109 學年度學科能力測驗

全真模擬試題(A 卷)

數學考科

教師用

測驗範圍：高中數學一、二年級

作答注意事項

考試時間：100 分鐘

題型：

- 單選題共 6 題
- 多選題共 7 題
- 選填題共 7 題

作答方式：將答案填入卷末之答案欄中

註：此份試題本為模擬學科能力測驗之測驗形式，作答方式仍以未來實際之測驗形式為準。

※請聽從指示後才翻頁作答

三民書局

第壹部分：選擇題（占 65 分）

一、 單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，將答案填入卷末之答案欄中。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

(　)1、若 $n=\log_2\log_2\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$，則實數 n 之值為何？ (1) -3　(2) 1　(3) 2　(4) 3　(5) 8

答案：(1)

解析：$n=\log_2\log_2\sqrt[8]{2}=\log_2\log_2 2^{\frac{1}{8}}=\log_2\frac{1}{8}=-3$

故選(1)

(　)2、坐標平面上，O 為原點，θ 為第三象限角，$P(-6,x)$ 為 θ 終邊上一點，且 $\overline{OP}=\sqrt{61}$，則 $\tan\theta=$？ (1) $\frac{1}{2}$　(2) $-\frac{6}{5}$　(3) $-\frac{5}{6}$　(4) $\frac{6}{5}$　(5) $\frac{5}{6}$

答案：(5)

解析：$\overline{OP}=\sqrt{61}=\sqrt{36+x^2}\Rightarrow x^2=25\Rightarrow x=\pm5$ (正不合，因為 θ 為第三象限角)

$\therefore P(-6,-5)\Rightarrow\tan\theta=\frac{5}{6}$

故選(5)

(　)3、設 $x,y\in\mathbb{R}$，且 $\sqrt{(x-2)^2+(y+3\pi)^2}-\sqrt{(x+\tan37^\circ)^2+(y-0.5)^2}=0$，則 (x,y) 形成的圖形為 (1)橢圓　(2)圓　(3)直線　(4)長方形　(5)拋物線

答案：(3)

解析：原式 $\Rightarrow\sqrt{(x-2)^2+(y+3\pi)^2}=\sqrt{(x+\tan37^\circ)^2+(y-0.5)^2}$

則 (x,y) 到 $(2,-3\pi)$ 及 $(-\tan37^\circ,0.5)$ 兩點等距離

則圖形為 $(2,-3\pi)$ 及 $(-\tan37^\circ,0.5)$ 兩點所連成的線段之中垂線

故選(3)

(　　)4、坐標平面上，O為原點，已知$A(3,-1),B(1,2)$，若$C(x,y)$滿足$\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$其中$\alpha,\beta$為實數且$\alpha+\beta=1$，試問動點$C$滿足的方程式為何？

(1)$x+2y=16$　(2)$3x+2y=7$　(3)$2x+3y=9$　(4)$2x-y=16$　(5)$2x-3y=9$

答案：(2)

解析：$\because \alpha+\beta=1$，$\therefore C$點落在直線AB上，$m_{AB}=-\dfrac{3}{2}$

方程式為$y-2=-\dfrac{3}{2}(x-1)\Rightarrow 3x+2y=7$

故選(2)

(　　)5、利用反方陣解矩陣方程式的方法運用在密碼學中，首先用矩陣將英文字母編碼，例如：a以$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$表之，$b$以$\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$表之，……，$z$以$\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}$表之，而單字“box”以$\begin{bmatrix}0&1&2\\2&5&4\end{bmatrix}$表之，餘類推。今為了保密將某英文單字以矩陣$A$表示並加密後再傳出，方法如下：選取兩個二階方陣$B=\begin{bmatrix}1&-2\\1&-3\end{bmatrix}$與$C=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$，計算$(B+2C)A$後，再傳出，假設收到的內容為矩陣$\begin{bmatrix}8&13&14\\20&32&35\end{bmatrix}$，則原單字為何？　(1)cat　(2)cow　(3)dog　(4)pig　(5)fox

答案：(3)

解析：$B+2C=\begin{bmatrix}1&-2\\1&-3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&4\\6&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2\\7&5\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}3&2\\7&5\end{bmatrix}\cdot A=\begin{bmatrix}8&13&14\\20&32&35\end{bmatrix}$

$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}3&2\\7&5\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}8&13&14\\20&32&35\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&-2\\-7&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8&13&14\\20&32&35\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\4&5&7\end{bmatrix}\Rightarrow \text{dog}$

故選(3)

(　　)6、設$x,y,z\in\mathbb{R}$，滿足$\begin{cases}3x+2y+z=0\\2x-y-z=0\end{cases}$，且$xyz\neq0$，求$\dfrac{5x+y+5z}{2x+3y-z}$之值為何？

(1)$\dfrac{1}{3}$　(2)5　(3)$-\dfrac{1}{2}$　(4)-4　(5)$-\dfrac{7}{4}$

答案：(5)

解析：$x:y:z=\begin{vmatrix}2&1\\-1&-1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1&3\\-1&2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}3&2\\2&-1\end{vmatrix}=-1:5:-7$

令$x=-t,y=5t,z=-7t$

$\Rightarrow\dfrac{5x+y+5z}{2x+3y-z}=\dfrac{-5t+5t-35t}{-2t+15t+7t}=\dfrac{-35t}{20t}=-\dfrac{7}{4}$，故選(5)

二、 多選題（占 **35** 分）

說明：第 7 題至第 13 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，將答案填入卷末之答案欄中。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

(　　　)7、下列關於函數的敘述，哪些正確?

(1)對任意正實數$x, x\neq 2$而言，$f(x)=x-1+\dfrac{1}{x-2}$的值恆大於或等於 3

(2)對任意非零實數x而言，$f(x)=x^2+1+\dfrac{1}{x^2}$的值恆大於或等於 3

(3)對任意實數x而言，$f(x)=2x^2+4x+4$的值恆大於或等於 3

(4)對任意實數x而言，$f(x)=3(x-2)^4+3$的值恆大於或等於 3

(5)對任意實數x而言，$f(x)=2^{|x|}+2$的值恆大於或等於 3

答案：(2)(4)(5)

解析：(1)×：$x>0$，但$x-2$不一定是正數，$\therefore$算幾不等式不能使用

(2)○：$\because \dfrac{x^2+\frac{1}{x^2}}{2}\geq\sqrt{x^2\cdot\frac{1}{x^2}}\Rightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}\geq 2\Rightarrow x^2+1+\dfrac{1}{x^2}\geq 3$

(3)×：$f(x)=2(x+1)^2+2\geq 2$

(4)○：$\because (x-2)^4\geq 0$，$\therefore 3(x-2)^4+3\geq 3$

(5)○：$\because |x|\geq 0\Rightarrow 2^{|x|}\geq 1\Rightarrow 2^{|x|}+2\geq 3$

故選(2)(4)(5)

(　　　)8、下列各組數，何者可以表成一個三角形的三高？

(1)1, 2, 3　(2)2, 3, 4　(3)2, 3, 5　(4)3, 4, 5　(5)3, 4, 7

答案：(2)(3)(4)(5)

解析：$\because \triangle ABC=\dfrac{1}{2}ah_a=\dfrac{1}{2}bh_b=\dfrac{1}{2}ch_c\Rightarrow a:b:c=\dfrac{1}{h_a}:\dfrac{1}{h_b}:\dfrac{1}{h_c}$

(1)×：$a:b:c=\dfrac{1}{1}:\dfrac{1}{2}:\dfrac{1}{3}=6:3:2$，$b+c<a$　(2)○：$a:b:c=\dfrac{1}{2}:\dfrac{1}{3}:\dfrac{1}{4}=6:4:3$，$b+c>a$

(3)○：$a:b:c=\dfrac{1}{2}:\dfrac{1}{3}:\dfrac{1}{5}=15:10:6$，$b+c>a$　(4)○：$a:b:c=\dfrac{1}{3}:\dfrac{1}{4}:\dfrac{1}{5}=20:15:12$，$b+c>a$

(5)○：$a:b:c=\dfrac{1}{3}:\dfrac{1}{4}:\dfrac{1}{7}=28:21:12$，$b+c>a$

故選(2)(3)(4)(5)

(　　　　)9、已知方程組$\begin{cases} x-2y+z=a \\ x-9y+5z=b \\ 2x+3y-2z=c \end{cases}$，則下列哪個選項之$a,b,c$可使此方程組有解？

(1) $a=1,b=2,c=3$　(2) $a=4,b=5,c=6$　(3) $a=\frac{1}{6},b=\frac{1}{3},c=\frac{1}{6}$

(4) $a=\frac{1}{3},b=\frac{1}{2},c=\frac{1}{4}$　(5) $a=20,b=30,c=30$

答案：(3)(5)

解析：$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & a \\ 1 & -9 & 5 & b \\ 2 & 3 & -2 & c \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \times(-1) \\ \times(-2) \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & a \\ 0 & -7 & 4 & b-a \\ 0 & 7 & -4 & c-2a \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \times 1 \end{matrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & a \\ 0 & -7 & 4 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & b+c-3a \end{bmatrix}$有解$\Rightarrow b+c-3a=0 \Rightarrow 3a-b-c=0$

(1) $3-2-3\neq 0$　(2) $12-5-6\neq 0$　(3) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=0$　(4) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\neq 0$

(5) $60-30-30=0$，故選(3)(5)

(　　　　)10、統計 NBA 球星小皇帝詹姆斯近五場上場時間與得分數如下

上場時間 (X)	30	36	32	40	27
得分 (Y)	18	26	25	31	20

(1)詹姆斯這五場的平均上場時間為 33

(2)詹姆斯這五場的平均得分數為 25

(3)詹姆斯這五場上場時間的標準差小於 4

(4)根據此五場比賽得到Y對X的迴歸直線為$y=\frac{12}{13}x-\frac{84}{13}$

(5)若下場比賽教練讓詹姆斯上場 33 分鐘，預測詹姆斯可以超過 25 分

答案：(1)(4)

解析：(1)○(2)×：$\mu_x=\frac{1}{5}(30+36+32+40+27)=33$，$\mu_y=\frac{1}{5}(18+26+25+31+20)=24$

(3)×：$\sigma_x=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\mu_x)}{5}}=\sqrt{\frac{(-3)^2+3^2+(-1)^2+7^2+(-6)^2}{5}}=\sqrt{\frac{104}{5}}=\sqrt{20.8}>\sqrt{16}=4$

(4)○：$\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\mu_x)^2}=\frac{(-3)\times(-6)+3\times 2+(-1)\times 1+7\times 7+(-6)\times(-4)}{(-3)^2+3^2+(-1)^2+7^2+(-6)^2}=\frac{96}{104}=\frac{12}{13}$

$\Rightarrow y=24+\frac{12}{13}(x-33) \Rightarrow y=\frac{12}{13}x-\frac{84}{13}$

(5) ×：令$x=33$代入迴歸直線可得$y=\frac{12}{13}\times 33-\frac{84}{13}=24<25$

故選(1)(4)

(　　　　)11、若 $f(x)$ 是領導係數為 1 的三次實係數多項式，且 $f(1)=1, f(2)=2, f(5)=5$，則 $f(x)=0$ 在下列哪二個整數之間必定有實根？

(1) -1 與 0　(2)0 與 1　(3)1 與 2　(4)2 與 3　(5)3 與 4

答案：(2)(4)

解析：設 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-5)+a(x-1)(x-2)+b(x-1)+1$

$f(2)=b+1=2 \Rightarrow b=1,\ f(5)=4\times 3a+4+1=5 \Rightarrow a=0$

$\therefore\ f(x)=(x-1)(x-2)(x-5)+(x-1)+1 = x^3-8x^2+18x-10$

$f(-1)=-1-8-18-10=-37<0,\ f(0)=-10<0,\ f(1)=1-8+18-10=1>0$

$f(2)=8-32+36-10=2>0,\ f(3)=27-72+54-10=-1<0$

$f(4)=64-128+72-10=-2<0$

$\because\ f(0)\cdot f(1)<0,\ f(2)\cdot f(3)<0$，故選(2)(4)

(　　　　)12、同時投擲三顆公正骰子，則下列敘述何者為真？

(1)點數和為 10 的機率為 $\frac{1}{8}$　(2)點數和為 9 的機率為 $\frac{1}{8}$

(3)至少有一顆為一點之機率為 $\frac{91}{216}$　(4)有兩顆骰子點數相同之機率為 $\frac{5}{12}$

(5)點數成等差數列的機率為 $\frac{1}{6}$

答案：(1)(3)(4)

解析：(1)○：考慮樣本點 $(a,b,c), a\ge b\ge c$，$(6,3,1),(6,2,2),(5,4,1),(4,4,2),(5,3,2),(4,3,3)$

$$P=\frac{3\times 3!+3\times\frac{3!}{2!}}{6^3}=\frac{18+9}{216}=\frac{1}{8}$$

(2)×：$(5,3,1),(5,2,2),(3,3,3),(4,3,2),(4,4,1)$

$$P=\frac{2\times 3!+2\times\frac{3!}{2!}+1}{6^3}=\frac{12+6+1}{216}=\frac{19}{216}$$

(3)○：全部扣掉沒有一點者

$$P=1-\frac{5^3}{6^3}=\frac{216-125}{216}=\frac{91}{216}$$

(4)○：$P=\dfrac{C_1^6\cdot C_1^5\cdot\frac{3!}{2!}}{6^3}=\dfrac{90}{216}=\dfrac{5}{12}$

(5)×：$d=0:(1,1,1),(2,2,2),\cdots,(6,6,6)\Rightarrow 6$

$d=1:(1,2,3),(2,3,4),(3,4,5),(4,5,6)\Rightarrow 4\times 3!=24$

$d=2:(1,3,5),(2,4,6)\Rightarrow 2\times 3!=12$

$$P=\frac{6+24+12}{6^3}=\frac{42}{216}=\frac{7}{36}$$

故選(1)(3)(4)

(　　　　)13、平面上三直線 $(a-1)x+2y=3,\ 3x+ay=5,\ 2x+y=3$，其中 a 為實數，若三直線可圍成一直角三角形，則 a 之值可為

(1) -6　(2) -3　(3) 0　(4) $\frac{1}{2}$　(5) $\frac{3}{5}$

答案：(1)(3)(5)

解析：$m_1=\frac{1-a}{2}$， $m_2=\frac{-3}{a}$， $m_3=-2$

① $m_1\perp m_2$：$\frac{1-a}{2}\cdot\frac{-3}{a}=-1\Rightarrow -3+3a=-2a\Rightarrow 5a=3, a=\frac{3}{5}$

② $m_1\perp m_3$：$\frac{1-a}{2}\cdot(-2)=-1\Rightarrow 1-a=1, a=0$ (m_2 不存在，其直線為 $3x=5$)

③ $m_2\perp m_3$：$\frac{-3}{a}\cdot -2=-1\Rightarrow a=-6$

故選(1)(3)(5)

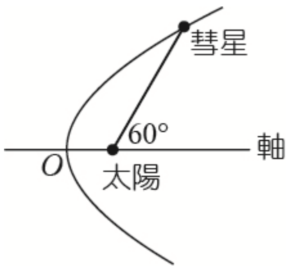
第貳部分：選填題(占 **35** 分)

說明：　1.第 A 至 G 題，將答案填入卷末之答案欄中。
　　　　2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A、某彗星之軌道為以太陽為焦點的一拋物線，當此星與太陽距離為 d 時，兩者連線與軸成 $60°$，則：

(1)當兩者連線與軸垂直時，其距離為______。(以 d 表示)

(2)兩點最接近時，其距離為______。(以 d 表示)

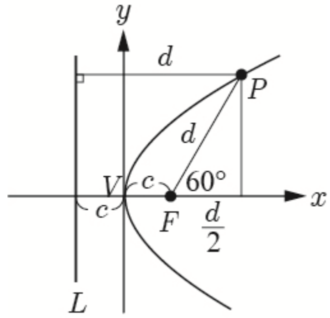


答案：(1) $\frac{d}{2}$　(2) $\frac{d}{4}$

解析：(1)設焦距為 c，準線 L：$x=-c\Rightarrow d=2c+\frac{d}{2}\Rightarrow c=\frac{d}{4}$

$\therefore$ 垂直時的距離為 $2c=\frac{d}{2}$

(2)即 $\overline{VF}=c=\frac{d}{4}$



B、某種寄居蟹由出生算起活到 20 週的機率是$\frac{4}{5}$，活到 30 週的機率是$\frac{1}{3}$，現有一隻 20 週的寄居蟹，則牠能活到 30 週的機率為＿＿＿＿＿。

答案：$\frac{5}{12}$

解析：A 事件表能活到 20 週，B 事件表能活到 30 週

$$P(A)=\frac{4}{5},P(B)=\frac{1}{3},\quad B\subset A\Rightarrow P(A\cap B)=P(B)=\frac{1}{3}$$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{5}}=\frac{5}{12}$$

C、若整係數方程式$ax^2+bx+41=0$的兩根為相異的整數，且$a>0,b<0$，則$b=$＿＿＿。

答案：-42

解析：令兩相異整數根為α,β

$\therefore\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\in\mathbb{Z},\ \alpha\beta=\frac{41}{a}\in\mathbb{Z}$ 又 $a>0\Rightarrow a=1$ 或 41

(1)當 $a=1\Rightarrow\alpha\beta=41\Rightarrow(\alpha,\beta)=(1,41),(41,1),(-1,-41),(-41,-1)$

$\therefore\alpha+\beta=42$ 或 -42 (不合) $\Rightarrow\alpha+\beta=42\Rightarrow b=-42$

(2)當 $a=41\Rightarrow\alpha\beta=1\Rightarrow\alpha+\beta=2$ 或 -2 (不合)

與相異α,β矛盾，故$b=-42$

D、已知在有限環境中小白兔的族群成長模式為$P(t)=\frac{180}{1+c\cdot 2^{-kt}}$，其中 t 表時間(天)，c,k 為常數，若起始有 20 隻小白兔，60 天後有 45 隻小白兔，則 120 天後會有＿＿＿＿隻小白兔。(四捨五入至整數)

答案：85

解析：$P(0)=\frac{180}{1+c\cdot 2^0}=20\Rightarrow 1+c=9\Rightarrow c=8$

$$P(60)=\frac{180}{1+8\times 2^{-60k}}=45\Rightarrow 1+8\times 2^{-60k}=4\Rightarrow 8\times 2^{-60k}=3\Rightarrow 2^{-60k}=\frac{3}{8}$$

$$P(120)=\frac{180}{1+8\times 2^{-120k}}=\frac{180}{1+8\times(2^{-60k})^2}=\frac{180}{1+8\times(\frac{3}{8})^2}=\frac{180}{1+\frac{9}{8}}=\frac{180}{\frac{17}{8}}\approx 84.7\Rightarrow 85\text{ 隻}$$

E、化簡：$\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\cdot\sqrt{\dfrac{\tan\theta-\sin\theta}{\tan\theta+\sin\theta}}=$__________。

答案：± 1

解析：原式$=\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\sqrt{\dfrac{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}-\sin\theta}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\sin\theta}}$ (根號內分母、分子同乘$\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$)

$$=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\text{ (根號內分母、分子同乘}1-\cos\theta\text{)}$$

$$=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\sqrt{\frac{(1-\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\frac{|1-\cos\theta|}{\sqrt{\sin^2\theta}}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\frac{1-\cos\theta}{|\sin\theta|}$$

$$=\frac{\sin\theta}{|\sin\theta|}=\pm\frac{\sin\theta}{\sin\theta}=\pm 1$$

F、平面 E 分別交 x, y, z 軸正向於 A, B, C 三點，且 $P(3,1,2)$ 在 E 上，若 O 為原點，則 $3\overline{OA}+4\overline{OB}+2\overline{OC}$ 有最小值________。

答案：49

解析：設 $E:\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$，其中 $a,b,c>0$

$$P(3,1,2)\in E\Rightarrow\frac{3}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{c}=1$$

$A(a,0,0), B(0,b,0), C(0,0,c)$，又 $3\overline{OA}+4\overline{OB}+2\overline{OC}=3a+4b+2c$

$$[(\sqrt{3a})^2+(\sqrt{4b})^2+(\sqrt{2c})^2][(\sqrt{\frac{3}{a}})^2+(\sqrt{\frac{1}{b}})^2+(\sqrt{\frac{2}{c}})^2]\geq(3+2+2)^2$$

$\Rightarrow(3a+4b+2c)\times 1\geq 49$，故最小值為 49

G、設 x, y 為實數，若 $A=\begin{bmatrix}x & 4\\ y & 5\end{bmatrix}$，且 $A^2-7A-18I=0$，則 $x=$________，$y=$________。

答案：2,7

解析：$A^2=\begin{bmatrix}x & 4\\ y & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 4\\ y & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^2+4y & 4x+20\\ xy+5y & 4y+25\end{bmatrix}$

$$A^2-7A-18I=\begin{bmatrix}x^2+4y & 4x+20\\ xy+5y & 4y+25\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}7x & 28\\ 7y & 35\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}18 & 0\\ 0 & 18\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}x^2-7x+4y-18 & 4x-8\\ xy-2y & 4y-28\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=0$$

$\Rightarrow x=2, y=7$

答案卷

第壹部分： 選擇題（占 65 分）

一、 單選題（占 30 分）

1	1	2	5	3	3	4	2	5	3	6	3

二、 多選題（占 35 分）

7	245	8	2345	9	35	10	145	11	24	12	134	13	135

第貳部分： 選填題（占 35 分）

A (1) $\frac{d}{2}$ (2) $\frac{d}{4}$	B $\frac{5}{12}$	C -42
D 85	E ± 1	F 49
G 2,7		