109 學年度學科能力測驗
全真模擬試題(C 卷)

數學考科

教師用

測驗範圍：高中數學一、二年級

作答注意事項

考試時間：100 分鐘

題型：

- 單選題共 6 題
- 多選題共 7 題
- 選填題共 7 題

作答方式：將答案填入卷末之答案欄中

註：此份試題本為模擬學科能力測驗之測驗形式，作答方式仍以未來實際之測驗形式為準。

※請聽從指示後才翻頁作答

三民書局

第壹部分：選擇題（占 65 分）

一、 單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，將答案填入卷末之答案欄中。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

(　　)1、若 $\overline{AB}$ 為橢圓 Γ ：$\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的一弦，且 $\overline{AB}$ 之中點為 $M(4,2)$ ，則 $\overleftrightarrow{AB}$ 方程式為何？

(1) $x+2y=8$　(2) $2x+y=8$　(3) $x-2y=8$　(4) $2x-y=8$　(5) $2x-y=-8$

答案：(1)

解析：設 $A(\alpha_1,\beta_1),\ B(\alpha_2,\beta_2)\in\Gamma$

$$\Rightarrow (4,2)=(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2},\frac{\beta_1+\beta_2}{2})\Rightarrow \alpha_1+\alpha_2=8,\ \beta_1+\beta_2=4$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1{}^2+4\beta_1{}^2=36\cdots\cdots①\\ \alpha_2{}^2+4\beta_2{}^2=36\cdots\cdots②\end{cases}$$

① − ② ： $\alpha_1{}^2-\alpha_2{}^2+4(\beta_1^2-\beta_2{}^2)=0\Rightarrow(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)=-4(\beta_1+\beta_2)(\beta_1-\beta_2)$

$$\Rightarrow 8(\alpha_1-\alpha_2)=-16(\beta_1-\beta_2)\Rightarrow\frac{\beta_1-\beta_2}{\alpha_1-\alpha_2}=\frac{8}{-16}=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore \overleftrightarrow{AB}:\ y-2=-\frac{1}{2}(x-4)\Rightarrow 2y-4=-x+4\Rightarrow x+2y=8$$

故選(1)

(　　)2、若 $2x+y+3z=3x-2y+z=4x-y+2z,\ xyz\neq 0$ 則 $\dfrac{2x-y+z}{3x+4y-z}$ 之值為何？

(1) $\dfrac{-5}{19}$　(2) $\dfrac{1}{3}$　(3) $\dfrac{4}{11}$　(4) $\dfrac{6}{7}$　(5) $-\dfrac{3}{7}$

答案：(1)

解析：$\begin{cases}2x+y+3z=3x-2y+z\\ 3x-2y+z=4x-y+2z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-3y-2z=0\\ x+y+z=0\end{cases}$

$$\Rightarrow x:y:z=\begin{vmatrix}-3&-2\\1&1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}-2&1\\1&1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1&-3\\1&1\end{vmatrix}=-1:-3:4$$

令 $x=-t,\ y=-3t,\ z=4t$

$$\therefore\frac{2x-y+z}{3x+4y-z}=\frac{-2t+3t+4t}{-3t-12t-4t}=\frac{5t}{-19t}=-\frac{5}{19}$$

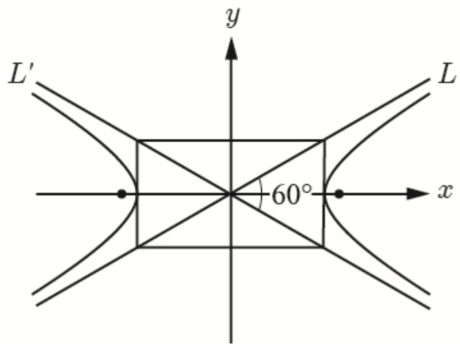
故選(1)

(　　)3、若 $a>\sqrt{2}$，已知雙曲線 Γ：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{2}=1$ 的兩漸近線的銳交角為 $60°$，且雙曲線中心到其中一焦點之距離為 c，則 $\dfrac{c}{a}=$？

(1) $\sqrt{2}$　(2) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　(3) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　(4) 2　(5) $\sqrt{3}$

答案：(3)

解析：$b^2=2\Rightarrow b=\sqrt{2}$



如圖，$\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow a=\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{6}$

$\Rightarrow c^2=a^2+b^2=6+2=8\Rightarrow c=2\sqrt{2}$

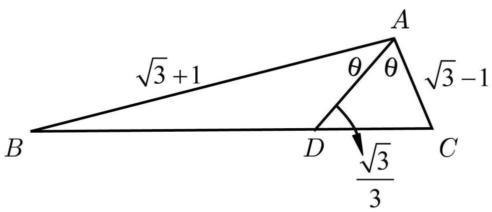
$\therefore \dfrac{c}{a}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

故選(3)

(　　)4、$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=\sqrt{3}+1, \overline{AC}=\sqrt{3}-1$，且 $\angle A$ 的內角平分線長為 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，則 $\triangle ABC$ 之面積為 (1) $\dfrac{1}{2}$　(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(3) $\sqrt{2}$　(4) $\sqrt{3}$　(5) $\sqrt{6}$

答案：(2)

解析：



$\because \triangle ABC=\triangle ABD+\triangle ACD$

$\therefore \dfrac{1}{2}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)\sin 2\theta=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}+1)\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta+\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}-1)\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta$

$\Rightarrow \sin 2\theta=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta(\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1)$

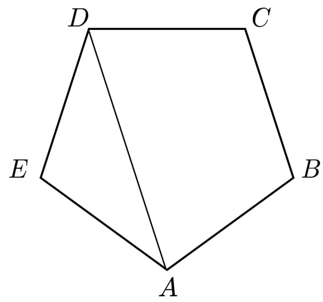
$\Rightarrow 2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}}{6}\sin\theta$

$\Rightarrow \cos\theta=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\theta=60°$

$\triangle=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)\sin 120°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

故選(2)

(　　)5、正五邊形 $ABCDE$，如右圖，若 $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AE}$，



則下列何者正確？(已知 $\sin 18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$)

(1) $x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$　(2) $y=1$　(3) $x+y=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

(4) $x-y=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$　(5) $xy=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

答案：(4)

解析：設邊長為 a，則 $\overline{AD}^2=a^2+a^2-2\cdot a\cdot a\cos 108°=\frac{3+\sqrt{5}}{2}a^2$

$\therefore \overline{AD}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}a$，又 $\overline{AD}//\overline{BC}$

$\therefore \overrightarrow{BC}=\frac{2}{\sqrt{5}+1}\overrightarrow{AD}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{AD}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{BE}$

$\Rightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB})=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{AE}$

$\therefore \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\overrightarrow{AE}$，$\therefore x=1,\ y=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

則 $x+y=\frac{3+\sqrt{5}}{2},\ x-y=\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ xy=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

故選(4)

(　　)6、眼睛之所以叫做「靈魂之窗」，是因為即使周遭瞬間變暗，人的眼睛仍然能漸漸適應環境。當光強度由 1000 Td 瞬間降至 10 Td, 過 t 秒後人所能接受的光強度為 $I(t)$；其中 $I(t)=10+990\times a^{-5t}$ (a 為大於 1 的常數)。當光強度由 1000 Td 瞬間降至 10 Td 後，人接受光的強度為 21 Td 時，需要花費 s 秒，則 s 的值為何？(光的強度單位為 Td)

(1) $\frac{1+2\log 3}{5\log a}$　(2) $\frac{1+3\log 3}{5\log a}$　(3) $\frac{2+\log 3}{5\log a}$　(4) $\frac{2+2\log 3}{\log a}$　(5) $\frac{2+3\log 3}{5\log a}$

答案：(1)

解析：$I(s)=21\Rightarrow 10+990\times a^{-5s}=21\Rightarrow 990\times a^{-5s}=11\Rightarrow a^{-5s}=\frac{1}{90}\Rightarrow \log a^{-5s}=\log\frac{1}{90}=-\log 90$

$\Rightarrow -5s\log a=-(\log 10+\log 3^2)\Rightarrow s=\frac{1+2\log 3}{5\log a}$

故選(1)

二、 多選題（占 **35** 分）

說明：第 7 題至第 13 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，將答案填入卷末之答案欄中。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

(　　　　)7、設兩直線 $L_1:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-6}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$ 與 $L_2:\dfrac{x-2}{n}=\dfrac{y+8}{5}=\dfrac{z+16}{3}$ 相交於一點 $Q(a,b,c)$，而包含 L_1 與 L_2 的平面方程式為 $E:x+py+qz+r=0$，則下列敘述何者正確？

(1) $n>0$　(2) $a+b+c<0$　(3) $p>q$　(4) $a+c=r$　(5) L_1 與 L_2 之銳交角大於 $60°$

答案：(1)(4)(5)

解析：(1)○：$\begin{cases}1+3t=2+n\cdot s\\6+2t=-8+5s\\-1-t=-16+3s\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3t-ns=1\\2t-5s=-14\\-t-3s=-15\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=3\\s=4\end{cases}\Rightarrow 9-4n=1\Rightarrow n=2$

(2)×：$t=3$ 代回 $\Rightarrow Q(1+3\cdot3,6+2\cdot3,-1-3)\Rightarrow Q(10,12,-4)$

$\therefore a+b+c=10+12+(-4)=18$

(3)×：$\overline{v_1}=(3,2,-1),\overline{v_2}=(2,5,3)$

$\overline{n}=\overline{v_1}\times\overline{v_2}=(\begin{vmatrix}2&-1\\5&3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1&3\\3&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3&2\\2&5\end{vmatrix})=(11,-11,11)=11(1,-1,1)$

$\therefore E=x-y+z+r=0$

$Q(10,12,-4)$ 代入 $\Rightarrow 10-12+(-4)+r=0$

$\Rightarrow r=6$

$\Rightarrow E:x-y+z+6=0$

$\therefore p=-1,q=1\Rightarrow p<q$

(4)○：$a+c=10+(-4)=6=r$

(5)○：$\cos\theta=\pm\dfrac{\overline{v_1}\cdot\overline{v_2}}{|\overline{v_1}||\overline{v_2}|}=\pm\dfrac{6+10-3}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{38}}=\pm\dfrac{13}{\sqrt{532}}=\pm\dfrac{13\sqrt{133}}{266}$

又 θ 為銳角

$\therefore\cos\theta=\dfrac{13\sqrt{133}}{266}>\dfrac{1}{2}\Rightarrow\theta>60°$

故選(1)(4)(5)

(　　　)8、設 $a>0, a\neq 1$，關於 $y=a^x$，x 為任意實數的圖形，下列敘述何者為真？

(1)圖形向右上升

(2)圖形恆過(1, 0)

(3)圖形以 x 軸為漸近線

(4)圖形與 $y=-a^{-x}$ 之圖形對稱於原點

(5)圖形與 $y=\log_a x$ 之圖形對稱於直線 $x+y=0$

答案：(3)(4)

解析：(1)×：若 $a>1$，則向右上升。若 $0<a<1$，則向左上升

(2)×：恆過(0,1)

(5)×：對稱於 $x-y=0$

故選(3)(4)

(　　　)9、已知 α,β 為銳角，$\cos(2\alpha+\beta)=\frac{2}{7}, \cos(\alpha+\beta)=\frac{2}{3}$，則下列何者正確？

(1) $\sin(2\alpha+\beta)=\frac{3\sqrt{5}}{7}$　(2) $\sin(2\alpha+\beta)=-\frac{3\sqrt{5}}{7}$　(3) $\sin(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{5}}{3}$

(4) $\cos\alpha=\frac{19}{21}$　(5) $\cos\beta=\frac{58}{63}$

答案：(1)(3)(4)(5)

解析：(1)○(2)×：$\because \cos(\alpha+\beta)=\frac{2}{3}$，$\therefore 0^\circ<\alpha+\beta<90^\circ \Rightarrow 0^\circ<\alpha<90^\circ \Rightarrow 0^\circ<2\alpha+\beta<180^\circ$

$$\therefore \sin(2\alpha+\beta)=+\sqrt{1-(\frac{2}{7})^2}=\frac{3\sqrt{5}}{7}$$

(3)○：$\sin(\alpha+\beta)=+\sqrt{1-(\frac{2}{3})^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

(4)○：$\cos\alpha=\cos[(2\alpha+\beta)-(\alpha+\beta)]=\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{3}+\frac{3\sqrt{5}}{7}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{4}{21}+\frac{15}{21}=\frac{19}{21}$

(5)○：$\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\frac{2}{3}\cdot\frac{19}{21}+\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{4\sqrt{5}}{21}=\frac{38+20}{63}=\frac{58}{63}$

故選(1)(3)(4)(5)

(　　　)10、某次測驗成績的算術平均數是 36 分，標準差為 4 分，最高分為 50 分，最低分為 20 分。因成績太差，老師打算以下列一種方式來調整成績：

① $y_1=x+30$　② $y_2=2x$　③ $y_3=\frac{1}{2}x+50$

其中 x 為原始成績，y_1, y_2, y_3 為調整後的成績，則下列敘述何者正確？

(1)欲使所有同學都及格，要採用①案

(2)欲使所有同學的成績集中，要採用③案

(3)欲使算術平均數最高，要採用②案

(4)欲使四分位距最小，要採用①案

(5)欲使標準差最大，要採用②案

答案：(2)(3)(5)

解析：(1)×：應選③才可使最低 20 分調成 60 分

(2)(5)○：$\sigma_1=\sigma=4$，$\sigma_2=2\sigma=8$，$\sigma_3=\frac{1}{2}\sigma=2$

(3)○：$\mu_1=36+30=66$，$\mu_2=2\times36=72$，$\mu_3=\frac{1}{2}\times36+50=68$

(4)×：若原始成績之四分位距為 q，則 $q_1=q,\ q_2=2q,\ q_3=\frac{1}{2}q$，故應選③

故選(2)(3)(5)

(　　　)11、從 100～999 的三位數中任選一數，若其百位，十位，個位數字分別為 a,b,c，則下列何者正確？

(1) $a=b=c$ 之機率為 $\frac{9}{899}$

(2) $a\neq b\neq c$ 之機率為 $\frac{18}{25}$

(3) $(a-b)(b-c)(c-a)=0$ 之機率為 $\frac{7}{25}$

(4) $abc=0$ 之機率為 $\frac{19}{100}$

(5)二次方程式 $x^2-2ax+bc=0$ 有重根的機率為 $\frac{2}{125}$

答案：(2)(3)(4)

解析：共 $999-100+1=900$ 個三位數

(1)×：$a=b=c:1=1=1, 2=2=2, \cdots, 9=9=9\Rightarrow 9$ 種，$\therefore P=\frac{9}{900}=\frac{1}{100}$

(2)○：$P=\frac{9\times P_2^9}{900}=\frac{72}{100}=\frac{18}{25}$

(3)○：$P=1-\frac{18}{25}=\frac{7}{25}$

(4)○：考慮 $abc\neq0\Rightarrow 9\times9\times9=729$，$P=1-\frac{729}{900}=\frac{171}{900}=\frac{19}{100}$

(5)×：$D=4a^2-4bc=0\Rightarrow a^2=bc$

(1)$a=1:(b,c)=(1,1)$ (2)$a=2:(b,c)=(4,1),(2,2),(1,4)$ (3)$a=3:(b,c)=(9,1),(3,3),(1,9)$ (4)$a=4:(b,c)=(8,2),(4,4),(2,8)$ (5)$a=5:(b,c)=(5,5)$	(6)$a=6:(b,c)=(9,4),(6,6),(4,9)$ (7)$a=7:(b,c)=(7,7)$ (8)$a=8:(b,c)=(8,8)$ (9)$a=9:(b,c)=(9,9)$

$P=\dfrac{17}{900}$

故選(2)(3)(4)

(　　　　)12、若α，β為$2x^2-3x+4=0$之根，則下列何者正確？

(1) $2\alpha+2\beta=3$　(2) $\alpha^2+\beta^2=-\dfrac{7}{4}$　(3) $(\alpha-\beta)^2=\dfrac{23}{4}$

(4) $\alpha^3+\beta^3=-\dfrac{45}{8}$　(5) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=-\dfrac{7}{8}$

答案：(1)(2)(4)(5)

解析：$\because \alpha+\beta=\dfrac{3}{2}$，$\alpha\beta=2$

(1)○：$2\alpha+2\beta=2(\alpha+\beta)=2\cdot\dfrac{3}{2}=3$

(2)○：$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\dfrac{9}{4}-4=-\dfrac{7}{4}$

(3)×：$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\dfrac{9}{4}-8=-\dfrac{23}{4}$

(4)○：$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=\dfrac{27}{8}-3\cdot2\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{27}{8}-9=-\dfrac{45}{8}$

(5)○：$\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=-\dfrac{7}{8}$

故選(1)(2)(4)(5)

(　　　　)13、好歡樂模型公司有R、B兩台模型上色機，其上色錯誤的機率分別為 0.2、0.5，兩台一起使用時，至少有一台會上色錯誤的機率為 0.6。上色的順序可配置成R在前B在後(RB)或B在前R在後(BR)；如兩台皆上色錯誤則模型為失敗品無法出售。下列敘述何者正確？

(1)兩台模型上色機的配置互不影響

(2) RB、BR兩種配置方式模型為失敗品的機率大小為$RB>BR$

(3)已知R上色錯誤，則RB、BR兩種配置方式模型為失敗品的機率大小為$RB>BR$

(4) BR 的配置方式模型會有瑕疵但非失敗品的機率是 0.5

(5) BR 配置下，有 100 隻模型要上色，

在 B 上色完全錯誤的情況下可以出售的模型有 50 隻

答案：(1)(4)

解析：由題目可知 $P(R)=0.2, P(B)=0.5, P(R\cup B)=0.6$

(1)○：$\because P(R\cup B)=P(R)+P(B)-P(R\cap B)$

$\Rightarrow$ 失敗品的機率為 $P(R\cap B)=0.2+0.5-0.6=0.1$

$P(R)\cdot P(B)=0.2\times 0.5=0.1=P(R\cap B)$

所以兩台模型上色機的配置互不影響

(2)×：失敗品為兩台機器都要上色錯誤，故 $RB=BR$

(3)×：承(1)，兩台模型上色機的配置互不影響

已知 R 上色錯誤，則只要 B 上色錯誤就會是失敗品

故為失敗品的機率 $RB=BR=0.5$

(4)○：有瑕疵但非失敗品的機率

$=$至少有一台上色錯誤$-$兩台皆上色錯誤$=0.6-0.1=0.5$

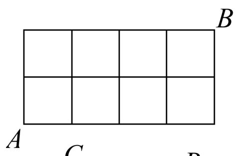
(5)×：失敗品會有 $0.2\times 100=20$，可以出售的模型有 $100-20=80$ 隻

故選(1)(4)

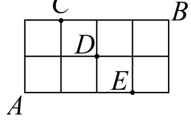
第貳部分：選填題(占 **35** 分)

說明： 1.第A至G題，將答案填入卷末之答案欄中。
2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A、棋盤圖形如右，其中每一小格皆為正方形，「兵」由 A 往 B 走，「卒」由 B 往 A 走，兵與卒同時出發，速度相同，兩者均沿最短路線前進，若在每一個分叉點，選擇前進方向之機率相同，則兵、卒相遇之機率為________。



答案：$\frac{17}{64}$



解析：兵、卒在 C 相遇之機率 $(\frac{1}{2})^3\times[(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^3+(\frac{1}{2})^3]=\frac{1}{16}$

兵、卒在 D 相遇之機率 $[3\times(\frac{1}{2})^3]\times[3\times(\frac{1}{2})^3]=\frac{9}{64}$

兵、卒在 E 相遇之機率 $(\frac{1}{2})^3\times[(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^3+(\frac{1}{2})^3]=\frac{1}{16}$

$\therefore \frac{9}{64}+\frac{1}{16}\times 2=\frac{17}{64}$

B、若$1<a<b<a^2$，下列四個實數 $2,\ \log_a b,\ \log_b a,\ \log_{ab} a^2$ 中最大的是________，最小的是________。

答案：$2,\ \log_b a$

解析：$\log_a a<\log_a b<\log_a a^2 \Rightarrow 1<\log_a b<2 \Rightarrow 1>\dfrac{1}{\log_a b}>\dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{2}<\log_b a<1$

$$\log_{ab} a^2=\frac{\log_a a^2}{\log_a ab}=\frac{2}{\log_a a+\log_a b}=\frac{2}{1+\log_a b}$$

又 $2<1+\log_a b<3 \Rightarrow \dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{1+\log_a b}>\dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{2}{3}<\dfrac{2}{1+\log_a b}<1$

故 2 最大，$\log_b a$ 最小

C、一雙曲線之貫軸長 4，漸近線與貫軸之夾角為$60°$，設此雙曲線之正焦弦長為ℓ，則 $\ell=$______。

答案：12

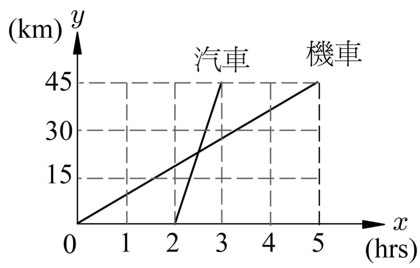
解析：令中心$O(0,0)$，$a=2$

漸近線斜率$m=\tan 60°=\sqrt{3}$，漸近線方程式$\sqrt{3}x-y=0,\ \sqrt{3}x+y=0$

設橫向雙曲線：$\dfrac{x^2}{1}-\dfrac{y^2}{3}=k$，又$k=4=a^2$

$\therefore$雙曲線方程式：$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1,\ \ell=\dfrac{2b^2}{a}=12$

D、小明騎機車和小華開汽車從臺北到中壢沿相同路徑行駛 45 公里，行駛的距離 y 公里與所需的時間 x 小時的函數關係如圖所示，則汽車出發________小時後與機車相遇，又汽車比機車早________小時到達中壢。



答案：0.5, 2

解析：汽車：$y=ax+b$ 過$(2,0),(3,45)$

$$\begin{cases}0=2a+b\\45=3a+b\end{cases}\Rightarrow a=45,\ b=-90$$

$\therefore y=45x-90$

機車：$y=cx+d$ 過$(0,0),(5,45)$

$\begin{cases} 0 = d \\ 45 = 5c \end{cases} \Rightarrow c = 9$

$\therefore y = 9x$

故 $9x = 45x - 90 \Rightarrow 36x = 90 \Rightarrow x = 2.5$

$2.5 - 2 = 0.5$

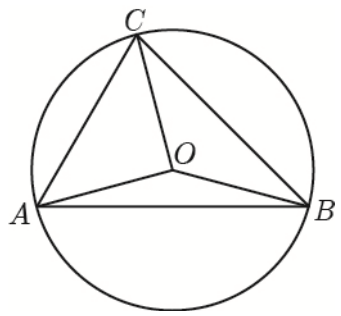
$5 - 3 = 2$

因此汽車出發 0.5 小時後和機車相遇，且汽車比機車早 2 小時到達<u>中壢</u>

E、$\triangle ABC$ 中，外心為 O，且外接圓半徑為 2，若 $\angle A = 60°$，$\angle B = 45°$，則

$|\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}| =$ ________。

答案：$2\sqrt{8 - 2\sqrt{3}}$



解析：$\because \angle A = 60°$，$\angle B = 45° \Rightarrow \angle C = 75°$

$\Rightarrow \angle AOB = 150°$，$\angle BOC = 120°$，$\angle COA = 90°$

考慮 $|\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}|^2$

$= |\overrightarrow{OA}|^2 + 4|\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 + 4\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - 4\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$

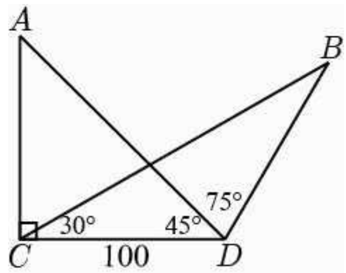
$= 4 + 4 \cdot 4 + 4 + 4 \cdot (2 \cdot 2\cos 150°) - 4(2 \cdot 2\cos 120°) - 2(2 \cdot 2\cos 90°)$

$= 4 + 16 + 4 + 16 \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2}) - 16 \cdot (-\frac{1}{2}) - 0 = 24 - 8\sqrt{3} + 8 = 32 - 8\sqrt{3}$

$\therefore |\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}| = \sqrt{32 - 8\sqrt{3}} = 2\sqrt{8 - 2\sqrt{3}}$

F、為了測量海上兩座燈塔 A, B 的距離，某人在海邊選定 C, D 兩點，並測得 $\overline{CD} = 100$ 公尺，$\angle ACD = 90°$，$\angle BCD = 30°$，$\angle ADC = 45°$，$\angle ADB = 75°$，則 $\overline{AB} =$ __________公尺。

答案：$100\sqrt{4 - \sqrt{3}}$



解析：$\triangle BCD$ 中：

$\angle BCD = 30°$，$\angle CDB = 45° + 75° = 120° \Rightarrow \angle CBD = 30°$

$\Rightarrow \overline{BD} = \overline{CD} = 100$

直角 $\triangle ACD$ 中：

$\angle ADC = \angle CAD = 45° \Rightarrow \overline{AD} = 100\sqrt{2}$

$\triangle ABD$ 中：

$\overline{AB}^2 = (100\sqrt{2})^2 + 100^2 - 2 \times 100 \times 100\sqrt{2} \times \cos 75° = 100^2(2 + 1 - 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4})$

$= 100^2[3 - (\sqrt{3} - 1)] = 100^2(4 - \sqrt{3})$

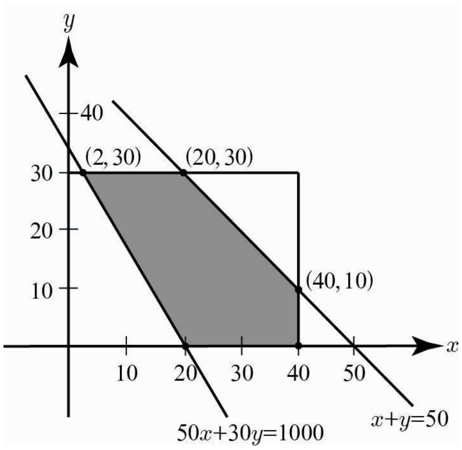
$\overline{AB} = 100\sqrt{4 - \sqrt{3}}$

G、中華電信召聘新員工，共有 1000 人應徵參加筆試。筆試場地借用某大學的教室，該校可租借的大教室有 40 間，每間可容納 50 人，每間租金 800 元；小教室有 30 間，每間可容納 30 人，每間租金 400 元。考慮監考人員的限制，筆試教室不能超過 50 間。試問租借大教室_________間，小教室_________間，來進行筆試，最省租借場地費用。

答案：2, 30

解析：設租借大教室 x 間，小教室 y 間

$$\begin{cases} 0 \le x \le 40 \\ 0 \le y \le 30 \\ 50x + 30y \ge 1000 \\ x + y \le 50 \end{cases}$$



(x, y)	$k = 800x + 400y$
(40, 10)	36000
(2, 30)	13600
(20, 30)	28000
(20, 0)	16000
(40, 0)	32000

故租借大教室 2 間，小教室 30 間

答案卷

第壹部分： 選擇題（占 65 分）

一、 單選題（占 30 分）

1 (1) 2 (1) 3 (3) 4 (2) 5 (4) 6 (1)

二、 多選題（占 35 分）

7 (1)(4)(5) 8 (3)(4) 9 (1)(3)(4)(5) 10 (2)(3)(5) 11 (2)(3)(4) 12 (1)(2)(4)(5) 13 (1)(4)

第貳部分： 選填題（占 35 分）

A	$\frac{17}{64}$	B	$2,\ \log_b a$	C	12
D	$0.5, 2$	E	$2\sqrt{8-2\sqrt{3}}$	F	$100\sqrt{4-\sqrt{3}}$
G	$2, 30$				