

# 108 年學科能力測驗第一次模擬考試

## 數學考科

108-W1

命題範圍：第一冊

### — 作答注意事項 —

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 6 題，多選題 7 題，選填題第 A 至 G 題共 7 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是  $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是  $\frac{3}{8}$ ，則

考生必須分別在答案卡上的第 18 列的  $\square^3$  與第 19 列的  $\square^8$  畫記，如：

18	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若第 C 題的答案格式是  $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是  $\frac{-7}{50}$  時，則考生必須分

別在答案卡的第 20 列的  $\square^7$  與第 21 列的  $\square^7$  畫記，如：

20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

※試題後附有參考公式及可能用到的數值



5. 小明最近在複習指數問題，他發現函數  $f(x) = \frac{3-2^{x+3}}{3+2^x}$  有一個現象，無論  $x$  為任何實數，函數  $f(x)$  不會超過 10，也不會小於 -10。則下列哪一個選項可能是  $f(x)$  的函數值？  
(1)  $\pi$                       (2)  $\sqrt{2}$                       (3)  $2^{\sqrt{3}}$                       (4)  $\log_{2019} 108$                       (5)  $\log_{108} 2019$
6. 音量的強度通常以分貝為單位表示，分貝 ( $S$ ) 與聲音強度 ( $I$ ) 的計算公式為  $S = 10 \log \frac{I}{I_0}$ ，其中  $I_0$  是人耳可聽到的最小聲音強度  $10^{-12}$  ( $\frac{W}{m^2}$ )。警報器是消防安檢的重要設備之一，設某警報器其音量強度為 90 分貝，如果五個同款警報器一起發聲，則測出來的音量強度最接近下列何值？  
(1) 97 分貝                      (2) 99 分貝                      (3) 150 分貝                      (4) 225 分貝                      (5) 450 分貝

## 二、多選題 (占 35 分)

說明：第 7 題至第 13 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇 (填) 題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7. 以  $x^2+2x-8$  除多項式  $f(x)$  與  $g(x)$  分別得餘式為  $3x+1$ ， $2x-5$ ，試選出正確的選項。  
(1)  $f(0)=1$   
(2)  $2f(x)+3g(x)$  被  $x-2$  除的餘式為 11  
(3)  $xf(x)+2g(x)$  被  $x-1$  除的餘式為 -2  
(4)  $f(x)+g(x)$  被  $x^2+2x-8$  除的餘式為  $5x-4$   
(5)  $x^2f(x)+xg(x)$  被  $x^2+2x-8$  除的餘式為  $25x-24$

8. 試選出正確的選項。

- (1) 方程式  $|x+3|+|x-5|=10$  的解為  $-4$  或  $6$
- (2) 方程式  $|2x-5|+|x+2|=4$  無解
- (3) 不等式  $|x-4| \geq |3x-6|$  的解為  $1 \leq x \leq \frac{5}{2}$
- (4) 不等式  $|x+2|+|x-3| \leq 7$  的解為  $-2 \leq x \leq 3$
- (5) 不等式  $|3x-5| \leq 2x$  的解為  $1 \leq x \leq \frac{5}{3}$

9. 已知  $a, b, c, d$  皆為有理數,  $r, s$  皆為無理數。試選出正確的選項。

- (1) 若  $a+b\sqrt{3}=c+d\sqrt{3}$ , 則  $a=c, b=d$
- (2) 若  $r+s$  為有理數, 則  $rs$  為有理數
- (3)  $a+br$  為無理數
- (4) 若  $r \neq s$ , 則  $r$  與  $s$  之間存在無限多個有理數, 也存在無限多個無理數
- (5) 若  $x \in \mathbb{R}$ , 且  $x^{2019}$  與  $x^{10}$  皆為有理數, 則  $x$  為有理數

10. 下列有關多項式的敘述, 試選出正確的選項。

- (1) 設  $f(x)=a_n x^n+a_{n-1} x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$  為整係數多項式, 若  $ax-b$  為  $f(x)$  的一次因式, 則  $a$  為  $a_n$  的因數且  $b$  為  $a_0$  的因數
- (2) 設  $f(x)$  為整係數多項式, 若  $f(x)$  可被一次整係數多項式  $ax+b$  整除, 則其商式亦為整係數多項式
- (3) 設  $f(x)$  為有理係數多項式, 且  $f(a+\sqrt{b})=0$ , 則  $f(a-\sqrt{b})=0$
- (4) 設  $f(x)$  為實係數多項式, 且  $f(2+i)=0$ , 則  $f(2-i)=0$
- (5) 設  $f(x)$  為實係數多項式, 且  $Z$  為虛數, 若  $f(x)$  可被  $x-Z$  整除, 則  $f(x)$  亦可被  $(x-Z)(x-\bar{Z})$  整除 ( $\bar{Z}$  為  $Z$  的共軛複數)

11. 下列有關指數函數與對數函數的圖形描述，試選出正確的選項。

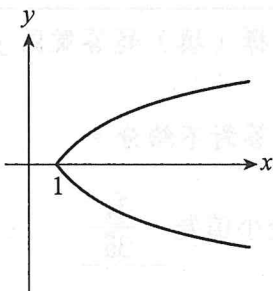


圖 1

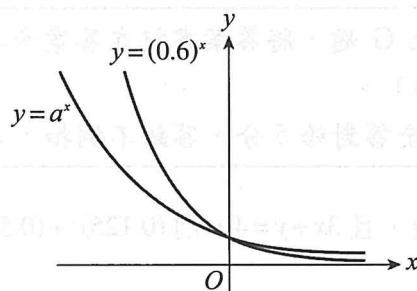


圖 2

- (1) 在坐標平面上， $y = \log_3 \frac{1}{x}$  的圖形與  $y = \log_3 x$  的圖形對稱於  $x$  軸
- (2)  $y = |\log_a x|$  ( $a > 1$ ) 的圖形可以為圖 1
- (3) 在坐標平面上， $y = \log 3x$  的圖形經過平移後可與  $y = \log 5x$  的圖形重合
- (4) 作  $y = (1.2)^x$  與  $y = x$  兩函數的圖形，可知方程式  $(1.2)^x - x = 0$  沒有實根
- (5) 如圖 2，其中底數  $a$  之值比 0.6 小

12. 設  $a = \left(\frac{4}{5}\right)^{100} = k \times 10^n$ ，其中  $n$  為整數，且  $1 < k < 10$ ，試選出正確的選項。

- (1)  $n = -10$
- (2)  $\log a$  的首數為  $-9$
- (3)  $\log a$  的尾數為  $0.3$
- (4)  $a$  乘開後自小數點後算起連續出現 9 個 0
- (5)  $2 < k < 3$

13. 下列有關指數與對數的運算，試選出正確的選項。

- (1) 若  $2a \neq b$ ，則  $3^{\frac{2a+b}{2}} > \frac{1}{2}(3^{2a} + 3^b)$
- (2)  $2^{100} > 10^{31}$
- (3)  $\log_8 27 = \log_2 3$
- (4)  $(\log_3 4)(\log_5 6) = (\log_3 6)(\log_5 4)$
- (5) 設  $a > 0$ ， $b > 0$ ，且  $a \neq 1$ ，則  $5^{\log_a b} = b^{\log_a 25}$



第貳部分：選填題（占 35 分）

說明：1. 第 A 至 G 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（14-34）。

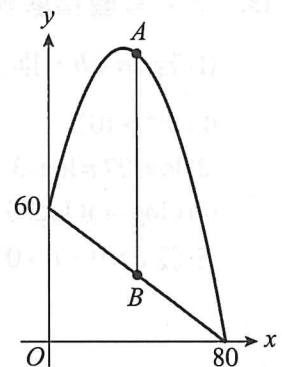
2. 每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 設  $x, y$  為實數，且  $3x+y=4$ ，則  $(0.125)^x+(0.5)^y$  的最小值為  $\frac{\textcircled{14}}{\textcircled{15}}$ 。（化為最簡分數）

B. 有一項實驗結果發現細菌數每經過 1 日後會增加為原來的  $x$  倍，經過 3 日後會增加為原來的  $y$  倍，經過 5 日後會增加為原來的  $3x+2y$  倍。由此可推得細菌數每經過 1 日後會增加為原來的  $\sqrt{\textcircled{16}}$  倍。

C. 設  $(x^2+x+2)^{10}=a_{20}x^{20}+a_{19}x^{19}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ ，  
則  $a_{20}-a_{18}+a_{16}-\cdots-a_6+a_4-a_2=$   $\textcircled{17} \textcircled{18} \textcircled{19} \textcircled{20} \textcircled{21}$ 。

D. 某甲站在高度 60 公尺的斜坡上，如圖中坐標  $(0, 60)$  處，向空中發射一枚煙火彈，以拋物線  $y=-\frac{1}{16}x^2+\frac{17}{4}x+60$  的軌跡掉落，正好落在山腳下，如圖中坐標  $(80, 0)$  的位置。在煙火彈掉落過程中，煙火彈與斜坡的鉛垂線段（即  $\overline{AB}$ ）的最大值為  $\textcircled{22} \textcircled{23} \textcircled{24}$ 。



E. 設  $x$  為實數，已知方程式  $x^2 + 5x - |3x + 6| = a$  有 4 個相異實數解，若  $a$  的範圍為  $r < a < s$ ，則數對  $(r, s) = \underline{(25, 26), (27, 28)}$ 。

F. 設  $f(x)$  為整係數多項式，且  $f(-1 + \sqrt{2}) = 2 + 5\sqrt{2}$ ，若  $f(x)$  除以  $x^2 + 2x - 1$  的餘式為  $ax + b$ ，則數對  $(a, b) = \underline{(29, 30)}$ 。

G. 2003 年科學家發現蒂加登星 (Teegarden's Star)，其為一顆年齡至少有 80 億歲的恆星，這代表圍繞著蒂加登星的行星可能有足夠的時間進化出高等生命。科學家們並於 2019 年 6 月確認有 2 顆相當類似地球的行星在蒂加登星身邊繞行，成功列入「適居太陽系外行星目錄」。已知蒂加登星的視星等為 15.4、絕對星等為 17.47，而星等換算公式為  $M = m + 5 \log_{10} \frac{d_0}{d}$  ( $M$  為絕對星等， $m$  為視星等， $d_0$  約為 32.616 光年， $d$  為與觀察者的距離)。則由查表與內插法可得此蒂加登星距離我們約為 31, 32, 33, 34 光年。(四捨五入至小數第二位) (已知  $\log 32.616 \approx 1.5134$ )

$x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732

參考公式及可能用到的數值

1. 算幾不等式：設  $a, b \geq 0$ ，則  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ，其中  $a=b$  時，等號成立
2. 一元二次方程式  $ax^2+bx+c=0$  的公式解： $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
3. 以  $\alpha, \beta$  為二根的一元二次方程式  $ax^2+bx+c=0$  的根與係數關係為：  
 $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$  及  $\alpha\beta = \frac{c}{a}$
4. 設  $a > 0, a \neq 1, x > 0, y > 0, r \in R$ ，  
(1)  $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$   
(2)  $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$   
(3)  $\log_a x^r = r \log_a x$
5. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732, \sqrt{5} \approx 2.236, \sqrt{6} \approx 2.449, \sqrt{7} \approx 2.645, \pi \approx 3.142$
6. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010, \log_{10} 3 \approx 0.4771, \log_{10} 5 \approx 0.6990, \log_{10} 7 \approx 0.8451$

1.00	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06	1.07	1.08	1.09
0.0000	0.0047	0.0094	0.0141	0.0187	0.0234	0.0281	0.0328	0.0375	0.0422
1.10	1.11	1.12	1.13	1.14	1.15	1.16	1.17	1.18	1.19
0.0469	0.0516	0.0563	0.0610	0.0657	0.0704	0.0751	0.0798	0.0845	0.0892
1.20	1.21	1.22	1.23	1.24	1.25	1.26	1.27	1.28	1.29
0.0938	0.0985	0.1032	0.1079	0.1126	0.1173	0.1220	0.1267	0.1314	0.1361
1.30	1.31	1.32	1.33	1.34	1.35	1.36	1.37	1.38	1.39
0.1408	0.1455	0.1502	0.1549	0.1596	0.1643	0.1690	0.1737	0.1784	0.1831
1.40	1.41	1.42	1.43	1.44	1.45	1.46	1.47	1.48	1.49
0.1878	0.1925	0.1972	0.2019	0.2066	0.2113	0.2160	0.2207	0.2254	0.2301
1.50	1.51	1.52	1.53	1.54	1.55	1.56	1.57	1.58	1.59
0.2348	0.2395	0.2442	0.2489	0.2536	0.2583	0.2630	0.2677	0.2724	0.2771
1.60	1.61	1.62	1.63	1.64	1.65	1.66	1.67	1.68	1.69
0.2818	0.2865	0.2912	0.2959	0.3006	0.3053	0.3100	0.3147	0.3194	0.3241
1.70	1.71	1.72	1.73	1.74	1.75	1.76	1.77	1.78	1.79
0.3288	0.3335	0.3382	0.3429	0.3476	0.3523	0.3570	0.3617	0.3664	0.3711
1.80	1.81	1.82	1.83	1.84	1.85	1.86	1.87	1.88	1.89
0.3758	0.3805	0.3852	0.3899	0.3946	0.3993	0.4040	0.4087	0.4134	0.4181
1.90	1.91	1.92	1.93	1.94	1.95	1.96	1.97	1.98	1.99
0.4228	0.4275	0.4322	0.4369	0.4416	0.4463	0.4510	0.4557	0.4604	0.4651



數學考科解析

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
(4)	(1)	(3)	(5)	(4)	(1)	(2)(4)(5)	(1)(2)(3)	(1)(4)(5)	(4)(5)	(1)(3)	(1)(3)(4)	(3)(4)(5)	1	2
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
3	-	1	0	2	4	1	0	0	-	7	-	6	5	7
31	32	33	34											
1	2	5	7											

第壹部分

一、單選題

1. (4) 【難易度】★★☆

【出處】第一冊 第一章 數與式；第三章 指數、對數函數

【解析】∵ 滿足  $\frac{b}{a}=2^t$ ，且  $1 \leq ab \leq 32$  即為所求

$$\Rightarrow \frac{b}{a}=1, 2, 4, 8, 16, 32, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$$

∴ 共 11 個

故選(4)

2. (1) 【難易度】★★☆

【出處】第一冊 第一章 數與式

【解析】∵  $\sqrt{10}-\sqrt{84}=\sqrt{10-2\sqrt{21}}=\sqrt{(7+3)-2\sqrt{7 \times 3}}=\sqrt{7}-\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \sqrt{10}-\sqrt{84}+\sqrt{3}=\sqrt{7}$$

$$\Rightarrow a=3, b=7 \quad \therefore a+b=10$$

故選(1)

3. (3) 【難易度】★★☆

【出處】第一冊 第二章 多項式函數

【解析】∵ 原不等式  $=\frac{(x+2)^{2018}(x+2)(x+3)^{2020}}{(x-6)^{2020}(x-6)} \leq 0$

$$\therefore (x+2)^{2018} \geq 0, (x+3)^{2020} \geq 0, (x-6)^{2020} \geq 0$$

$$\therefore \text{原不等式相當於 } \frac{x+2}{x-6} \leq 0 \text{ 或 } x=-3$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-6) \leq 0, x \neq 6 \text{ 或 } x=-3$$

$$\therefore -2 \leq x < 6 \text{ 或 } x=-3$$

$$\Rightarrow x=-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 \text{ 共 9 個}$$

故選(3)

4. (5) 【難易度】★★☆

【出處】第一冊 第一章 數與式

【解析】∵  $a=\frac{1}{3}\pi+\frac{2}{3}\log 2000, b=\frac{3}{4}\pi+\frac{1}{4}\log 2000$

$$\therefore \frac{2}{3} > \frac{1}{4} \quad \therefore \text{由內分點公式知：} a > b$$

$$\therefore c=\frac{6+\pi}{6}-\frac{1}{6}\log 2000 \Rightarrow (\pi-c):(\log 2000-\pi)=1:6$$

∴ 由外分點公式知：  $c < b$

$$\therefore a > b > c$$

故選(5)

5. (4) 【難易度】★★☆

【出處】第一冊 第三章 指數、對數函數

【解析】∵  $f(x)=\frac{3-2^{x+3}}{3+2^x} \Rightarrow (3+2^x)f(x)=3-8 \cdot 2^x$

$$\therefore 2^x = \frac{3[1-f(x)]}{f(x)+8}$$

$$\therefore 2^x > 0 \Rightarrow \frac{3[1-f(x)]}{f(x)+8} > 0 \Rightarrow [f(x)+8][f(x)-1] < 0$$

$$\therefore -8 < f(x) < 1$$

$$\therefore 0 < \log_{2019} 108 < 1$$

故選(4)

6. (1) 【難易度】★★☆

【出處】第一冊 第三章 指數、對數函數

【解析】∵  $90=10 \log \frac{I}{I_0} \Rightarrow \log \frac{I}{I_0}=9$

$$\therefore 10 \log \frac{5I}{I_0}=10(\log 5 + \log \frac{I}{I_0})=10(\log \frac{10}{2} + \log \frac{I}{I_0})$$

$$=10(1 - \log 2 + 9)$$

$$\approx 10(1 - 0.3010 + 9) \approx 97$$

故選(1)

二、多選題

7. (2)(4)(5) 【難易度】★★☆

【出處】第一冊 第二章 多項式函數

【解析】(1)× ∵  $f(x)=(x^2+2x-8)q_1(x)+3x+1$   
 $= (x+4)(x-2)q_1(x)+3x+1$

$$\therefore f(0) \neq 3 \cdot 0 + 1 = 1$$

(2)○ ∵  $\begin{cases} f(x)=(x+4)(x-2)q_1(x)+3x+1 \\ g(x)=(x+4)(x-2)q_2(x)+2x-5 \end{cases}$

$$\therefore \text{餘式} = 2f(2) + 3g(2) = 2(6+1) + 3(4-5) = 11$$

(3)× 承(2)知：  $f(1) \neq 3+1=4, g(1) \neq 2-5=-3$

$$\therefore \text{餘式} \neq f(1) + 2g(1) = 4 + 2(-3) = -2$$

(4)○ 承(2)知：

$$f(x)+g(x)=(x+4)(x-2)[q_1(x)+q_2(x)]+5x-4$$

(5)○ 承(2)知：

$$x^2f(x)+xg(x)=(x+4)(x-2)[x^2q_1(x)+xq_2(x)]+x^2(3x+1)+x(2x-5)$$

$$\therefore x^2(3x+1)+x(2x-5)$$

$$=3x^3+3x^2-5x=(x^2+2x-8)(3x-3)+25x-24$$

$$\therefore \text{餘式} = 25x - 24$$

故選(2)(4)(5)

8. (1)(2)(3) 【難易度】★★☆

【出處】第一冊 第一章 數與式

【解析】(1)○ 若  $x > 5 \Rightarrow x+3+x-5=10 \Rightarrow 2x-2=10 \Rightarrow x=6$

若  $-3 < x \leq 5 \Rightarrow x+3-x+5=10 \Rightarrow 8=10$  (不合)

若  $x \leq -3 \Rightarrow -x-3-x+5=10 \Rightarrow -2x+2=10 \Rightarrow x=-4$   
 得  $x=-4, 6$

(2)○ 若  $x > \frac{5}{2} \Rightarrow 2x-5+x+2=4 \Rightarrow 3x-3=4 \Rightarrow x=\frac{7}{3}$  (不合)

$$\text{若 } -2 < x \leq \frac{5}{2} \Rightarrow -2x+5+x+2=4 \Rightarrow -x+7=4$$

$$\Rightarrow x=3 \text{ (不合)}$$

$$\text{若 } x \leq -2 \Rightarrow -2x+5-x-2=4 \Rightarrow -3x+3=4$$

$$\Rightarrow x=-\frac{1}{3} \text{ (不合)}$$

$$\text{得 } |2x-5|+|x+2|=4 \text{ 無解}$$

(3)○ 若  $x > 4 \Rightarrow x-4 \geq 3x-6 \Rightarrow 2 \geq 2x \Rightarrow 1 \geq x$  (不合)

$$\text{若 } 2 < x \leq 4 \Rightarrow -x+4 \geq 3x-6 \Rightarrow 10 \geq 4x \Rightarrow \frac{5}{2} \geq x$$

$$\Rightarrow 2 < x \leq \frac{5}{2}$$

$$\text{若 } x \leq 2 \Rightarrow -x+4 \geq -3x+6 \Rightarrow 2x \geq 2 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow 1 \leq x \leq 2$$

$$\text{得 } 1 \leq x \leq \frac{5}{2}$$

(4)× 若  $x > 3 \Rightarrow x+2+x-3 \leq 7 \Rightarrow 2x-1 \leq 7 \Rightarrow x \leq 4$

$$\Rightarrow 3 < x \leq 4$$

$$\text{若 } -2 < x \leq 3 \Rightarrow x+2-x+3 \leq 7 \Rightarrow 5 \leq 7 \text{ (恆成立)}$$

$$\text{若 } x \leq -2 \Rightarrow -x-2-x+3 \leq 7 \Rightarrow -2x+1 \leq 7 \Rightarrow x \geq -3$$

$$\Rightarrow -3 \leq x \leq -2$$

$$\text{得 } -3 \leq x \leq 4$$

(5)× ∵  $|3x-5| \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 0$

$$\text{若 } x \geq \frac{5}{3} \Rightarrow 3x-5 \leq 2x \Rightarrow x \leq 5 \quad \therefore \frac{5}{3} \leq x \leq 5$$

$$\text{若 } x \leq \frac{5}{3} \Rightarrow -(3x-5) \leq 2x \Rightarrow x \geq 1 \quad \therefore 1 \leq x \leq \frac{5}{3}$$

$$\therefore 1 \leq x \leq 5$$

故選(1)(2)(3)

9. (1)(4)(5)

【難易度】★★★

【出處】第一冊 第一章 數與式

- 【解析】(1)○  $\because (a-c) + (b-d)\sqrt{3} = 0 \therefore a=c, b=d$   
 (2)× 不一定，設  $r = \sqrt[3]{2}, s = -\sqrt[3]{2}$ ，則  $r+s=0$  為有理數，但  $rs = -\sqrt[3]{4}$  為無理數  
 (3)× 不一定，取  $b=0$ ，則是有理數  
 (4)○ 有理數與無理數皆具有稠密性  
 (5)○  $\because x^{2019}$  與  $x^{10}$  均為有理數，則  $x = \frac{(x^{10})^{202}}{x^{2019}}$  為有理數  
 故選(1)(4)(5)

10. (4)(5)

【難易度】★★★

【出處】第一冊 第二章 多項式函數

- 【解析】(1)× 必須  $a$  與  $b$  互質才會成立  
 (2)× 不一定，例如：  

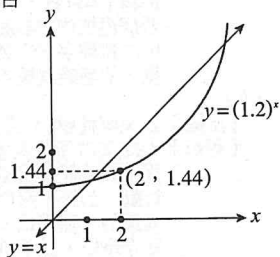
$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 6x - 4 = (2x-4)\left(\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1\right)$$
  
 其中商式  $\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$  不是整係數  
 (3)× 必須  $a$  與  $b$  為有理數，且  $\sqrt{b}$  為無理數才會成立  
 (4)○ 實係數方程式的共軛複數根成雙  
 (5)○ 根據實係數的共軛複數根成雙： $x=Z$  與  $x=\bar{Z}$  均為  $f(x)=0$  的根  
 $\therefore (x-Z)(x-\bar{Z})$  亦可整除  $f(x)$   
 故選(4)(5)

11. (1)(3)

【難易度】★★★

【出處】第一冊 第三章 指數、對數函數

- 【解析】(1)○  $\because y = \log_3 \frac{1}{x} = -\log_3 x$   
 $\therefore y = \log_3 \frac{1}{x}$  與  $y = \log_3 x$  的圖形對稱於  $x$  軸  
 (2)×  $\because y = |\log_a x| \geq 0 \therefore$  圖形非圖 1  
 (3)○  $\because y = \log 3x = \log x + \log 3, y = \log 5x = \log x + \log 5$   
 $\therefore$  圖形可上下平移而重合  
 (4)× 如右圖：  
 $y = (1.2)^x$  與  $y = x$  兩圖形會相交  
 $\therefore$  方程式有實根  
 (5)×  $\because$  底數在 0 與 1 之間的指數函數圖形，底數越小圖形越靠近  $y$  軸  
 $\therefore a > 0.6$   
 故選(1)(3)



12. (1)(3)(4)

【難易度】★★★

【出處】第一冊 第三章 指數、對數函數

- 【解析】(1)○  $\because \log\left(\frac{4}{5}\right)^{100} = \log\left(\frac{8}{10}\right)^{100} = 100(\log 8 - \log 10)$   
 $= 100(3\log 2 - 1)$   
 $\approx 100(3 \times 0.3010 - 1) = -9.7 = -10 + 0.3$   
 (2)× 承(1)知： $\log a$  的首數為 -10  
 (3)○ 承(1)知： $\log a$  的尾數為 0.3  
 (4)○ 承(1)知： $a$  自小數點後第 10 位開始出現不為 0 的數  
 $\therefore$  自小數點後算起連續出現 9 個 0  
 (5)×  $\because \log 1 < 0.3 < \log 2 \Rightarrow k$  的首位數字為 1  $\therefore 1 < k < 2$   
 故選(1)(3)(4)

13. (3)(4)(5)

【難易度】★★★

【出處】第一冊 第三章 指數、對數函數

- 【解析】(1)× 根據算幾不等式： $\frac{3^{2a} + 3^b}{2} > \sqrt{3^{2a} \cdot 3^b} = 3^{\frac{2a+b}{2}}$   
 $\therefore 3^{\frac{2a+b}{2}} < \frac{1}{2}(3^{2a} + 3^b)$   
 (2)×  $\because \begin{cases} \log 2^{100} = 100 \log 2 \approx 100 \times 0.3010 = 30.1 \\ \log 10^{31} = 31 \end{cases}$   
 (3)○  $\log_8 27 = \log_2 3^3 = \frac{3}{3} \log_2 3 = \log_2 3$   
 (4)○  $\because (\log_3 4)(\log_5 6) = \frac{\log 4}{\log 3} \cdot \frac{\log 6}{\log 5}$   
 $(\log_3 6)(\log_5 4) = \frac{\log 6}{\log 3} \cdot \frac{\log 4}{\log 5}$   
 $\therefore (\log_3 4)(\log_5 6) = (\log_3 6)(\log_5 4)$   
 (5)○  $\because \log_a (5^{\log_a b}) = (\log_a b)(\log_a 5)$   
 $\therefore \log_a (b^{\log_a 25}) = \log_a (b^{\frac{2}{\log_a 5}}) = \log_a (b^{\log_a 5})$   
 $= (\log_a 5)(\log_a b)$   
 $\therefore 5^{\log_a b} = b^{\log_a 25}$   
 故選(3)(4)(5)

第貳部分：選填題

A.  $\frac{1}{2}$

【難易度】★★★

【出處】第一冊 第一章 數與式；第三章 指數、對數函數

【解析】 $\because \frac{(0.125)^x + (0.5)^y}{2} \geq \sqrt{(0.125)^x \cdot (0.5)^y} = \sqrt{(0.5)^{3x} \cdot (0.5)^y}$   
 $= \sqrt{(0.5)^{3x+y}} = \sqrt{(0.5)^4} = 0.25$   
 $\Rightarrow (0.125)^x + (0.5)^y \geq 0.5 = \frac{1}{2}$   
 $\therefore$  最小值 =  $\frac{1}{2}$

B. 3

【難易度】★★★

【出處】第一冊 第三章 指數、對數函數

- 【解析】設一開始細菌數為  $N_0$   
 $\Rightarrow t$  日後的細菌數為  $x^t N_0$  或  $y^{\frac{t}{3}} N_0$  或  $(3x+2y)^{\frac{t}{3}} N_0$   
 $\because 5$  日後的細菌數為  $x^5 N_0 = y^{\frac{5}{3}} N_0 = (3x+2y)^{\frac{5}{3}} N_0$   
 設  $x^5 = y^{\frac{5}{3}} = (3x+2y)^{\frac{5}{3}} = r \Rightarrow x = r^{\frac{3}{5}}, y = r^{\frac{3}{5}}, 3x+2y = r$   
 $\Rightarrow 3r^{\frac{3}{5}} + 2r^{\frac{3}{5}} = r$   
 設  $r^{\frac{3}{5}} = k \Rightarrow 3k + 2k^3 = k^5 \Rightarrow k(k^4 - 2k^2 - 3) = 0$   
 $\Rightarrow k(k^2 - 3)(k^2 + 1) = 0 \Rightarrow k = \sqrt{3}$   
 $\therefore x = r^{\frac{3}{5}} = k = \sqrt{3}$   
 $\Rightarrow 1$  日後的細菌數為  $x^1 N_0 = \sqrt{3} N_0$   
 $\therefore$  每經過 1 日後會增加為原來的  $\sqrt{3}$  倍

C. -1024

【難易度】★★★

【出處】第一冊 第二章 多項式函數

- 【解析】令  $x=i$  代入  
 $\Rightarrow (i^2 + i + 2)^{10} = a_{20}i^{20} + a_{19}i^{19} + a_{18}i^{18} + \dots + a_2i^2 + a_1i + a_0$   
 $= a_{20} - a_{19}i - a_{18} + \dots - a_2 + a_1i + a_0$   
 $\because (i^2 + i + 2)^{10} = (-1 + i + 2)^{10} = (1 + i)^{10} = [(1 + i)^2]^5 = (2i)^5 = 32i$   
 $\therefore 32i = a_{20} - a_{19}i - a_{18} + \dots - a_2 + a_1i + a_0$   
 $\Rightarrow a_{20} - a_{18} + a_{16} - \dots + a_6 + a_4 - a_2 + a_0 = \text{實部} = 0$   
 $\therefore a_0 = \text{常數項} = (0 + 0 + 2)^{10} = 1024$   
 $\therefore a_{20} - a_{18} + a_{16} - \dots - a_6 + a_4 - a_2 = -a_0 = -1024$

D. 100

【難易度】☆☆☆

【出處】第一冊 第二章 多項式函數

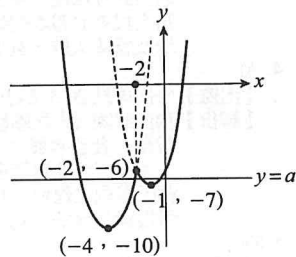
- 【解析】 $\because$  斜線所在的直線方程式為  $\frac{x}{80} + \frac{y}{60} = 1 \Rightarrow 3x + 4y = 240$   
 $\Rightarrow y = 60 - \frac{3}{4}x$   
 $\therefore \overline{AB} = -\frac{1}{16}x^2 + \frac{17}{4}x + 60 - (60 - \frac{3}{4}x) = -\frac{1}{16}x^2 + 5x$   
 $= -\frac{1}{16}(x - 40)^2 + 100$   
 $\therefore \overline{AB}$  的最大值 = 100

E. (-7, -6)

【難易度】★★★

【出處】第一冊 第二章 多項式函數

- 【解析】設  $\begin{cases} y = f(x) = x^2 + 5x - 1 \\ y = 3x + 6 \end{cases}$   
 (1)  $x \leq -2$  時，  
 $y = f(x) = x^2 + 5x + (3x + 6)$   
 $= (x + 4)^2 - 10$   
 (2)  $x \geq -2$  時，  
 $y = f(x) = x^2 + 5x - (3x + 6)$   
 $= (x + 1)^2 - 7$   
 由(1)、(2)之討論作得如右圖所示圖形  
 $\therefore -7 < a < -6$  時，有 4 個相異實數解 (4 個交點)  
 $\therefore (r, s) = (-7, -6)$



F. (5, 7)

【難易度】☆☆☆

【出處】第一冊 第二章 多項式函數

- 【解析】 $\because x^2 + 2x - 1 = 0$  的根為  $-1 \pm \sqrt{2}$   
 設  $f(x) = (x^2 + 2x - 1)q(x) + ax + b$   
 $\Rightarrow f(-1 + \sqrt{2}) = a(-1 + \sqrt{2}) + b = 2 + 5\sqrt{2}$   
 $\Rightarrow -a + b = 2, a = 5 \Rightarrow b = 7$   
 $\therefore (a, b) = (5, 7)$

G. 12.57

【難易度】★★★

【出處】第一冊 第三章 指數、對數函數

- 【解析】 $17.47 = 15.4 + 5 \log \frac{d_0}{d} = 15.4 + 5(\log d_0 - \log d)$   
 $\Rightarrow 2.07 \approx 5(\log 32.616 - \log d)$   
 $\Rightarrow 0.414 \approx 1.5134 - \log d$   
 $\Rightarrow \log d = 1.0994 = 1 + 0.0994$  (設  $\log x = 0.0994$ )  
 利用內插法列式  
 $\frac{x - 1.25}{1.26 - 1.25} = \frac{0.0994 - 0.0969}{0.1004 - 0.0969} \Rightarrow \frac{x - 1.25}{0.01} = \frac{0.0025}{0.0035}$   
 $\Rightarrow 0.25 = 35(x - 1.25) \Rightarrow x - 1.25 \approx 0.0071 \Rightarrow x \approx 1.2571$   
 代回可得  $\log d = 1 + 0.0994 \approx 1 + \log 1.2571$   
 $= \log 10 + \log 1.2571 = \log(10 \times 1.2571)$   
 $= \log 12.571 \approx \log 12.57$   
 $\therefore d \approx 12.57$