

107 學年度全國高級中學 學科能力測驗模擬考試

數學考科

—作答注意事項—

考試範圍：第一～三冊全

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 5 題，多選題 5 題，選填題第 A 至 J 題共 10 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記，請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 \square^3 與第 19 列的 \square^8 畫記，如：

18	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 \square 與第 21 列的 \square^7 畫記，如：

20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
21	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±

※試題後附有參考公式及可能用到的數值

祝考試順利



版權所有 · 翻印必究

第壹部分：選擇題（占 50 分）

一、單選題（占 25 分）

說明：第 1 題至第 5 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 若數列 $\langle a_n \rangle$ 為等差數列，且 15 項的數列 $a_1+1, a_2+4, a_3+9, \dots, a_k+k^2, \dots, a_{15}+225$ 其總和為 1495，則 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots, a_{15}$ 的中位數為何？
 - (1) 10
 - (2) 13
 - (3) 15
 - (4) 17
 - (5) 21

2. 滿足絕對值不等式 $||x|-|x-6|| \leq 2$ 的整數解 x 共有幾個？
 - (1) 1 個
 - (2) 2 個
 - (3) 3 個
 - (4) 4 個
 - (5) 5 個

3. 坐標平面上兩圖形 Γ_1 、 Γ_2 的方程式分別為 $\Gamma_1: x^2+y^2-4x+2=0$ 、 $\Gamma_2: (x+y)(x-y)=0$ ，則 Γ_1 與 Γ_2 共有幾個交點？
 - (1) 1 個
 - (2) 2 個
 - (3) 3 個
 - (4) 4 個
 - (5) 0 個

4. 小夫與胖虎各自玩堆球遊戲，已知小夫第一次堆 4 個球，之後每次所堆的球數為前一次所堆球數的 2 倍再多 1 個球。而胖虎第一次堆 1 個球，之後每次所堆球數為前一次所堆球數的 3 倍。試問當他們兩人各自堆到第 n 次時，胖虎此次所堆球數超過小夫此次所堆球數的 2 倍，則 n 的最小值為何？
- (1) 5
 - (2) 6
 - (3) 7
 - (4) 8
 - (5) 9
5. 天王星高中每天有 7 節課(上午 4 節，下午 3 節)且每一位教師的排課原則需同時滿足以下兩點要求：
- (i) 不連續排 3 節課
 - (ii) 第 4 節與第 5 節不能同時排課
- 若此校亮亮老師每天的課可能有 3 到 5 節課，則滿足以上的排課原則，亮亮老師一天的課表可能有幾種排法？
- (註：不考慮是哪一班的課，例如：亮亮老師當天若有 4 節課，則其中一種可能的課程安排為 1256 節有課，其中一種不可能的課程安排為 1245 節有課)
- (1) 36 種
 - (2) 45 種
 - (3) 46 種
 - (4) 54 種
 - (5) 57 種

二、多選題（占 25 分）

說明：第 6 題至第 10 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

6. 當 $a < b$ 時，有四個數 $x = \frac{2a+3b}{5}$ ， $y = \frac{\sqrt{2a}+\sqrt{3b}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ ， $z = \frac{2^2a+2^3b}{2^2+2^3}$ ， $t = \frac{a \log_{10} 2 + b \log_{10} 3}{\log_{10} 2 + \log_{10} 3}$ 。

請選出正確的選項。

- (1) $x > y$
- (2) $x > z$
- (3) $y > z$
- (4) $z > t$
- (5) $y > t$

7. 設 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$ 為實係數四次多項式函數，且 $f(1) = -3$ ， $f(2) = 1$ ， $f(4) = -15$ 。

請選出正確的選項。

- (1) 方程式 $f(x) = 0$ 有一個大於 4 的實根
- (2) 方程式 $f(x) = 0$ 有四個相異實根
- (3) $f(x)$ 除以 $x(x-1)$ 的餘式為 $4x-7$
- (4) $f(x)$ 除以 $x(x-1)(x-2)$ 的餘式為 $4x^2 + 8x + 1$
- (5) $f(x)$ 除以 $x(x-1)(x-2)(x-4)$ 的餘式為 $-2x^3 + 10x^2 - 12x + 1$

8. 設 a 與 b 皆為正實數，關於下列不等式，請選出正確的選項。

(1) $(a+2b) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b}\right) \geq 15$

(2) $\left(a + \frac{4}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq 20$

(3) $\frac{2ab}{a+b} \geq \sqrt{ab}$

(4) $\frac{3^a + 3^b}{2} \geq 3^{\frac{a+b}{2}}$

(5) $\log_3 \frac{a+b}{2} \geq \frac{\log_3 a + \log_3 b}{2}$

9. 根據統計，HBL 球星浩浩近五場上場時間

X (單位：分鐘) 與得分 Y (單位：分) 如右表：

上場時間(X)	32	30	36	40	27
得分(Y)	25	18	26	a	20

其中第四場的得分因汙損看不清楚，但已知此五場

比賽 Y 對 X 的迴歸直線為 $y = \frac{12}{13}x - \frac{84}{13}$ 。請選出正確的選項。

(1) 這五場的平均上場時間為 33 分鐘

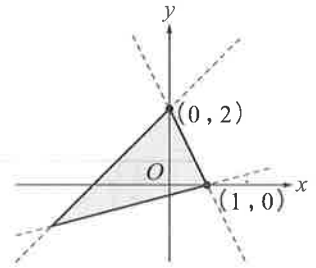
(2) 這五場的平均得分數為 25 分

(3) 第四場的得分 $a = 36$

(4) 這五場上場時間的標準差小於 4

(5) 上場時間與得分數的相關係數小於 $\frac{12}{13}$

10. 坐標平面上，若二元一次聯立不等式
$$\begin{cases} 2x+y-2 \leq 0 \\ x-y+2 \geq 0 \\ ax+by+c \leq 0 \end{cases}$$
 的可行解區域



為三角形區域(包含三角形內部及邊界)，如右圖，且目標函數 $px-y$ 在點 $(0, 2)$ 有最小值，請選出正確的選項。

- (1) $a > 0$
- (2) $b > 0$
- (3) $c > 0$
- (4) $a+c=0$
- (5) $p \geq 1$ 或 $p \leq -2$

第貳部分：選填題 (占 50 分)

說明：1. 第 A 至 J 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(11-34)。
2. 每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 坐標平面上，函數 $y = \log_{10}(x+1)$ 的圖形上有三個點 $(a, 3)$ 、 $(1, b)$ 、 $(4, c)$ ，則 $\log_{10}(a+b+c) = \underline{\textcircled{11}}$ 。

B. 百貨公司週年慶，推出刮刮樂彩券活動。凡購物滿 1000 元以上者，皆贈送一張彩券，彩券共有三列三行的表格，每張彩券的九個空格共填入 4 個 A、3 個 B 與 2 個 C，其中一種填入情形如右圖所示，然後將無法透視的油彩覆蓋其上。規定只能任意刮兩格來對獎，若刮出的兩格之字母同為 A，則可得一獎。若刮出的兩格之字母同為 B，則可得二獎。若刮出的兩格之字母同為 C，則可得三獎。若刮出的兩格之字母不同，則沒得獎。今帆帆有刮刮樂彩券一張，已知她刮出的兩格之字母皆相同，則帆帆得到一獎的機率為 $\frac{\textcircled{12}}{\textcircled{13}}$ 。(化為最簡分數)

A	B	C
A	B	A
B	C	A

C. 擲一顆公正骰子兩次，所得的點數依序是 a 與 b ，則一元二次方程式 $x^2 - 2(a-2)x - b^2 + 10 = 0$ 有兩個正根的機率為 $\frac{\textcircled{14}}{\textcircled{15}}$ 。(化為最簡分數)

(註：此公正骰子為正立方體且六個面的點數分別為 1、2、3、4、5、6)

D. 已知圓形時鐘，時間開始為 3 點整時，時針與分針所夾的夾角為 $\frac{\pi}{2}$ ，當 3 點 n 分時再遇到時針與分針所夾的夾角為 $\frac{\pi}{2}$ (其中 $n \neq 0$)，則 $n = \frac{\textcircled{16}\textcircled{17}\textcircled{18}}{\textcircled{19}\textcircled{20}}$ 。(化為最簡分數)

E. 已知 $t > 0$ 且三個向量分別為 $\vec{a} = (1, t)$ 、 $\vec{b} = (4, 2)$ 、 $\vec{c} = (4, 4t)$ ，若三個向量的長度分別為 $|\vec{a}|$ 、 $|\vec{b}|$ 、 $|\vec{c}|$ ，且依序成一等比數列，則 $\vec{a} - \vec{b}$ 與 $\vec{a} - \vec{c}$ 所張成的平行四邊形面積為 ①②。

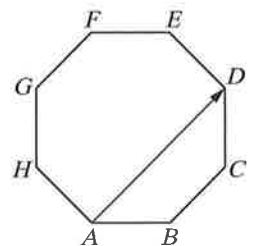
F. 已知二次方程式 $x^2 + 2(\sin \theta + \cos \theta)x + 1 = 0$ 有一根為 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，則 $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \textcircled{23}$ 。

G. 設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 為 x 的多項式，若 $g(x)$ 除以 $(x+1)$ 的餘式為 5，且 $f(x) = (x+1) \cdot g(x) + 2$ ，則 $(f(x))^2$ 除以 $(x+1)^2$ 的餘式為 ④⑤ x + ⑥⑦。

H. 某自行車公司共有甲、乙、丙三座工廠，設甲、乙、丙廠生產量分別占全部的 40%、35%、25%，且甲、乙、丙廠生產的瑕疵品分別有 5%、10%、 $x\%$ ，今在某店家購買此公司所生產的一臺自行車，已知購買到的自行車是瑕疵品，則是甲廠所生產的機率為 $\frac{8}{25}$ ，試求 $x = \textcircled{28}$ 。

I. $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 7$ ， $\overline{AC} = 5$ 且 $\angle A$ 的內角平分線段長為 $\frac{7}{2}$ ，則 $\triangle ABC$ 之面積為 $\frac{\textcircled{29}\textcircled{30}}{\textcircled{31}}$ 。(化為最簡分數)

J. 正八邊形 $ABCDEFGH$ 如右圖，若 $\vec{AD} = x\vec{AB} + y\vec{AH}$ ，則 $x+y$ 之值為 $\textcircled{32} + \textcircled{33}\sqrt{\textcircled{34}}$ 。(化為最簡根式)



參考公式及可能用到的數值

1. 以 α, β 為兩根的一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根與係數關係為：
$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} \end{cases}$$

2. 算幾不等式：設 $a > 0, b > 0$ ，則 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 恆成立。且當 $a=b$ 時， $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$

3. 級數公式：

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

4. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\text{算術平均數 } \mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\text{標準差 } \sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - n\mu_X^2 \right)}$$

5. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$,

$$\text{相關係數 } r_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \mu_Y)^2}}$$

$$\text{迴歸直線(最適合直線)方程式為 } y - \mu_Y = r_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$$

6. 三角函數的倍角公式：

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

7. $\triangle ABC$ 的面積 $= \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} bc \sin A$

8. 柯西不等式：若 a_1, a_2, b_1, b_2 為任意實數，則 $(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2$

9. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732, \sqrt{5} \approx 2.236, \sqrt{6} \approx 2.449, \pi \approx 3.142$

10. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010, \log_{10} 3 \approx 0.4771, \log_{10} 5 \approx 0.6990, \log_{10} 7 \approx 0.8451$