

109 學年度學科能力測驗

全真模擬試題(B 卷)

數學考科

測驗範圍：高中數學一、二年級

教師用

作答注意事項

考試時間：100 分鐘

題型：

- 單選題共 7 題
- 多選題共 6 題
- 選填題共 7 題

作答方式：將答案填入卷末之答案欄中

註：此份試題本為模擬學科能力測驗之測驗形式，作答方式仍以未來實際之測驗形式為準。

※請聽從指示後才翻頁作答

 三民書局

版權所有
請勿翻印

第壹部分：選擇題（占 65 分）

一、 單選題（占 35 分）

說明：第 1 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，將答案填入卷末之答案欄中。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

- () 1、設 $f(x)$ 為五次實係數多項式，且 $f(2-i)=0$ ， $f(-2-i)=0$ ，則函數 $f(x)$ 的圖形與 x 軸有幾個交點？ (1)0 (2)1 (3)2 (4)3 (5)無法決定

答案：(2)

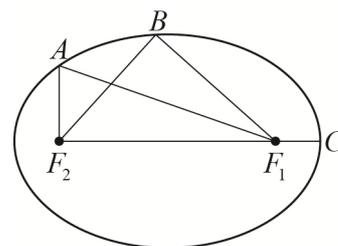
解析：∵ $f(x)$ 為實係數方程式，∴ $f(2+i)=0$ 和 $f(-2+i)=0$ (虛根成對)

$$\text{即 } f(x) = [x - (2-i)][x - (2+i)][x - (-2-i)][x - (-2+i)](ax - b) = 0$$

故 $f(x) = 0$ 與 x 軸交於一點 $(\frac{b}{a}, 0)$

故選(2)

- () 2、如圖，小華建了一個橢圓形球檯，其中 F_1 與 F_2 為橢圓的焦點。現在有一個小圓球均從焦點 F_1 發射，經由橢圓邊反射到直線焦點 F_2 ，若有三條路線如下：



第(I)條路線： $F_1 \rightarrow A \rightarrow F_2$

第(II)條路線： $F_1 \rightarrow B \rightarrow F_2$

第(III)條路線： $F_1 \rightarrow C \rightarrow F_1 \rightarrow F_2$

則三條路線的長短比較何者正確？ (1)(I) > (II) > (III) (2)(I) < (II) < (III)

(3)(I) = (II) = (III) (4)(I) ≤ (III) < (II) (5)(I) > (II) = (III)

答案：(3)

解析：∵ 橢圓上任意點到兩交點的距離和為定值

∴ (I)，(II)，(III) 相等

故選(3)

- () 3、一複數 z 之實部為 a ，虛部為 b ，則 $\frac{z-2}{z}$ 之虛部為

(1) $\frac{a^2 - 2a - b^2}{a^2 - b^2} + \frac{2b}{a^2 - b^2}$ (2) $\frac{a^2 - 2a + b^2}{a^2 + b^2}$ (3) $\frac{b}{a + b}$ (4) $\frac{2b}{a^2 + b^2}$ (5) $\frac{2b}{a^2 - b^2}$

答案：(4)

解析： $z = a + bi$

$$\frac{z-2}{z} = \frac{(a-2) + bi}{a + bi} = \frac{[(a-2) + bi](a - bi)}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 - 2a + b^2}{a^2 + b^2} + \frac{2b}{a^2 + b^2}i$$

故選(4)

() 4、同時投擲兩公正骰子，其點數和為 a ，點數積為 b ，試求 $a+b$ 為偶數的機率為何？

- (1) $\frac{1}{36}$ (2) $\frac{1}{12}$ (3) $\frac{5}{36}$ (4) $\frac{7}{36}$ (5) $\frac{1}{4}$

答案：(5)

解析：∵ $a+b$ 為偶數 ∴ a, b 為奇數，或 a, b 為偶數

若 a, b 為奇數，則矛盾

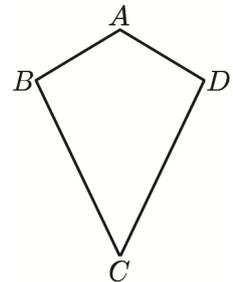
若 a, b 為偶數，則兩骰子皆擲出偶數點

且兩骰子皆擲出偶數點的情況，共 9 種

故機率為 $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ ，故選(5)

() 5、小雲想做一個風箏，設計圖如右，其中 $\overline{AB} = \overline{AD} = 1$, $\overline{BC} = \overline{DC} = 2$, $\angle ABC = \angle ADC$ 且 $\angle BAD = 2\theta$ ，則此風箏的面積為_____。

- (1) $\sin \theta$ (2) $2 \sin \theta \cos \theta$ (3) $9 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$
 (4) $\sin \theta (\cos \theta + \sqrt{4 - \sin^2})$ (5) $\sin \theta (\cos \theta + \sqrt{4 + \sin^2})$



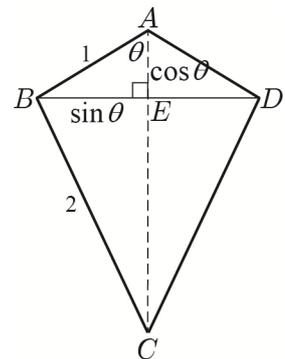
答案：(4)

解析：如圖， $\overline{BE} = \sin \theta$, $\overline{AE} = \cos \theta$

則 $\overline{CE} = \sqrt{2^2 - \sin^2 \theta}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{風箏面積} &= \triangle ABD + \triangle BCD = \frac{1}{2} (2 \sin \theta \cos \theta + 2 \sin \theta \sqrt{4 - \sin^2}) \\ &= \sin \theta (\cos \theta + \sqrt{4 - \sin^2}) \end{aligned}$$

故選(4)



() 6、 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 5$, $\overline{AC} = 2$, $\angle BAC = 60^\circ$ ，且 $\overrightarrow{AP} = x \overrightarrow{AB} + y \overrightarrow{AC}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y = 1$ ，若所有 P 點所成之圖形為 S ，則：

- (1) S 為一直線 (2) S 為射線 (3) P 不在 \overline{BC} 上 (4) S 的長為 7 (5) S 的長為 $\sqrt{19}$

答案：(5)

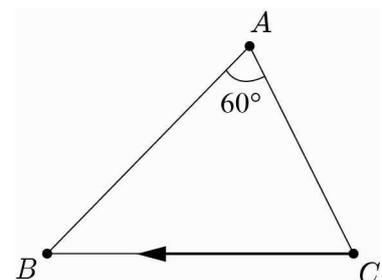
解析：如圖， $\overrightarrow{AP} = x \overrightarrow{AB} + (1-x) \overrightarrow{AC}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC} = x(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \Rightarrow \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{AP} = x(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CP} = x \overrightarrow{CB}, 0 \leq x \leq 1$$

∴ P 之軌跡為 \overline{BC}

$$\overline{BC} = \sqrt{5^2 + 2^2 - 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{19}，\text{故選(5)}$$



()7、設 $n = 1 + 12 + 123 + 1234 + \dots + 123456789$ ，則 n 除以 11 的餘數為

- (1)3 (2)4 (3)5 (4)6

答案：(1)

解析：所求 $= 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5$ 除以 11 之餘數
 $= 25$ 除以 11 之餘數
 $= 3$ ，故選(1)

二、多選題（占 30 分）

說明：第 8 題至第 13 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，將答案填入卷末之答案欄中。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

()8、化簡下列根式，何者正確？ (1) $\sqrt{(\sqrt{17}-4)^2} = \sqrt{17}-4$ (2) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = 2-\sqrt{5}$
(3) $\sqrt{\frac{4a}{6}} = \frac{\sqrt{6a}}{3}$ (4) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{15} = 5\sqrt{5}$ (5) $\sqrt{4b^2} = 2b$

答案：(13)

解析：(1)○： $\sqrt{(\sqrt{17}-4)^2} = |\sqrt{17}-4| = \sqrt{17}-4$ (2)×： $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = |2-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-2$

(3)○： $\sqrt{\frac{4a}{6}} = \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6a}}{3}$ (4)×： $\sqrt{10} \cdot \sqrt{15} = \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5} = 5\sqrt{6}$

(5)×： $\sqrt{4b^2} = \sqrt{(2b)^2} = |2b| = 2|b|$

故選(1)(3)

()9、某次數學測驗後，老師看到成績過低，決定採取補救措施，老師要學生訂正考卷，若訂正都正確，就給予訂正分數 100 分，並將原始分數與 100 分相加除以 2 作為實得分數。假設每位同學訂正都完全正確，則下列有關兩次分數之間的敘述何者正確？

- (1)若甲生的原始分數大於乙生的原始分數，則甲生的實得分數也大於乙生的實得分數
- (2)若丙生的原始分數恰為全班原始分數的中位數，則丙生的實得分數亦為全班實得分數的中位數
- (3)實得分數之算術平均數比原始分數的算術平均數的一半多 50 分
- (4)實得分數之標準差是原始分數的標準差的一半
- (5)若甲生的原始分數比丙生多 10 分，則甲生的實得分數比乙生多 8 分

答案：(1234)

解析：設原始成績為 X ，補救後成績為 $Y = \frac{X+100}{2} = \frac{X}{2} + 50$

(1)(2)(3)○

(4)○： $\sigma_y = \frac{1}{2}\sigma_x$

(5)×：甲生比乙生實得分數應多得 5 分

故選(1)(2)(3)(4)

()10、若 θ 為第二象限角，則 $\frac{\theta}{3}$ 可能是第幾象限角？

(1)第一象限 (2)第二象限 (3)第三象限 (4)第四象限 (5) $\frac{\theta}{3}$ 在坐標軸上

答案：(124)

解析： $360^\circ \cdot n + 90^\circ < \theta < 360^\circ \cdot n + 180^\circ, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow 120^\circ \cdot n + 30^\circ < \frac{\theta}{3} < 120^\circ \cdot n + 60^\circ$

當 $n=0$ 時， $30^\circ < \frac{\theta}{3} < 60^\circ \Rightarrow$ 第一象限

當 $n=1$ 時， $150^\circ < \frac{\theta}{3} < 180^\circ \Rightarrow$ 第二象限

當 $n=2$ 時， $270^\circ < \frac{\theta}{3} < 300^\circ \Rightarrow$ 第四象限

故選(1)(2)(4)

()11、設直線 L 通過 $A(5, -3, 6), B(5, 0, 3)$ 兩點，又 L 在平面 $E: 2x - y + 2z - 7 = 0$ 之正射

影的直線方程式為 $L': \frac{x-c}{a} = \frac{y-d}{b} = \frac{z-1}{1}$ ， a, b, c, d 為實數，則下列何者正確？

(1) $a=2$ (2) $b=-2$ (3) $c=3$ (4) $d=-1$ (5) $a+b+c+d=0$

答案：(235)

解析： $\vec{AB} = (0, 3, -3)$ ，又 $(0, 3, -3) \cdot (2, -1, 2) \neq 0$ ， $\therefore L$ 不與 E 平行

設 A 在 E 上之正射影為 $A'(a_1, a_2, a_3)$

$$\therefore \vec{AA'} = (a_1 - 5, a_2 + 3, a_3 - 6) = t(2, -1, 2) \Rightarrow (a_1, a_2, a_3) = (2t + 5, -t - 3, 2t + 6)$$

$$\text{代入 } E \text{ 得 } 2(2t + 5) - (-t - 3) + 2(2t + 6) - 7 = 0 \Rightarrow 9t + 18 = 0 \Rightarrow t = -2$$

$$\therefore A'(1, -1, 2)$$

設 B 在 E 上之正射影為 $B'(b_1, b_2, b_3)$

$$\therefore \vec{BB'} = (b_1 - 5, b_2, b_3 - 3) = t(2, -1, 2) \Rightarrow (b_1, b_2, b_3) = (2t + 5, -t, 2t + 3)$$

$$\text{代入 } E \text{ 得 } 2(2t + 5) - (-t) + 2(2t + 3) - 7 = 0 \Rightarrow 9t + 9 = 0 \Rightarrow t = -1$$

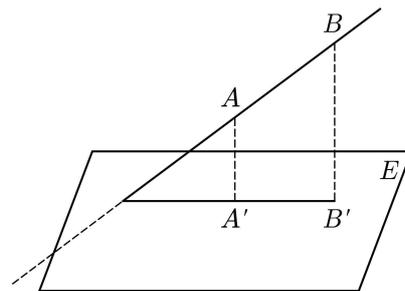
$$\therefore B'(3, 1, 1)$$

$$\vec{A'B'} = (2, 2, -1) = -(-2, -2, 1)$$

$$\text{又 } L' \text{ 過 } B'(3, 1, 1), \therefore \text{直線 } L': \frac{x-3}{-2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{1}$$

$$\therefore a = -2, b = -2, c = 3, d = 1, a + b + c + d = 0$$

故選(2)(3)(5)



() 12、設 $F(2, 3)$ 為拋物線上之焦點，又 $P(-1, 3)$ 為拋物線上之頂點，則：

- (1) 對稱軸為 $y = 3$ (2) 準線為 $x = 1$ (3) 拋物線開口向右
 (4) 拋物線方程式為 $(x+1)^2 = 12(y-3)$ (5) 拋物線程式為 $y^2 - 6y - 12x - 3 = 0$

答案：(135)

解析：(1)(3)○

(2)×：準線為 $x = -4$

(4)×(5)○：拋物線方程式為 $(y-3)^2 = 12(x+1) \Rightarrow y^2 - 6y - 12x - 3 = 0$

故選(1)(3)(5)

() 13、 $(x+y)^n$ 的展開式中，若第 7 項係數最大，則 $n = ?$

- (1)11 (2)12 (3)13 (4)14 (5)15

答案：(123)

解析：考慮以下三種情形：

(1) 若 $(x+y)^n$ 展開式中，第 7 項係數最大，即 C_6^n 最大 $\Rightarrow n = 12$

(2) 若 $(x+y)^n$ 展開式中，第 6 項與第 7 項係數相等且最大，即 $C_5^n = C_6^n \Rightarrow n = 11$

(3) 若 $(x+y)^n$ 展開式中，第 7 項與第 8 項係數相等且最大，即 $C_6^n = C_7^n \Rightarrow n = 13$

故選(1)(2)(3)

第貳部分：選填題(占 35分)

說明：1. 第 A 至 G 題，將答案填入卷末之答案欄中。

2. 每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A、方程式 $\Gamma: \frac{x^2}{4-t} + \frac{y^2}{t-1} = 1$ 為橢圓，且長軸在 x 軸上，則 t 之範圍為_____。

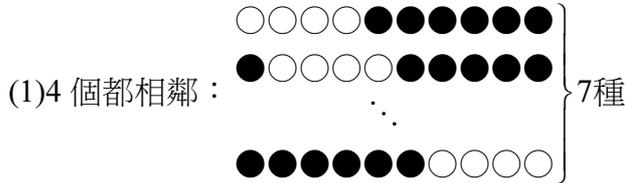
答案： $1 < t < \frac{5}{2}$

解析：
$$\begin{cases} 4-t > 0 \\ t-1 > 0 \\ 4-t > t-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t < 4 \\ t > 1 \\ 2t < 5 \Rightarrow t < \frac{5}{2} \end{cases}, \therefore 1 < t < \frac{5}{2}$$

B、某儀器顯示幕有10個指示燈排成一排，每個指示燈皆以發光或熄滅來表示不同的信號，若每次其中有4個發光，且至少3個相鄰，一共可表示_____種不同的信號。

答案：49

解析：分以下兩種情形討論：



(2) 3個相鄰，另1個不相鄰：

先放6個不亮的



去插7個空隙

$$P_2^7 = 42, \therefore 7 + 42 = 49$$

C、若 n 為正整數，且 $1, 2, 3, 4, \dots, (n-1), n$ 的標準差為 $\sqrt{10}$ ，則 $n =$ _____。

答案：11

解析： $\mu = \frac{1}{n}(1+2+\dots+n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \mu^2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{n+1}{2} \left[\frac{2n+1}{3} - \frac{n+1}{2} \right] = \frac{n+1}{2} \cdot \frac{4n+2-3n-3}{6} = \frac{(n+1)(n-1)}{12} = 10 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow n^2 - 1 = 120 \Rightarrow n^2 = 121 \Rightarrow n = 11$$

D、小彭有做走樓梯的運動，第一次走1階，第二次走2階，……，以此類推，共走40次。若小彭有從一樓開始走樓梯，先往上走，途中轉向2次，最終回到一樓，則小彭有最晚在第_____次後，需要作第一次轉向。

答案：10

解析：僅轉向兩次，則移動方向是上→下→上，且最終回到一樓

表示向上爬與向下走樓梯的階數相同

而總階數和為 $\sum_{n=1}^{40} n = \frac{41 \times 40}{2} = 820$ ，故向上共爬了 $\frac{820}{2} = 410$ 階

假設第 k 次到第 m 次走樓梯的方向為向下

則向下共走了 $\sum_{n=k}^m n = \frac{(k+m)(m-k+1)}{2} = 410 \Rightarrow (k+m)(m-k+1) = 820$

因為 k, m 都是整數，且 $1 \leq k < m \leq 40$ ，取 $\begin{cases} k+m=41 \\ m-k+1=20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=11 \\ m=30 \end{cases}$

故小彭有在第10次後需要作第一次轉向

E、空間中三直線 \overline{OA} , \overline{OB} , \overline{OC} 互相垂直，且 $\overline{OH} \perp \overline{AB}$ ，若 $\overline{AB} = 4$, $\overline{AC} = 6$, $\angle BAC = 60^\circ$ ，則 $\overline{CH} =$ _____。

答案： $3\sqrt{3}$

解析： 設 $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$, $\overline{OC} = c$

$$a^2 + b^2 = 16 \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad a^2 + c^2 = 36 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

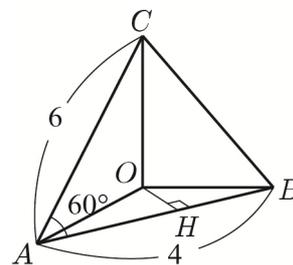
$$b^2 + c^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ = 16 + 36 - 24 = 28 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} : b^2 - c^2 = -20 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} - \textcircled{4} : 2c^2 = 48 \Rightarrow c^2 = 24 \Rightarrow c = 2\sqrt{6} \Rightarrow a = 2\sqrt{3}, b = 2$$

$$\text{又 } \triangle OAB \text{ 中, } \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \overline{OH} \Rightarrow \overline{OH} = \sqrt{3}$$

$$\triangle OCH \text{ 中, } \overline{CH}^2 = 3 + 24 = 27 \Rightarrow \overline{CH} = 3\sqrt{3}$$



F、若 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ，且 $\cos \theta - \sin \theta = \frac{1}{2}$ ，則 $\tan^2 \theta - \frac{1}{\tan^2 \theta} =$ _____。

答案： $-\frac{16\sqrt{7}}{9}$

解析： $\because \cos \theta - \sin \theta = \frac{1}{2}$ ， $\therefore \cos^2 \theta - 2 \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow 1 - 2 \cos \theta \sin \theta = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos \theta \cdot \sin \theta = \frac{3}{8}$$

$$\text{考慮 } (\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = 1 + 2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{7}{4}$$

$$\text{又 } \theta \text{ 為銳角, 故 } \sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\therefore \tan^2 \theta - \frac{1}{\tan^2 \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{\sin^4 \theta - \cos^4 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} = \frac{(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}{\left(\frac{3}{8}\right)^2}$$

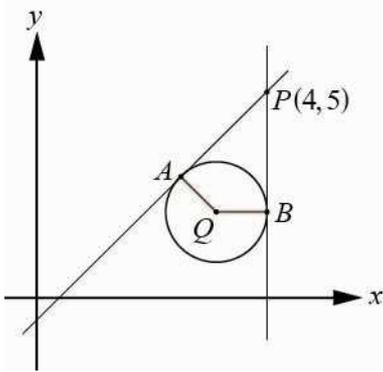
$$= \frac{64}{9} \cdot (\sin \theta - \cos \theta)(\sin \theta + \cos \theta)$$

$$= \frac{64}{9} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} = -\frac{16\sqrt{7}}{9}$$

G、過 $P(4,5)$ 對圓 $C: (x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$ 所作之切線方程式為 _____。

答案： $4x - 3y = 1, x = 4$

解析：



$Q(3,2), r=1$, 令切線 $L: y-5 = m(x-4) \Rightarrow mx - y + 5 - 4m = 0$

$$d(Q, L) = r \Rightarrow \frac{|3m - 2 + 5 - 4m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1 \Rightarrow |3 - m| = \sqrt{m^2 + 1} \Rightarrow m^2 - 6m + 9 = m^2 + 1$$

$$\Rightarrow 6m = 8 \Rightarrow m = \frac{4}{3} \Rightarrow L: y - 5 = \frac{4}{3}(x - 4) \Rightarrow 3y - 15 = 4x - 16$$

$\Rightarrow 4x - 3y = 1$ 或 $x = 4$ (鉛直)

答案卷

第壹部分：選擇題（占 65 分）

一、 單選題（占 35 分）

1	2	2	3	3	4	4	5	5	4	6	5	7	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

二、 多選題（占 30 分）

8	13	9	1234	10	124	11	235	12	135	13	123
---	----	---	------	----	-----	----	-----	----	-----	----	-----

第貳部分：選填題（占 35 分）

A	$1 < t < \frac{5}{2}$	B	49	C	11
D	10	E	$3\sqrt{3}$	F	$-\frac{16\sqrt{7}}{9}$
G	$4x - 3y = 1, x = 4$				