南區高級中學

106 學年度第一學期學科能力測驗聯合模擬考試

考試日期：106 年 12 月 12~13 日

數學考科

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 7 題，多選題 6 題，選填題第 A 至 G 題共 7 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\dfrac{⑱}{⑲}$，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的$\overset{3}{\square}$與第 19 列的$\overset{8}{\square}$畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
18	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□
19	□	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□

例：若第 C 題的答案格式是 $\dfrac{⑳㉑}{50}$，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的$\overset{-}{\square}$與第 21 列的$\overset{7}{\square}$畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
20	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	□
21	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□	□

※試題後附有參考公式及可能用到的數值

第壹部分：選擇題（占 65 分）

一、單選題（占 35 分）

說明：第 1 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 有一數列 $a_1+1\times3$，$a_2+2\times4$，$a_3+3\times5$，…，$a_k+k\times(k+2)$，…，$a_{10}+10\times12$ 總和為 1260，則 $\sum_{k=1}^{10}a_k$ 之值為？

(1) 495　(2) 675　(3) 765　(4) 820　(5) 985

2. 若 m、n 是整數，方程式 $3x^3+mx^2+nx+2=0$ 的所有根都是有理根，試問序對 (m,n) 有幾組解？

(1) 4　(2) 5　(3) 6　(4) 7　(5) 8

3. 設 2 階方陣 A 的乘法反方陣存在，若 A 滿足 $A^2+2A-3I=O$，I 為 2 階單位方陣 $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，$O$ 為 2 階零方陣 $\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$；則 A 的反方陣 A^{-1} 可表示為？

(1) $\frac{1}{3}A+\frac{2}{3}$　(2) $\frac{1}{3}A-\frac{2}{3}$　(3) $\frac{2}{3}A+\frac{1}{3}I$　(4) $\frac{1}{3}A-\frac{2}{3}I$　(5) $\frac{1}{3}A+\frac{2}{3}I$

4. 有一顆骰子六個面上的點數分別為 1, 1, 2, 2, 2, 3，且投擲這顆骰子每面出現的機會均等。連續擲此骰子兩次，在兩次點數和為 4 的情況下，求第 1 次擲出的點數為 2 的機率為？

(1) $\frac{19}{36}$　(2) $\frac{9}{13}$　(3) $\frac{6}{13}$　(4) $\frac{1}{2}$　(5) $\frac{1}{4}$

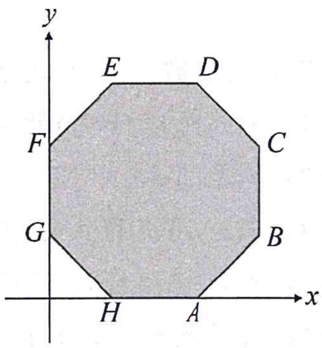
5. 現有 A、B 兩組數據，只知下表中的資訊。

	內含資料數	最小數據	最大數據
A組	10 筆	15	25
B組	20 筆	35	45

若 A 組標準差的最大可能值爲 σ_A，最小可能值爲 σ_a；
而 B 組標準差的最大可能值爲 σ_B，最小可能值爲 σ_b，則下列何者正確？

(1) $\sigma_A=\sigma_B$
(2) $\sigma_A<\sigma_B$
(3) $\sigma_a=\sigma_b$
(4) $\sigma_a<\sigma_b$
(5) 條件不足，無法判斷

6. 一線性規劃問題的可行解區域爲坐標平面上的正八邊形 $ABCDEFGH$ 及其內部，如圖(一)。已知目標函數 $ax+by+3$ (其中 a, b 爲實數)的最大值只發生在 B 點。請問當目標函數改爲 $3-bx+ay$ 時，最大值會發生在下列哪一點？



圖(一)

(1) C
(2) D
(3) E
(4) G
(5) H

7. 在 $\triangle ABC$ 中，$\cos A=-\frac{3}{5}$，$\overline{AB}=6$，$\overline{AC}=8$，$\overline{AD}$ 交 $\overline{BC}$ 於 D 點，$\tan\angle BAD=\frac{3}{4}$，求 $\overline{AD}=$

(1) $\frac{93}{29}$
(2) $\frac{94}{29}$
(3) $\frac{95}{29}$
(4) $\frac{96}{29}$
(5) $\frac{97}{29}$

二、多選題（占 30 分）

說明：第 8 題至第 13 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

8. 下列敘述何者永遠正確？
   (1) 若 a，b 爲實數且 $|a-b|<|a|+|b|$，則 $ab<0$
   (2) 存在 x 爲實數使得 $|x+5|+|x-3|=7$
   (3) x 爲實數，若 $(x-1)\,|x-2|+|x+1|=6$，則 $x=3$
   (4) 設 x 爲實數，$f(x)=|x-1|+|x-2|+\cdots\cdots+|x-100|$。當 $50\le x\le 51$ 時，$f(x)$ 有最小值 2500
   (5) 若 x,y,z 均爲正實數，且 $x+2\sqrt{y}=y+2\sqrt{z}$，則 $x=y=z$

9. 若 a 是實數，多項式 $f(x)=x(x-2)(x-4)+ax(x-2)-8x+6$，且 $f(4)>0$，則下列何者正確？
   (1) $f(x)$ 除以 $(x-2)$ 餘 -12
   (2) $f(2+i)\neq 0$
   (3) $f(x)=0$ 沒有大於 4 的根
   (4) $f(x)=0$ 可能沒有負根
   (5) 函數圖形 $y=f(x)$ 與 $y=-x^2$ 必有交點

10. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB}=8$、$\overline{BC}=4$。請選出正確的選項。
   (1) 當 $\angle A=1$(弧度)時，可以確定 $\triangle ABC$ 的面積
   (2) 當 $\tan A=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ 時，可以確定 $\triangle ABC$ 的面積
   (3) 當 $\angle A=20°$ 時，可以確定 $\angle B$ 的餘弦值
   (4) 當 $\angle A=20°$ 時，可以確定 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑
   (5) 當 $\angle A=30°$ 時，可以確定 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑

11. 空間中三直線 $L_1:\frac{x-6}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{2}$，$L_2:\frac{x-3}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{1}$，$L_3:\frac{x}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+4}{1}$。若平面 E 為包含 L_1 與 L_3 的平面，平面 F 為包含 L_2 且與 L_1 平行的平面，則下列敘述何者正確？

(1) L_1 與 L_2 為兩相交直線
(2) L_1 與 L_3 的交點為 $(2,1,-3)$
(3) L_2 與 L_3 平行
(4) 向量 $(1,0,2)$ 為平面 E 的一個法向量
(5) 平面 E 與平面 F 平行

12. 關於函數 $f_a(x)=|\log_a x^2|-2017$（其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$）的敘述，下列哪些是正確的？

(1) $y=f_{0.5}(x)$ 的圖形與 $y=f_2(x)$ 的圖形重合
(2) $y=f_2(x)$ 的圖形與 $y=f_3(x)$ 的圖形恰有兩交點
(3) $\frac{f_2(\sqrt{5})+f_2(3\sqrt{5})}{2}>f_2(2\sqrt{5})$
(4) 若 $f_{2017}(x)=0$ 的所有實根分別為 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，則 $\sum_{k=1}^{n}x_k>0$
(5) 若 $f_{2017}(x)=0$ 的所有實根分別為 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，則 $x_1x_2\cdots x_n=1$

13. 在梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD}//\overline{BC}$，$\overline{AD}=2$，$\overline{BC}=3$，$\overline{AB}=1$，$\angle ABC=60°$。若與 $\overrightarrow{BC}$ 同方向之單位向量為 $\overrightarrow{a}$，與 $\overrightarrow{BA}$ 同方向之單位向量為 $\overrightarrow{b}$，與 $\overrightarrow{BD}$ 同方向之單位向量為 $\overrightarrow{c}$。則下列哪些是正確的？

(1) $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CD}=-\frac{1}{2}$
(2) $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}$
(3) $\overrightarrow{c}=\frac{1}{\sqrt{7}}(\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b})$
(4) $\overrightarrow{c}=\frac{1}{\sqrt{7}}(\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b})$
(5) $\overrightarrow{c}=\frac{1}{\sqrt{7}}(2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})$

第貳部分：選填題（占 35 分）

說明：1.第 A 至 G 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（塡）題答案區」所標示的列號(14–33)。
2.每題完全答對得 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

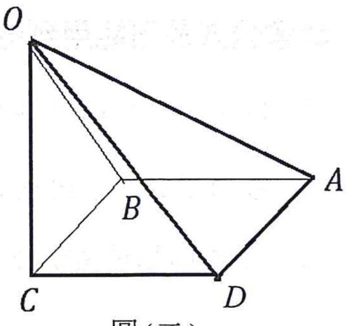
A. 空間中有一長方形 $OABC$，其頂點為 $O(0,0,0)$，$A(4,0,0)$，$C(0,8,0)$。若 P 點在第一卦限且與長方形四個頂點的距離皆為 6。設通過 B，C，P 三點的平面方程式為 $ax+by+z=d$，則數對 $(a,b,d)=$ (14 , 15 , 16) 。

B. 某款虛擬實境遊戲共有 20 種情境；該機構宣稱任一情境的闖關成功率均為 $\frac{1}{3}$，各情境彼此獨立，即連續通過兩關的機率為 $(\frac{1}{3})^2$，連續通過三關的機率為 $(\frac{1}{3})^3$，依此類推。若連續通過 n 關可獲得獎金 $\frac{1}{200p_n}$ 元(四捨五入至整數位)，其中 p_n 代表連續通過 n 關的機率，則至少須連續通過 17 18 關，才可獲得超過 100 萬元的獎金。

C. 若 k 為實數，且已知一雙曲線 $\Gamma_1:(3x+y)(3x-y)=k$ 與一橢圓 $\Gamma_2:\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{16}=1$ 有相同焦點 F_1 及 F_2。若點 P 為 Γ_1 和 Γ_2 之一交點，則 $\overline{PF_1}^2+\overline{PF_2}^2=$ 19 20

D. 已知點 P 是平面上 $\triangle ABC$ 內的一點，且 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=8\sqrt{3}$，$\angle BAC=30°$。若 $\triangle PBC$，$\triangle PCA$，$\triangle PAB$ 的面積分別為 2，x，y，求 $\frac{9}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值為 21 。

E. 如圖(二)，四角錐 $O-ABCD$ 的底面是邊長 2 的正方形，側稜 OC 垂直底面，且 $\overline{OC}=3$。求 $\sin\angle AOB$ 的值為 $\underline{\dfrac{㉒}{\sqrt{㉓㉔}}}$。(分母化為最簡根式)



圖(二)

F. 設 R 代表坐標平面上由不等式 $1-\sqrt{4-y^2}\le x\le 0$ 所定義的區域，若函數 $f(x,y)=3x-y$ 在區域 R 上的最大值為 M，最小值為 m，則數對 $(M,m)=$ $\underline{(\sqrt{㉕},\ ㉖-㉗\sqrt{㉘㉙})}$。(化為最簡根式)

G. 某公司有 6 位員工，負責今天商品展覽會早上及下午的值班，公司在商品展覽會設置甲、乙兩個攤位，早上需要有 4 位員工，其中 2 人值班甲攤位，另 2 人值班乙攤位；下午也需要有 4 位員工，其中 2 人值班甲攤位，另 2 人值班乙攤位。公司規定早上及下午來甲攤位的值班員工不可以由同一人擔任，同時早上及下午來乙攤位的值班員工也不可以由同一人擔任，則公司對於員工在商品展覽會的值班工作安排共 $\underline{㉚㉛㉜㉝}$ 種方法。

參考公式及可能用到的數值

1. 首項爲 a，公差爲 d 的等差數列前 n 項之和爲 $S=\frac{n(2a+(n-1)d)}{2}$

   首項爲 a，公比爲 $r\ (r\neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和爲 $S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

   $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

   $\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

3. $\triangle ABC$ 的正弦定理：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$（$R$ 爲 $\triangle ABC$ 外接圓半徑）

   $\triangle ABC$ 的餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

4. 一維數據 $X:x_1,x_2,\cdots,x_n$，算術平均數 $\mu_X=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$

   標準差 $\sigma_X=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)^2}=\sqrt{\frac{1}{n}((\sum_{i=1}^{n}x_i^2)-n\mu_X^2)}$

5. 二維數據 $(X,Y):(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$，相關係數 $r_{X,Y}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

   迴歸直線(最適合直線)方程式 $y-\mu_Y=r_{X,Y}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$

6. 參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414, \sqrt{3}\approx 1.732, \sqrt{5}\approx 2.236, \sqrt{6}\approx 2.449, \pi\approx 3.142$
7. 對數值：$\log_{10}2\approx 0.3010,\ \log_{10}3\approx 0.4771,\ \log_{10}5\approx 0.6990,\ \log_{10}7\approx 0.8451$
8. 角錐體積$=\frac{1}{3}$底面積×高