106學年度全國高級中學

學科能力測驗模擬考試

數學考科參考答案暨詳解

翰林出版事業股份有限公司

數學

99362414-26

數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
答案	(4)	(4)	(4)	(2)	(5)	(2)	(3)	(3)(5)	(1)(2)(3)
題號	10.	11.	12.	13.					
答案	(2)(5)	(2)(4)(5)	(1)(3)(4)	(1)(3)(4)					

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (4)

出處：第一冊第一章〈數與式〉

目標：絕對值函數的運算

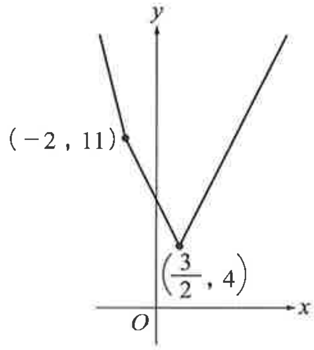
解析：① 當 $x \geq \frac{3}{2}$ 時：$f(x)=(x+2)+(2x-3)-x+2=2x+1$

② 當 $-2 \leq x < \frac{3}{2}$ 時：$f(x)=(x+2)-(2x-3)-x+2=-2x+7$

③ 當 $x<-2$ 時：$f(x)=-(x+2)-(2x-3)-x+2=-4x+3$

作圖如右，可得 $f(x)$ 的最小值為 4，即 $m=4$

故選(4)。



2. (4)

出處：第四冊第二章〈空間中的平面與直線〉

目標：空間中的平面方程式

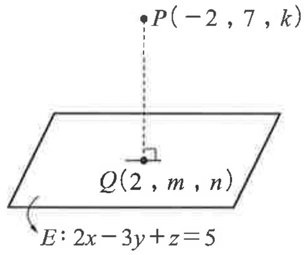
解析：$\overrightarrow{PQ}=(4, m-7, n-k)$ 與平面 E 的法向量 $\overrightarrow{n}=(2, -3, 1)$ 平行

故 $\frac{4}{2}=\frac{m-7}{-3}=\frac{n-k}{1}$ ……………(∗)

得 $m=1$，將 $Q(2, 1, n)$ 代入平面 E，可得 $n=4$，再代回(∗)可得 $k=2$

則 $k+m+n=7$

故選(4)。



3. (4)

出處：第二冊第三章〈機率〉、第三冊第一章〈三角〉

目標：古典機率的運算，餘弦定理的運用

解析：① 如圖(一)，正八邊形每一個內角為 $\frac{(8-2)\times 180^\circ}{8}=135^\circ$

$\overline{AC}^2=1^2+1^2-2\cdot 1\cdot 1\cdot \cos 135^\circ=2+\sqrt{2}$

$\therefore \overline{AC}=\sqrt{2+\sqrt{2}}<2$

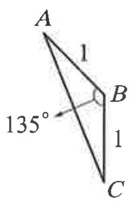
② 如圖(二)

$\triangle ABI$ 中，$\overline{BI}=\overline{AI}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

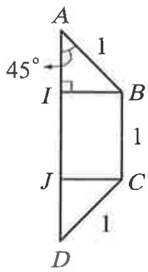
$\therefore \overline{AD}=\frac{\sqrt{2}}{2}+1+\frac{\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2}>2$

③ 如圖(三)

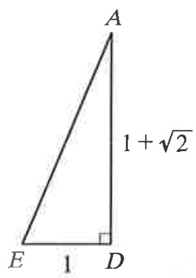
$\overline{AE}=\sqrt{1^2+(1+\sqrt{2})^2}=\sqrt{4+2\sqrt{2}}>2$



圖(一)

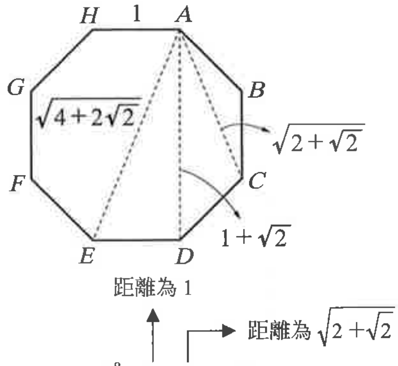


圖(二)



圖(三)

故可得如下圖



所求即為 $\dfrac{C_2^8-8-8}{C_2^8}=\dfrac{3}{7}$

故選(4)。

4. (2)

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：能列出及解出指數方程式

解析：$10\cdot(1.07)^t=10^5$

$\Rightarrow(1.07)^t=10^4\Rightarrow t\log 1.07=4\Rightarrow t\approx\dfrac{4}{0.0294}\approx 136.05$

$\therefore t$ 最接近 140

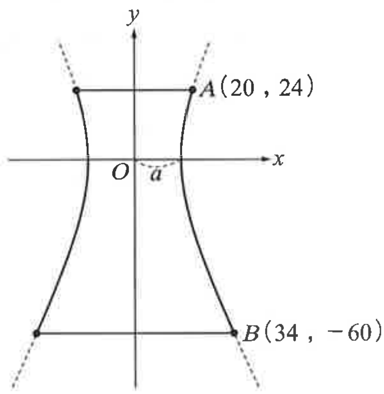
故選(2)。

5. (5)

出處：第四冊第四章〈二次曲線〉

目標：雙曲線的標準式

解析：建立坐標，以原點 O 為雙曲線中心



則 $A(20,24)$，$B(34,-60)$，代入雙曲線的標準式 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

得 $\begin{cases}\dfrac{20^2}{a^2}-\dfrac{24^2}{b^2}=1\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}\\ \dfrac{34^2}{a^2}-\dfrac{(-60)^2}{b^2}=1\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}\end{cases}$

①×25−②×4 得 $\dfrac{100^2-68^2}{a^2}=\dfrac{168\times 32}{a^2}=21$

故 $a^2=256$，得 $a=16$

則最細的腰部處，其圓周的直徑為 $2a=32$ 公尺，故選(5)。

6. (2)

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：對數的基本定義與運算

解析：$8+0.4771<8.5<\log a<8.6<8+0.6020$

$\Rightarrow \log 10^8+\log 3<\log a<\log 10^8+\log 4$

$\Rightarrow \log(3\cdot 10^8)<\log a<\log(4\cdot 10^8)$

$\Rightarrow 3\cdot 10^8<a<4\cdot 10^8$ …………①

$8.6<2\log b<8.8$

$\Rightarrow 8+0.4771<8.6<\log b^2<8.8<8+0.8451$

$\Rightarrow \log 10^8+\log 3<\log b^2<\log 10^8+\log 7$

$\Rightarrow \log(3\cdot 10^8)<\log b^2<\log(7\cdot 10^8)$

$\Rightarrow 3\cdot 10^8<b^2<7\cdot 10^8$ …………②

①+②得 $6\cdot 10^8<a+b^2<11\cdot 10^8$

$\Rightarrow \log(6\cdot 10^8)<\log(a+b^2)<\log(11\cdot 10^8)$

$\Rightarrow 8.7781<\log(a+b^2)<9.0414$

$\therefore \log(a+b^2)$ 最接近 9

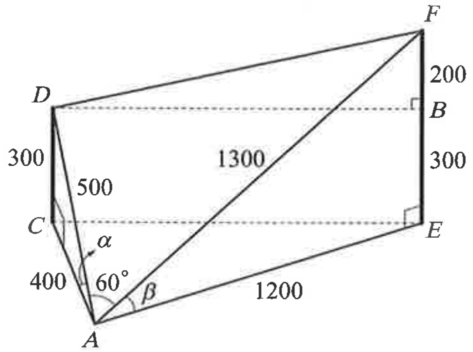
故選(2)。

7. (3)

出處：第三冊第一章〈三角〉

目標：立體三角測量與餘弦定理的運用

解析：如右圖，設甲大樓為 $\overline{CD}=300$，乙大樓為 $\overline{EF}=500$



$\because \tan\alpha=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$ $\quad\therefore \dfrac{3}{4}=\dfrac{300}{\overline{AC}}\Rightarrow \overline{AC}=400$

又 $\tan\beta=\dfrac{\overline{EF}}{\overline{AE}}$ $\quad\therefore \dfrac{5}{12}=\dfrac{500}{\overline{AE}}\Rightarrow \overline{AE}=1200$

故可得 $\overline{AD}=500$，$\overline{AF}=1300$

$\triangle ADF$ 中，由餘弦定理

$$\overline{DF}^2=\overline{AD}^2+\overline{AF}^2-2\cdot\overline{AD}\cdot\overline{AF}\cdot\cos 60^\circ$$
$$=500^2+1300^2-2\cdot 500\cdot 1300\cdot\frac{1}{2}$$
$$=1290000$$

故 $\overline{DF}=\sqrt{1290000}$

直角三角形 DBF 中

$$\overline{BD}=\sqrt{\overline{DF}^2-\overline{BF}^2}$$
$$=\sqrt{1290000-200^2}$$
$$=500\sqrt{5}\approx 1118\text{(公尺)}$$

而 $\overline{CE}=\overline{BD}$

故選(3)。

二、多選題

8. (3)(5)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉、第三冊第三章〈平面向量〉

目標：克拉瑪公式之應用，多項不等式

解析：$\begin{cases} mx+3y-2=0 \\ 3x+my+1=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} mx+3y=2 \\ 3x+my=-1 \end{cases}$

由克拉瑪公式可得

$$\Delta=\begin{vmatrix} m & 3 \\ 3 & m \end{vmatrix}=m^2-9$$

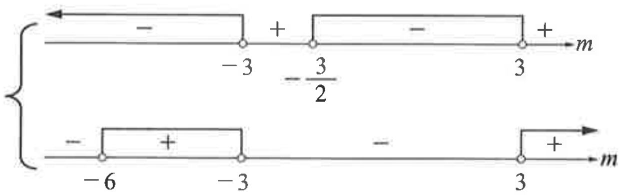
$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & m \end{vmatrix}=2m+3，\Delta_y=\begin{vmatrix} m & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-m-6$$

$$\therefore x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{2m+3}{m^2-9}，y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-m-6}{m^2-9}$$

$\because P$ 點在第三象限

$$\therefore\begin{cases} \dfrac{2m+3}{m^2-9}<0 \\ \dfrac{-m-6}{m^2-9}<0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} (2m+3)(m+3)(m-3)<0 \\ (m+6)(m+3)(m-3)>0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$



$\Rightarrow -6<m<-3$

$-2\pi\approx -6.28$

$$\log_2\frac{1}{10}=-\log_2 10=-\frac{\log 10}{\log 2}\approx -3.32$$

故選(3)(5)。

9. (1)(2)(3)

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：平面向量的表示法，向量的垂直

解析：設 $A(x,y)$ 為出發點，在 B 左轉 90°，C 為停止點

已知 $\overrightarrow{v}=(1,3)$，設 $\overrightarrow{u}$ 滿足 $\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v}$，且 $|\overrightarrow{u}|=3\cdot|\overrightarrow{v}|$

因為是左轉，所以取 $\overrightarrow{u}=(-9,3)$

若 $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{v}$，則 $\overrightarrow{BC}=k\overrightarrow{u}$，其中 $k>0$

則 $\overrightarrow{AC}=(-5-x,8-y)=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=k\overrightarrow{v}+k\overrightarrow{u}=(-8k,6k)$

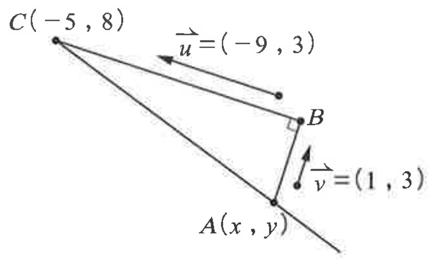
故 $A(x,y)=(-5+8k,8-6k)$

當 $k=1$ 時，出發點坐標為 $A(3,2)$

當 $k=\frac{1}{2}$ 時，出發點坐標為 $A(-1,5)$

當 $k=2$ 時，出發點坐標為 $A(11,-4)$

故選(1)(2)(3)。



10. (2)(5)

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：能運用標準差、相關係數及迴歸直線的概念

解析：$y=6q$，$x=10p$

因此，$r_{xy}=r_{pq}=0.75=\frac{3}{4}$，$\mu_y=6\cdot\mu_q=72$，$\mu_x=10\cdot\mu_p=60$，

$\sigma_y=6\cdot\sigma_q=24$，$\sigma_x=10\cdot\sigma_p=30$

$\therefore y$ 對 x 的迴歸直線方程式為

$$y-72=\frac{3}{4}\cdot\frac{24}{30}(x-60)$$

$$\Rightarrow y-72=\frac{3}{5}(x-60)\Rightarrow y=\frac{3}{5}x+36\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

$\therefore a=\frac{3}{5}$，$b=36$

(1)╳：$a=\frac{3}{5}$

(2)○

(3)╳：$(72,60)$ 代入$(*)$得 $60\neq\frac{3}{5}\cdot72+36$

(4)╳：$r_{pq}=r_{xy}=\frac{3}{4}$

(5)○：q 對 p 的迴歸直線斜率為 $r_{pq}\cdot\frac{\sigma_q}{\sigma_p}=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}=1>\frac{3}{5}=a$

故選(2)(5)。

11. (2)(4)(5)

出處：第四冊第二章〈空間中的平面與直線〉

目標：空間中坐標與直線參數式的應用

解析：如右圖，建立空間坐標

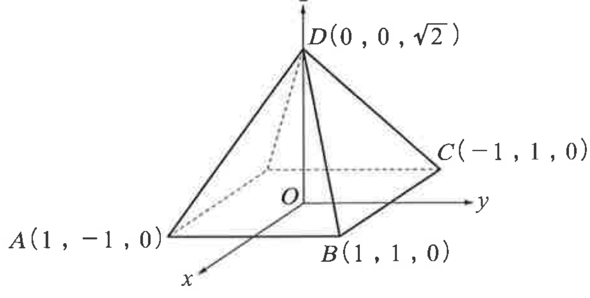
則 $A(1,-1,0)$，$B(1,1,0)$，$C(-1,1,0)$，

$D(0,0,\sqrt{2})$

可得線段參數式

$$\overline{AB}:\begin{cases}x=1\\y=-1+2t\\z=0\end{cases}\quad(0\le t\le 1)\text{ 及}$$

$$\overline{CD}:\begin{cases}x=-1+t\\y=1-t\\z=\sqrt{2}t\end{cases}\quad(0\le t\le 1)$$



則兩質點距離為

$$\sqrt{[1-(-1+t)]^2+[-1+2t-(1-t)]^2+(0-\sqrt{2}t)^2}=\sqrt{12t^2-16t+8}=\sqrt{12\left(t-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{8}{3}}$$

因此，當 $t=\frac{2}{3}$ 時兩質點距離最小，最小距離為 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

當 $t=0$ 時兩質點距離最大，最大距離為 $2\sqrt{2}$

故選(2)(4)(5)。

12. (1)(3)(4)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：牛頓一次因式檢驗法、勘根定理的運用與解高次不等式

解析：(1) ○：

x	$x<-1$	$-1<x<4$	$x>4$
$(x+1)(x-4)(x^2+1)$	$+$	$-$	$+$

故 $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)<0$

(2) ╳：$f(x)=2x+2 \Rightarrow (x+1)[(x-4)(x^2+1)-2]=0 \Rightarrow (x+1)(x^3-4x^2+x-6)=0$

當 $x<0$ 時，$x^3-4x^2+x-6<0$，故 $x^3-4x^2+x-6=0$ 沒有負根

根據牛頓一次因式檢驗法

$x=1$，2，3，6 分別代入 x^3-4x^2+x-6，發現均不為 0

所以 $f(x)=2x+2$ 只有 1 個有理根 -1

(3) ○：$f(x)=-2(x+1)(x^2-2x+3)$

$\Rightarrow (x+1)[(x-4)(x^2+1)+2(x^2-2x+3)]=0$

$\Rightarrow (x+1)(x^3-2x^2-3x+2)=0$

x	-2	-1	0	1	2	3
x^3-2x^2-3x+2	-8	2	2	-2	-4	2

利用勘根定理，$x^3-2x^2-3x+2=0$ 在 -2 ～ -1，0 ～ 1，2 ～ 3 間各恰有一實根

所以 $f(x)=-2(x+1)(x^2-2x+3)$ 恰有 4 實根

(4) ○：$f(x^2)=0 \Rightarrow (x^2+1)(x^2-4)(x^4+1)=0$

所以 $f(x^2)=0$ 有 2 實根 ± 2 與 6 虛根 $\Rightarrow f(x^2)=0$ 恰有 2 個有理根

(5) ╳：$f(x)<2x(x+1)(x-4) \Rightarrow (x+1)(x-4)(x^2-2x+1)<0 \Rightarrow (x+1)(x-4)(x-1)^2<0$

所以 $f(x)<2x(x+1)(x-4)$ 的解為 $-1<x<4$，但 $x\neq 1$

故選(1)(3)(4)。

13. (1)(3)(4)

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉、第二冊第三章〈機率〉

目標：排列的運用及古典機率的運算

解析：令 $P(A)$、$P(B)$、$P(C)$、$P(D)$、$P(E)$ 分別代表 A、B、C、D、E 成為「大金主」的機率

(1) ○：第三個上臺者可成為「大金主」

則 $P(A)=P(B)=P(C)=P(D)=P(E)=\frac{4!}{5!}=\frac{1}{5}$

(2) ╳：A 是第二、三或四個上臺均可成為「大金主」

所以 $P(A)=\frac{3\times 4!}{5!}=\frac{3}{5}=60\%$

(3) ○：① 若 A 在第二個上臺，則前一位的金幣數大於 10 且小於 30，故 A 可成為「大金主」；

② 若 A 在第三個上臺，則前兩位的金幣數和大於 20 且小於 40，故 A 可成為「大金主」；

③ 若 A 在第四個上臺，則前三位的金幣數和大於 30 且小於 50，故 A 可成為「大金主」；

所以 A 是第二、三或四個上臺均可成為「大金主」，則 $P(A)=\frac{3\times 4!}{5!}=\frac{3}{5}=60\%$

(4) ○：D 在第三個上臺，且前兩個為 B、C，則 D 可成為「大金主」，所以 $P(D)=\frac{2!\times 2!}{5!}=\frac{1}{30}$

E 在第三個上臺，且前兩個為 B、C，則 E 可成為「大金主」，所以 $P(E)=\frac{2!\times 2!}{5!}=\frac{1}{30}$

所以 D 與 E 成為「大金主」的機率相同

(5)╳：① D 在第三個上臺，且前兩個為 B、C；

② D 在第三個上臺，且前兩個為 A、E；

③ D 在第四個上臺，且前三個為 B、C、E，

則 D 可成為「大金主」，所以 $P(D)=\dfrac{2!\times2!}{5!}+\dfrac{2!\times2!}{5!}+\dfrac{3!}{5!}=\dfrac{7}{60}$

又 E 在第三個上臺，且前兩個為 A、D，則 E 可成為「大金主」，所以 $P(E)=\dfrac{2!\times2!}{5!}=\dfrac{1}{30}$

故選(1)(3)(4)。

第貳部分：選填題

A. $(8\,,-3)$

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：能解兩圓的交點坐標

解析：假設汽車的坐標為 $P(x\,,y)$，則汽車位在以 A、B 為圓心，半徑分別為 $\sqrt{13}$ 與 10 的圓上

$$\begin{cases}(x-6)^2+y^2=13\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①\\ x^2+(y-3)^2=100\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②\end{cases}$$

①－②整理得 $y=2x-19$，代回①得 $5x^2-88x+384=0$，解得 $x=8$ 或 $\dfrac{48}{5}$ (不合)

故 P 坐標為$(8\,,-3)$。

B. $\dfrac{343}{64}$

出處：第二冊第一章〈數列與級數〉

目標：能列出等比數列

解析：$a_1=32\times32\times6$

$a_2=16\times16\times6\times7$

$a_3=8\times8\times6\times7\times7$

$a_4=4\times4\times6\times7\times7\times7$

$a_5=2\times2\times6\times7\times7\times7\times7$

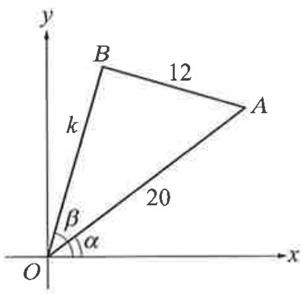
所以 $\dfrac{a_5}{a_2}=\dfrac{2\times2\times6\times7\times7\times7\times7}{16\times16\times6\times7}=\dfrac{343}{64}$。

C. 16

出處：第三冊第一章〈三角〉

目標：斜率與斜角，和角公式，餘弦定理

解析：作圖如右



依題意可知 $\tan\alpha=\dfrac{3}{4}$，可得 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$

而 $\tan\beta=\dfrac{24}{7}$，可得 $\sin\beta=\dfrac{24}{25}$，$\cos\beta=\dfrac{7}{25}$

利用差角公式

$\cos\angle AOB=\cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cdot\cos\alpha+\sin\beta\cdot\sin\alpha$

$\quad=\dfrac{7}{25}\cdot\dfrac{4}{5}+\dfrac{24}{25}\cdot\dfrac{3}{5}=\dfrac{4}{5}$

而△AOB 中，利用餘弦定理

$12^2=k^2+20^2-2\cdot k\cdot 20\cdot\cos\angle AOB$

整理得 $k^2-32k+256=0$，故 $k=16$。

〈另解〉

$$\tan\angle AOB=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{\frac{24}{7}-\frac{3}{4}}{1+\frac{24}{7}\times\frac{3}{4}}=\frac{3}{4}$$

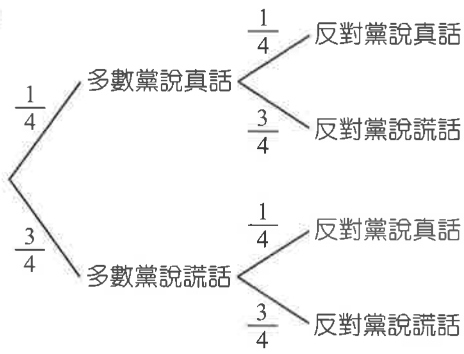
可得 $\cos\angle AOB=\dfrac{4}{5}$。

D. $\frac{1}{10}$

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：能計算條件機率及貝氏定理

解析：



所求為 $\dfrac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}}=\dfrac{1}{10}$。

E. 31

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：能知道實係數方程式虛根成對出現，並能運用餘式定理

解析：令 $f(x)-3=(x-(2+i))(x-(2-i))(x-1)(ax+b)\Rightarrow f(x)-3=(x^2-4x+5)(x-1)(ax+b)$

$x=-1$ 代入 $f(x)-3=(x^2-4x+5)(x-1)(ax+b)\Rightarrow 20=10(-2)(-a+b)\Rightarrow -a+b=-1$ ……… ①

$x=2$ 代入 $f(x)-3=(x^2-4x+5)(x-1)(ax+b)\Rightarrow 5=(1)(1)(2a+b)\Rightarrow 2a+b=5$ ……………………… ②

解①、②得 $a=2$，$b=1$

所以 $f(x)=(x^2-4x+5)(x-1)(2x+1)+3$

$f(3)=(3^2-4\cdot 3+5)(3-1)(2\cdot 3+1)+3=31$

故 $f(x)$ 除以 $(x-3)$ 的餘式為 31。

F. 700

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：線性方程組與矩陣列運算的應用

解析：假設洋芋片、軟糖、巧克力的單價分別為 x、y、z 元，且甲超商當天的銷售額為 k 元

則 $\begin{cases}x+y+2z=k\\2x+3y+5z=2k+35\\4x+2y+6z=3k+35\end{cases}$ 有解，$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&k\\2&3&5&2k+35\\4&2&6&3k+35\end{array}\right]$ 經列運算，得 $\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&k\\0&1&1&35\\0&0&0&-k+105\end{array}\right]$

則 $-k+105=0$，得 $k=105$，故總銷售額為 $6k+70=700$ 元。

G. 24

出處：第三冊第三章〈平面向量〉、第四冊第四章〈二次曲線〉

目標：橢圓的定義與軌跡，平面向量的面積公式與二階行列式

解析：如右圖所示，A 點是在圓 C 內且與原點 O 距離為 6 的點

設 T 為兩圓切點，依題意可知 $\overline{BO}+\overline{BA}=\overline{BO}+\overline{BT}=10$

故 B 點的軌跡為一橢圓，其焦點為 O、A 兩點

且 $2a=10$，$2c=\overline{OA}=6$，而 $b=\sqrt{a^2-c^2}=4$

而行列式 $\begin{vmatrix}p&q\\r&s\end{vmatrix}$ 的絕對值恰為 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 所張成之平行四邊形面積

當 B 在橢圓的短軸頂點時，有最大面積 $2c\times b=6\times 4=24$

故最大值為 24。