

106 學年度全國高級中學 學科能力測驗模擬考試

數學考科

—作答注意事項—

考試範圍：第一～四冊全

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 7 題，多選題 6 題，選填題第 A 至 G 題共 7 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記，請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\textcircled{3}$ 與第 19 列的 $\textcircled{8}$ 畫記，如：

18	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-	<input type="checkbox"/>	±
19	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-	<input type="checkbox"/>	±

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20} \textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\textcircled{-}$ 與第 21 列的 $\textcircled{7}$ 畫記，如：

20	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-	<input type="checkbox"/>	±
21	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-	<input type="checkbox"/>	±

※試題後附有參考公式及可能用到的數值

祝考試順利



版權所有 · 翻印必究

第壹部分：選擇題（占 65 分）

一、單選題（占 35 分）

說明：第 1 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 函數 $f(x) = |x+2| + |2x-3| - x+2$ 有最小值為 m ，則 m 的值為何？

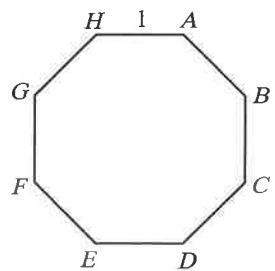
- (1) 7
- (2) 6
- (3) 5
- (4) 4
- (5) 3

2. 空間坐標中，若點 $P(-2, 7, k)$ 在平面 $E: 2x - 3y + z = 5$ 上的投影點為 $Q(2, m, n)$ ，則 $k+m+n = ?$

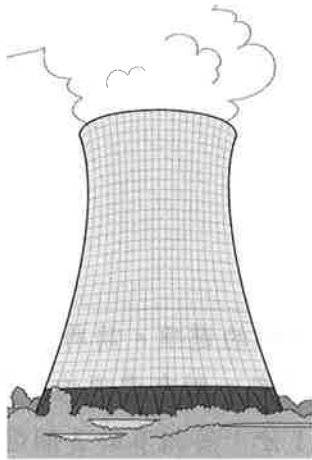
- (1) 2
- (2) 3
- (3) 5
- (4) 7
- (5) 11

3. 從邊長為 1 的正八邊形的 8 個頂點中，隨機選取 2 個相異頂點。若每個頂點被選取的機率相同，則選到 2 個頂點間的距離大於 2 的機率為何？

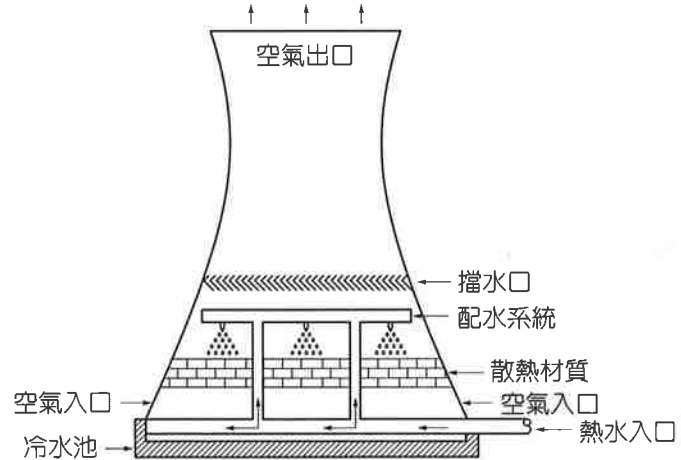
- (1) $\frac{1}{4}$
- (2) $\frac{2}{3}$
- (3) $\frac{2}{5}$
- (4) $\frac{3}{7}$
- (5) $\frac{3}{8}$



4. 已知 A 細菌在養分夠、又沒有敵人的情況下，以每小時增加 7% 的速率繁殖。假設在密閉的實驗室中，一開始有 A 細菌 10 萬個，如果依每小時增加 7% 的速率持續繁殖， t 小時後 A 細菌的數量增加為 10^5 萬個，則 t 最接近下列哪個選項？（已知 $\log_{10} 1.07 \approx 0.0294$ ）
- (1) 100
 - (2) 140
 - (3) 180
 - (4) 220
 - (5) 260
5. 某核電站的冷卻塔為雙曲面型，如圖(一)所示，其側面是由一雙曲線繞行共軛軸所掃出的曲面，平行地面的平面與冷卻塔的截面均為圓形。圖(二)是包含共軛軸且垂直地面的平面與冷卻塔所截的剖面圖。雙曲面型的設計有助於提高冷卻的效率，底部有最大的圓周，可以最大限度地進入冷空氣，冷空氣到達最細部位時接觸熱水，由於管徑變小，冷空氣流速加快且體積受到壓縮，可以最大限度地吸收熱水的熱量，使熱水冷卻。到了最上部，管徑再次擴大，已攜帶了大量熱量的空氣由於速度減慢，壓力減小，會將所含的熱量釋放出來形成白色的水氣。



圖(一)



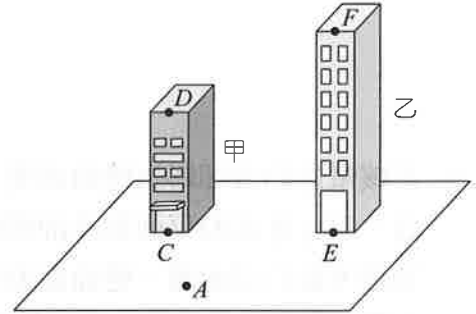
圖(二)

已知此冷卻塔高度有 84 公尺，底部最大圓周的直徑為 68 公尺，頂部的圓周直徑為 40 公尺，若最細的腰部離底面有 60 公尺，則最細的腰部處，其圓周的直徑為下列哪一個選項？

- (1) 16 公尺
- (2) 20 公尺
- (3) 24 公尺
- (4) 28 公尺
- (5) 32 公尺

6. 設 a, b 為正數，若 $8.5 < \log a < 8.6$ ， $4.3 < \log b < 4.4$ ，則 $\log(a+b^2)$ 最接近下列哪一個數字？
- (1) 10
 - (2) 9
 - (3) 8
 - (4) 7
 - (5) 6

7. 小新到某著名城市旅遊，從旅遊雜誌得知該市平地上有甲、乙兩座摩天大樓，其中甲大樓高 300 公尺，大樓的樓底與樓頂分別為 C 與 D 。乙大樓比甲大樓高 200 公尺，大樓的樓底與樓頂分別為 E 與 F ，如右圖所示。小新自地面 A 處觀測甲、乙兩大樓的樓頂 D 與 F ，測得仰角分別是 α 與 β ，其中 $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ ，而 $\tan \beta = \frac{5}{12}$ ，且



仰角分別是 α 與 β ，其中 $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ ，而 $\tan \beta = \frac{5}{12}$ ，且

小新望向兩大樓樓頂 D 與 F 的視線所夾角度為 60° 。若 A, C, E 三點不共線，則兩大樓的距離 \overline{CE} 比較接近下列哪一個選項？

- (1) 1058 公尺
- (2) 1085 公尺
- (3) 1118 公尺
- (4) 1135 公尺
- (5) 1158 公尺

二、多選題（占 30 分）

說明：第 8 題至第 13 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

8. 坐標平面上兩相異直線 $mx+3y-2=0$ 與 $3x+my+1=0$ 相交於一點 P ，已知 P 落在第三象限，則下列哪些選項可能是實數 m 的值？
- (1) 4
 - (2) -2
 - (3) -5
 - (4) -2π
 - (5) $\log_2 \frac{1}{10}$

9. 一隻螞蟻在有標示平面坐標的方格紙上等速行走，自出發點開始，先依 $\vec{v} = (1, 3)$ 的方向直線行進。行走 1 秒後，向左轉 90° 並繼續直線前進 3 秒後才停止，已知停止點的坐標為 $(-5, 8)$ ，則下列哪些選項可能是螞蟻的出發點坐標？

- (1) $(3, 2)$
- (2) $(-1, 5)$
- (3) $(11, -4)$
- (4) $(-13, 14)$
- (5) $(1, 0)$

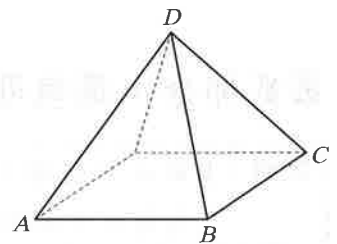
10. 調查高三甲班 50 位同學第一次段考英文、數學兩科答對題數，計算數學答對題數 (p)、英文答對題數 (q) 的算術平均數及標準差如下表：

	平均數	標準差
數學答對題數 (p)	6	3
英文答對題數 (q)	12	4

已知英文與數學答對題數的相關係數為 0.75，若數學每答對一題給 10 分，英文每答對一題給 6 分，答錯皆不倒扣。利用最小平方方法求得英文分數 (y) 對數學分數 (x) 的迴歸直線方程式為 $y = ax + b$ ，則下列哪些選項是正確的？

- (1) $a = \frac{3}{4}$
- (2) $b = 36$
- (3) 直線 $y = ax + b$ 通過點 $(72, 60)$
- (4) 英文與數學答對題數的相關係數小於英文與數學分數的相關係數
- (5) 英文答對題數 q 對數學答對題數 p 的迴歸直線斜率大於 a

11. 如右圖所示，有一正四角錐，其底面為正方形，四個側面為正三角形，已知其邊長均為 2 單位。若有兩質點分別自頂點 A 、 C 同時出發，各自以等速直線運動分別向頂點 B 、 D 前進，且在 1 秒後分別同時到達 B 、 D 。請選出這段時間兩質點距離關係的正確選項。



- (1) 兩質點的距離越來越小
- (2) 在出發後 $\frac{2}{3}$ 秒時兩質點的距離最小
- (3) 兩質點的距離最小為 2 單位
- (4) 兩質點的距離最小為 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 單位
- (5) 兩質點的距離最大為 $2\sqrt{2}$ 單位

12. 設 $f(x) = (x+1)(x-4)(x^2+1)$ 為一個四次多項式，請選出正確的選項。

(1) $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) < 0$

(2) 方程式 $f(x) = 2x+2$ 恰有 2 個有理根

(3) 方程式 $f(x) = -2(x+1)(x^2-2x+3)$ 恰有 4 個實根

(4) 方程式 $f(x^2) = 0$ 恰有 2 個有理根

(5) 不等式 $f(x) < 2x(x+1)(x-4)$ 的解為 $-1 < x < 4$

13. 綜藝節目「誰是大金主」最後一關的遊戲規則如下： A 、 B 、 C 、 D 、 E 五位參賽者以公平的方式抽籤決定上臺順序，將自己在前面關卡中所獲得的金幣全數投入臺中央的金撲滿中。已知 A 、 B 、 C 、 D 、 E 在前面關卡中所獲得的金幣總數為 100 個。在先後將手中硬幣投入金撲滿的過程中，先讓金撲滿內的金幣數大於 50 個的人，即是「大金主」，可以獲得金撲滿內的所有金幣。則下列哪些選項的敘述是正確的？

(1) 若 A 、 B 、 C 、 D 、 E 手中的金幣數均為 20 個，則每個人成為「大金主」的機率相同

(2) 若 A 、 B 、 C 、 D 、 E 手中的金幣數分別為 36、16、16、16、16 個，則 A 成為「大金主」的機率為 80 %

(3) 若 A 有 40 個金幣，且其他四人手中的金幣數均大於 10 個，則 A 成為「大金主」的機率為 60 %

(4) 若 A 、 B 、 C 、 D 、 E 手中的金幣數分別為 35、28、22、14、1 個，則 D 與 E 成為「大金主」的機率相同

(5) 若 A 、 B 、 C 、 D 、 E 手中的金幣數分別為 36、28、21、14、1 個，則 D 與 E 成為「大金主」的機率相同

第貳部分：選填題（占 35 分）

說明：1. 第 A 至 G 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(14-33)。

2. 每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 為了打造自動駕駛汽車，工程師作了以下實驗，先在平面坐標 $A(6, 0)$ 與 $B(0, 3)$ 的位置，各埋設一個發報器，並在汽車內裝置相對應的接收器。當汽車行駛至附近時，接收到 A 與 B 兩處發報器與汽車的距離分別為 $\sqrt{13}$ 與 10 個單位，且汽車的 x 坐標小於 9，則此時汽車的坐標位置應為 (14), (15)(16)。

B. 已知一個邊長為 32 公分的正立方體，其表面積為 a_1 。第一步驟，將其等分成 8 個小正立方體（每邊長 16 公分），拿掉一個小正立方體後，剩下的 7 個小正立方體的個別表面積的總和為 a_2 。第二步驟，將剩下的 7 個小正立方體每個都再等分成 8 個更小的正立方體（每邊長 8 公分）後，將每個小正立方體切出的 8 個更小正立方體都各拿掉一個，剩下的所有更小正立方體的個別表面積的總和為 a_3 。依照這樣的規律繼續分割，則 $\frac{a_3}{a_2} = \frac{\textcircled{17}\textcircled{18}\textcircled{19}}{\textcircled{20}\textcircled{21}}$ 。

(化為最簡分數)

C. 甲、乙兩人在坐標平面上行走，兩人皆由原點 O 出發，甲沿著斜率為 $\frac{3}{4}$ 的直線往第一象限行走 20 單位到達 A 點，而乙則沿著斜率為 $\frac{24}{7}$ 的直線往第一象限行走 k 單位到達 B 點，已知此時甲、乙兩人的距離 \overline{AB} 為 12 單位。則 k 之值為 ②②③。

D. 想像我們與外太空的某個奇特文明取得聯繫，經過長時間監視他們的政治和商業活動後，發現他們的人民有 $\frac{1}{4}$ 的時間說真話， $\frac{3}{4}$ 的時間說謊話。我們前往當地參訪時，受到多數黨領袖的歡迎，發表一份正式聲明釋出與地球建交的善意。此時，反對黨領袖也發表談話，表示多數黨領袖的聲明是真的。則在反對黨領袖說出這份聲明是真的情況下，這份與地球建交的聲明是真話的機率為 $\frac{\textcircled{24}}{\textcircled{25}\textcircled{26}}$ 。(化為最簡分數)

E. 設 $f(x)$ 為實係數四次多項式，且 $f(x)$ 滿足 $f(2+i)=3$ ， $f(-1)=23$ ， $f(1)=3$ ， $f(2)=8$ 。則 $f(x)$ 除以 $(x-3)$ 的餘式為 ②⑦②⑧。

F. 愛竹食品公司在甲、乙、丙三家超商，販售洋芋片、軟糖、巧克力三種產品。某天各產品的銷售狀況如下：(相同商品在各家超商販售的單價一致)

	洋芋片	軟糖	巧克力
甲超商	1	1	2
乙超商	2	3	5
丙超商	4	2	6

單位：包

已知當天這三種產品的銷售金額，乙超商的銷售金額是甲超商的兩倍還多 35 元，而丙超商的銷售金額是甲、乙兩超商的總和。則該天愛竹食品公司在這三家超商的總銷售額為 ②⑨③⑩⑪ 元。

G. 坐標平面上，圓 C 是以原點 O 為圓心且半徑為 10 的圓，點 $A(p, q)$ 滿足 $p^2+q^2=36$ 。若有另一圓通過 A 點且與圓 C 相切，且其圓心為 $B(r, s)$ ，則行列式 $\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix}$ 取絕對值後的最大值為 ③②③③。

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和 $S_n = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為 a ，公比為 r ($r \neq 1$) 的等比數列前 n 項之和 $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 三角函數的和角公式與差角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

3. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑)

$\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

4. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，算術平均數 $\mu_x = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

$$\text{標準差 } \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\mu_x^2 \right)}$$

5. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，相關係數 $r_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)}{n\sigma_x\sigma_y}$

迴歸直線(最適合直線)方程式為 $y - \mu_y = r_{XY} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \mu_x)$

6. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\sqrt{7} \approx 2.646$

7. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ， $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ ， $\log_{10} 7 \approx 0.8451$ ，
 $\log_{10} 11 \approx 1.0414$