相交於 E ，已知 $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}$ ，求 $\triangle ABE$ 面積： $\triangle CDE$ 面積的比值 $= \frac{\textcircled{33}}{\textcircled{34}}$ 。



圖(4)

H. 現有 9 台不同的汽車，包含 1 台休旅車，4 台轎車，4 台小轎車，其中小林夫妻有 1 台轎車及 1 台小轎車。停車場配置圖如圖(5)，編號 2, 3 停車位三種車型都能停，編號 1, 4, 6, 7, 8 只能停轎車及小轎車，編號 5, 9 只能停小轎車，小林夫妻的車子一定要相鄰，試問這 9 台車有幾種不同的停車方式： $\underline{\quad 35 \quad 36 \quad 37 \quad 38 \quad}$ 種。



圖(5)

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為 a ，公比為 $r (r \neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

3. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑)

$\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

4. 三角函數的三倍角公式： $\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$

$$\sin 3\theta = 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta$$

5. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，算術平均數 $\mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

$$\text{標準差 } \sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\mu_X^2)}$$

6. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，相關係數 $r_{(X,Y)} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n\sigma_X \sigma_Y}$

迴歸直線(最適合直線)方程式 $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$

7. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$

8. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ， $\log_{10} 7 \approx 0.8451$