

龍騰文化

數學科

黃信淳 / 臺南女中



109

學

測



最前線

掃描 QR code

可下載檔案



戰地記者龍騰報導

今年的題目以基本定義與觀念題型居多，其中基本且重要的觀念題型為：單選第 2、3、4、7 題，選填第 C、D、E 題。也有好些有趣的題目，例如：多選第 8、12 題，選填第 A、B、G 題。也有好幾題值得深思的考題，例如：多選第 9、13 題，選填第 F 題。待會試題解析時，應屆考生、未來考生、數學同好們，讓我們一起來好好享受這些題目。

發行人：李枝昌
發行所：龍騰文化事業股份有限公司
網址：<http://www.lungteng.com.tw>

電話：02-22982933
傳真：02-22989766
出刊日：109年1月31日

→ 命中率分析 2

→ 大考風向球 4

→ 試題大剖析 8

口碑好評推薦，專攻學測複習

【ALL PASS】數學學測總複習講義



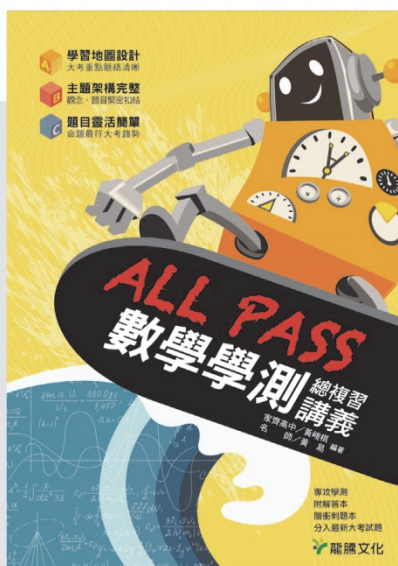
109 學科能力測驗
【ALL PASS】100%完整命中



【ALL PASS】真實**用書好評**，效率複習的唯一選擇：

- 這真的是一本可以**教得完、算得完**的總複習講義。
- 融入觀察與思考向度，不需繁複計算，**貼近大考趨勢**。
- **題量精簡但題型完整**，完全足以應付學測考題。

帶給師生們**最效率**複習講義，是【ALL PASS】的初衷。



完整 精準 效率

【ALL PASS】數學學測總複習講義

- 用最精簡題量，做最完整複習，達到最效率的成效。
- 學習地圖設計，串聯各個觀念，建構清楚脈絡與邏輯。
- 命題精準設計，貼近大考趨勢與命題原則！

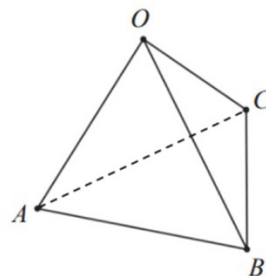
隨書搭贈★衝刺題本
團訂搭贈★18回測驗卷！
★總複習題庫光碟！

贈

109 學測 數學科 選擇題第 13 題

13. 如示意圖，四面體 $OABC$ 中， $\triangle OAB$ 和 $\triangle OAC$ 均為正三角形， $\angle BOC = 30^\circ$ 。試選出正確的選項。

- (1) $\overline{BC} > \overline{OC}$
- (2) $\triangle OBC$ 是等腰三角形
- (3) $\triangle OBC$ 的面積大於 $\triangle OAB$ 的面積
- (4) $\angle CAB = 30^\circ$
- (5) 平面 OAB 和平面 OAC 的夾角（以銳角計）小於 30°



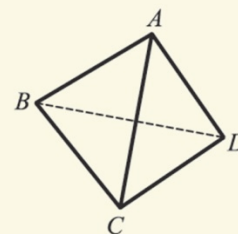
【ALL PASS】第 190 頁 範例 2

命精
題準

範例 2 二面角與三垂線定理

設四面體 $ABCD$ 中， $\overline{AC} = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{BD} = 5$ ， $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{CD} = 6$ ，如右圖所示。若平面 ACD 與平面 BCD 的夾角為 θ ，

則 $\sin \theta = \underline{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ 。



109 學測 數學科 選填題第 C 題

C. 設 S 為坐標平面上直線 $2x + y = 10$ 被平行線 $x - 2y + 15 = 0$ 與 $x - 2y = 0$ 所截的線段（含端點）。若直線 $3x - y = c$ 與 S 有交點，則 c 的最小值為 19 20。

【ALL PASS】第 151 頁 範例 5

命精
題準

範例 5 二元一次不等式的應用

平面坐標上有兩定點 $A(2, 1)$ 、 $B(-3, 4)$ ，若直線 $L: 3x - 2y + k = 0$ 與 \overline{AB} 相交，則 k 的範圍為 $-4 \leq k \leq 17$ 。



109 學測命題特色

前言

計算錯誤，萬劫不復；戒慎恐懼，高分錄取。

這次的學測題目偏向基礎概念的應用，預計各題的答對率都會比以往高。因此一旦不小心計算錯誤，就會有巨大的影響。去年、今年、明年這三年的考試型態比較接近，首先是各校系招生比序不得採取五科，其次是考試內容為 99 課綱。既然去年與今年的學測數學試題都偏向基礎概念的應用，明年又是 99 課綱的最後一年，因此筆者猜測明年的試題方向也會跟這兩年類似，畫下一個完美的句點。因此請明年的考生，確實掌握基礎概念，並且謹慎作答。

近年各大學院校科系，逐年提高學測錄取名額。再加上一般而言，學測數學難度比指考數學甲簡單，比指考數學乙難。而學測英文為四千單字，指考英文為七千單字，難度差異也相當大。因而歷年來對於自然組學生而言，學測無疑是最佳的升學途徑。

對社會組學生而言，由於指考數學乙真的非常簡單，非選擇題的部分，依照往年的出題情況，有七成以上的比例會有一大題是線性規劃。但是指考英文較難，所以學測和指考算是平分秋色，英文出色的考生考指考，數學出色的學生考學測。

科系招生條件至多採計四科，自然組與社會組科系做出明顯分流，考生可依自己的優勢科目選擇科系。去年首次實施至多採計四科，因此在選填「個人申請入學」的校系時，有些難以評估。今年的考生可以參照去年學長姐的數據來選填校系，務必慎重。否則高分落榜後，社會組的學生或許還有數學乙這條退路，但是自然組的考生，拿到數學甲的試卷，必定悔恨不已。

去年的學測是第一次各校系招生比序不得採取五科，而數學試題雖然對於全體考生的鑑別度高，對於絕大多數的科系招生都能有效地分出差異。但是頂尖考生數學幾乎都可以拿到 15 級分，因此去年醫學、中醫、牙醫的招生上有些混亂。而今年的題目難度跟去年類似，因此去年發生的事情，今年應該也都會發生，因此今年的考生拿到學測成績後，在選填科系及面試上，務必參照去年的情況，特別是目標是醫科的考生。

歷年題型分配

	102 年	103 年	104 年	105 年	106 年	107 年	108 年	109 年
單選題	6	6	4	6	7	7	6	7
多選題	6	6	6	7	6	5	7	6
選填題	8	8	10	7	7	8	7	7

109 學測試題分布 (有外圈的題號表示該題目跨章節)

冊	章	單元名稱	題號	配分	小計
一	1	數與式	5	5	17.5
	2	多項式函數	⑦, 10	7.5	
	3	指數、對數函數	⑥, ⑩	5	
二	1	數列與級數	⑧, ⑪, A	10	25
	2	排列、組合	⑧	2.5	
	3	機率	⑥, B	7.5	
	4	數據分析	12	5	
三	1	三角	1, ⑦, ⑬, D, G	20	35
	2	直線與圓	③, C	7.5	
	3	平面向量	③, 9	7.5	
四	1	空間向量	2, ⑬, ⑮	10	22.5
	2	空間中的平面與直線	⑮	2.5	
	3	矩陣	4	5	
	4	二次曲線	F	5	

這次學測，整體特色為計算量低，注重基本觀念。

比例偏重的部分如下：

1. 跨章節的題目高達 7 題。有單選題 3、6、7，多選 8、11、13，選填 E。
2. 與三角函數有關題目有 5 題，比例甚高。考三角函數的題目為單選 1、選填 D。扇形面積與三角形面積為選填 G，也算是三角函數範疇。單選 7 主要考 $y = ax^3$ 的對稱性，但也有考到三角函數的負角變換。多選 13 主要考空間概念中二面角的觀念，部分選項與三角函數有關。

試題評析
單選題

第 01 題：基本定義，只考 $y = \sin x = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$ 。

第 02 題：內積重要觀念： $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AD}$ ，可推得 C 點與 D 點在直線 AB 上的投影點相同。

第 03 題：跨章節。將 \vec{OP} 拆解成基底的線性組合 $x\vec{OC} + y\vec{OE}$ ，接著應用線性規劃中的平面分割原理，觀察出 x, y 需符合的不等式。

大考風向球

第 04 題：矩陣基本運算，但不要算反矩陣 A^{-1} 與矩陣 B ，可以大幅度降低計算量。

第 05 題： $\sqrt{101}$ 與 $\sqrt{38}$ 的估算與不等式的交集。

第 06 題：跨章節。應用對數基本運算得到 $a^2b > 10$ ，列舉 $a^2b \leq 10$ 的情況，利用機率的基本定義就可以得到答案。

第 07 題：跨章節。由 $y = ax^3$ 的對稱性可得 P, Q 兩點對稱於原點，接著由 $\cos(-\theta) = \cos\theta$ ， $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ 選出正確選項。

多選題

第 08 題：跨章節。列舉第三顆骰子的 6 種狀況，刪除不符合的，條件中用到等差數列的定義。

第 09 題：列舉與 L 夾 30° 的 4 個向量，應用內積的基本定義 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\theta$ 選出正確選項。

第 10 題：多項式因式分解即可選出正確選項。

第 11 題：跨章節。由對數的基本定義得到 a, b, c ，即可選出正確選項。選項與等比數列有關。

第 12 題：表格判讀即可選出正確選項。

第 13 題：跨章節。主要考空間概念中的四面體，前 4 個選項應用三角形全等與三角函數處理，選項(5)考二面角，可用距離越近，視角越大快速得到答案。

選填題

第 A 題：用等比數列即可得到調降三次的利潤，進而得出售價。

第 B 題：機率基本運算。

第 C 題：用線性規劃的平行線法即可得到極值會出現在端點上。

第 D 題：用餘弦定理得到 \overline{BD} ，接著算出箏形面積即可得到 \overline{AC} 。

第 E 題：跨章節。用空間直線參數式假設交點，利用垂直時內積為零得出答案。

第 F 題：解析幾何，將等腰梯形的 4 個頂點適切地放到平面坐標系上，再利用拋物線的標準式

$$x^2 = 4c(y-k) \text{ 時，焦距為 } |c|。$$

第 G 題：素養題。用半圓、 $\frac{1}{3}$ 圓、 $\triangle PQT$ 的面積即可得到月亮的面積。

結語

1. 選填第 A、G 題，以上題目是目前強調的素養導向試題，計算並不複雜，仔細理解題意後，冷靜思考，便能扎實得分。
2. 多選第 8 題，選填第 B 題，是以應用題的方式出排列組合與機率的考題。
3. 多選第 12 題是表格判讀與資料解析，題目並不困難，很容易就能選出正確選項。
4. 這個課綱明年是最後一次命題，兩年後是新課綱的第一屆考生，新舊課綱差異甚大。在此鼓勵看到這一份學測解析的高二學生，仔細熟練這兩年的學測考題，抓到難度的標準，並著重基礎概念，計算時多加小心，明年的學測獲得優異成績，口試、面試正常發揮，順利進入自己的理想學院校系就讀。

未來命題趨勢

每個章節都會出題是必然的，但是比重上不免有所落差。數與式乃高中數學入門課程，與國中銜接的宣示意味較大，明年應該也是只出一題與絕對值或算幾不等式相關的問題。二次曲線逐年弱化，明年應該也是只出一題基本觀念。數據分析這一門與統計學高度相關的學問，也是一題為主。考試不得使用計算機的現在，對數出題多所限制，也是一題為主。那麼接下來的 16 題就是四分天下的局面。

首先是實力最強勁的**線性代數**領域（向量、矩陣），這囊括了第三冊與第四冊絕大部分的範圍，因此出題量會最多。

接著是**幾何**領域（三角函數、直線、圓），而且幾何領域跟線性代數領域的相性非常好，師出同門，算是同一領域也不為過，容易出成跨章節的多選題考題。今年的三角函數相關考題就是相當好的範例，跨章節考題並不會出的很難，而是希望考生能統整各個章節學到的觀念。

然後是**組合**（指數、等比數列、等比級數、遞迴關係、排列、組合、機率），這一部分是整個第二冊的主軸，各個章節的觀念彼此呼應，考題很難細分出自哪一個章節，因此也是跨章節考題的核心。

最後是**多項式**，延續國中時代二次多項式的學習，因此在第一冊第二章就早早登場。但是多項式的學習，要等到學完微積分，才能對高次方多項式函數的圖形有全盤的了解，才算完整。因此學測的多項式考題無法過度深入，一般是以兩題為主。

以下所列這八大取向的題目，往後（明年以及 108 課綱施行以後）的考試，都是教學以及命題的重點，考生宜參考本次學測深奧幽玄的問題以及筆者靈機一閃的詳解，深入了解數學思考的真意。

1. **基本定義與觀念**：單選 1，單選 4，多選 10，多選 11，選填 A，選填 B。

2. **重要概念**：向量內積 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AD} \Leftrightarrow \vec{AB} \perp \vec{CD}$ （單選 2）。

向量基底線性組合 $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ （單選 3）。

$y = ax^3$ 的對稱性（單選 7）。

物體遠近與視角大小的關係（多選 13）。

線性規劃中，由平行線法的觀念可知極值必發生在端點上（選填 C）。

餘弦定理（選填 D）。

參數式（選填 E）。

拋物線標準式與焦距的關係（選填 F）。

3. **估算**：單選 5。

4. **列舉**：單選 6，多選 8，多選 9。

5. **生活情境**：多選 8，選填 A，選填 B，選填 G。

6. **閱讀素養**：多選 8，多選 12，選填 G。

7. **圖表解讀**：多選 12。

8. **巧思妙解**：單選 4，多選 13，選填 F。



第壹部分：選擇題 (占 65 分)

一、單選題 (占 35 分)

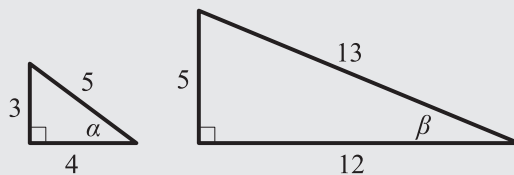
(此份試卷解題係依據大學考試中心於 109 年 1 月 20 日所公告之答案為主)

說明：第 1 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1 直角三角形的邊角關係

已知兩個直角三角形三邊長分別為 3,4,5、5,12,13， α, β 分別為它們的一角，如下圖所示。試選出正確的選項。

- (1) $\sin \alpha > \sin \beta > \sin 30^\circ$
- (2) $\sin \alpha > \sin 30^\circ > \sin \beta$
- (3) $\sin \beta > \sin \alpha > \sin 30^\circ$
- (4) $\sin \beta > \sin 30^\circ > \sin \alpha$
- (5) $\sin 30^\circ > \sin \alpha > \sin \beta$ 。



出 處：龍騰版《數學 3》第 1 章 三角

《【ALL PASS】數學學測總複習講義》第 8 單元 三角

解題觀念：正弦函數 $y = \sin x = \text{對邊除以斜邊}$ 。

答 案：(2)

解 析： $\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = 0.5$ ， $\sin \alpha = \frac{3}{5} = 0.6$ ， $\sin \beta = \frac{5}{13} \approx 0.38$ ，

因此 $\sin \alpha > \sin 30^\circ > \sin \beta$ ，

故選(2)。

**2 空間向量的內積**

空間中有相異四點 A, B, C, D ，已知內積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ 。試選出正確的選項。

- (1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ (2) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ (3) \overrightarrow{AB} 與 \overrightarrow{CD} 平行 (4) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$
 (5) A, B, C, D 四點在同一平面上。

出處：龍騰版《數學4》第1章 空間向量

《【ALL PASS】數學學測總複習講義》第11單元 空間向量

解題觀念：向量內積相等時，表示兩者的投影點相同。

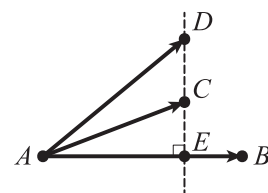
答案：(1)

解析：如圖， $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0,$$

故選(1)。

**3 平面向量的表示法**

如圖所示， O 為正六邊形之中心。試問下列哪個向量的終點 P 落在 $\triangle ODE$ 內部（不含邊界）？

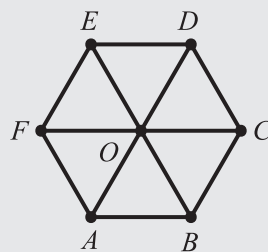
(1) $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE}$

(2) $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OE}$

(3) $\overrightarrow{OP} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OE}$

(4) $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OE}$

(5) $\overrightarrow{OP} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{OC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OE}$ 。



試題大剖析

出處：龍騰版《數學3》第2章 直線與圓

《【ALL PASS】數學學測總複習講義》第9單元 直線與圓
龍騰版《數學3》第3章 平面向量

《【ALL PASS】數學學測總複習講義》第10單元 平面向量

解題觀念：向量表示為基底的線性組合，與線性規劃的平面分割。

答案：(2)

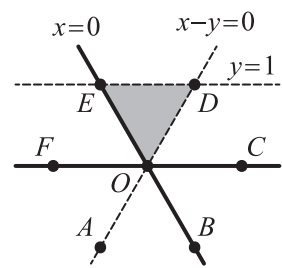
解析：如圖。令 $\vec{OP} = x\vec{OC} + y\vec{OE}$ ，

P 落在直線 OE 右側的條件為 $x > 0$ ，

P 落在直線 OD 左側的條件為 $x - y < 0$ ，

P 落在直線 DE 下方的條件為 $y < 1$ ，

故選(2)。



4 矩陣的運算

令 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ， $B = I + A + A^{-1}$ ，試選出代表 BA 的選項。

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 18 & 24 \end{bmatrix}$ 。

出處：龍騰版《數學4》第3章 矩陣

《【ALL PASS】數學學測總複習講義》第13單元 矩陣

解題觀念：單位矩陣、反矩陣、矩陣乘法與加法。

答案：(5)

解析： $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 15 & 19 \end{bmatrix}$ ，

$$BA = (I + A + A^{-1})A = A + A^2 + I$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 15 & 19 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 18 & 24 \end{bmatrix}，$$

故選(5)。

**5 數線上的幾何**

試問數線上有多少個整數點與點 $\sqrt{101}$ 的距離小於5，但與點 $\sqrt{38}$ 的距離大於3？

(1) 1個 (2) 4個 (3) 6個 (4) 8個 (5) 10個。

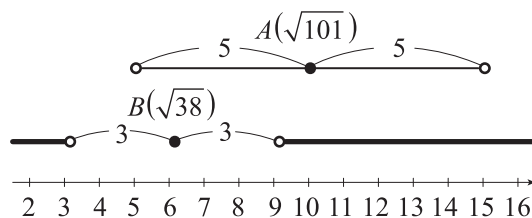
出處：龍騰版《數學1》第1章 數與式

《【ALL PASS】數學學測總複習講義》第1單元 數與式

解題觀念：根號的估算，與不等式的交集。

答案：(3)

解析： $\sqrt{101} = 10.1\dots$ ， $\sqrt{38} = 6.2\dots$ ，令所求整數為 n 。



如上圖，細線為 $\sqrt{101}-5 < n < \sqrt{101}+5$ ，粗線為 $n < \sqrt{38}-3$ 或 $n > \sqrt{38}+3$ 。

故 $\sqrt{38}+3 < n < \sqrt{101}+5 \Rightarrow 9.2\dots < n < 15.1\dots \Rightarrow n = 10, 11, 12, 13, 14, 15$ ，

符合的整數有6個，故選(3)。

6 機率的定義與性質

連續投擲一公正骰子兩次，設出現的點數依序為 a, b 。試問發生 $\log(a^2) + \log b > 1$ 的機率為多少？

(1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{3}{4}$ (5) $\frac{5}{6}$ 。

出處：龍騰版《數學1》第3章 指數、對數函數

《【ALL PASS】數學學測總複習講義》第3單元 指數與對數函數

龍騰版《數學2》第3章 機率

《【ALL PASS】數學學測總複習講義》第6單元 機率

解題觀念：對數加法，與機率列舉法。

答案：(4)

試題大剖析

解 析： $\log(a^2) + \log b > 1 \Rightarrow \log(a^2b) > \log 10$

$$\Rightarrow a^2b > 10。$$

右圖中，斜線格子為 $a^2b \leq 10$ ，

白色格子為 $a^2b > 10$ 。

因此所求機率為 $\frac{27}{36} = \frac{3}{4}$ ，

故選(4)。

		b					
		1	2	3	4	5	6
a	1	斜線	斜線	斜線	斜線	斜線	斜線
	2	斜線	斜線	斜線	斜線	斜線	斜線
	3	斜線	斜線	斜線	斜線	斜線	斜線
	4	斜線	斜線	斜線	斜線	斜線	斜線
	5	斜線	斜線	斜線	斜線	斜線	斜線
	6	斜線	斜線	斜線	斜線	斜線	斜線

7 簡單多項式函數及其圖形

坐標平面上，函數圖形 $y = -\sqrt{3}x^3$ 上有兩點 P, Q 到原點距離皆為 1。已知點 P 坐標為 $(\cos \theta, \sin \theta)$ ，試問點 Q 坐標為何？

- (1) $(\cos(-\theta), \sin(-\theta))$
- (2) $(-\cos \theta, \sin \theta)$
- (3) $(\cos(-\theta), -\sin \theta)$
- (4) $(-\cos \theta, \sin(-\theta))$
- (5) $(\cos \theta, -\sin \theta)$ 。

出 處：龍騰版《數學 1》第 2 章 多項式函數

《【ALL PASS】數學學測總複習講義》第 2 單元 多項式函數

龍騰版《數學 3》第 1 章 三角

《【ALL PASS】數學學測總複習講義》第 8 單元 三角

解題觀念：三次函數的點對稱性質，與三角函數的換算。

答 案：(4)

解 析：如圖，三次函數 $y = -\sqrt{3}x^3$ 以原點為對稱中心，

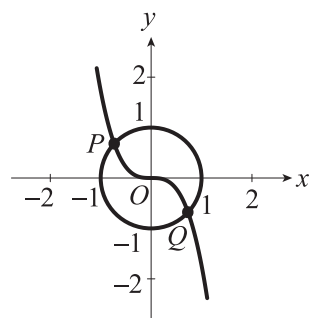
由對稱性可知 P, Q 兩點對稱於原點，

因此 Q 點坐標為 $(-\cos \theta, -\sin \theta)$ 。

選項中只有選項(4) $(-\cos \theta, \sin(-\theta))$

化簡後為 $(-\cos \theta, -\sin \theta)$ ，

故選(4)。





二、多選題（占 30 分）

說明：第 8 題至第 13 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

8 邏輯、集合與計數原理

有一個遊戲的規則如下：丟三顆公正骰子，若所得的點數恰滿足下列 (A) 或 (B) 兩個條件之一，可得到獎金 100 元；若兩個條件都滿足，則共得 200 元獎金；若兩個條件都不滿足，則無獎金。

(A) 三個點數皆為奇數或者皆為偶數

(B) 三個點數由小排到大為等差數列

若已知有兩顆骰子的點數分別為 1, 3，且所得獎金為 100 元，則未知的骰子點數可能為何？

(1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 5 (5) 6。

出處：龍騰版《數學 2》第 1 章 數列與級數

《【ALL PASS】數學學測總複習講義》第 4 單元 數列與級數

龍騰版《數學 2》第 2 章 排列、組合

《【ALL PASS】數學學測總複習講義》第 5 單元 排列、組合

解題觀念：排列組合列舉法。

答案：(1)(2)

解析：三顆骰子點數為 1, 3, 1，可得 100 元。僅符合(A)。

三顆骰子點數為 1, 3, 2，可得 100 元。僅符合(B)。

三顆骰子點數為 1, 3, 3，可得 100 元。僅符合(A)。

三顆骰子點數為 1, 3, 4，可得 0 元。(A)(B)都不符合。

三顆骰子點數為 1, 3, 5，可得 200 元。(A)(B)都符合。

三顆骰子點數為 1, 3, 6，可得 0 元。(A)(B)都不符合。

故選(1)(2)。

9 平面向量的內積

在坐標平面上，有一通過原點 O 的直線 L ，以及一半徑為 2、圓心為原點 O 的圓 Γ 。 P, Q 為 Γ 上相異 2 點，且 $\overline{OP}, \overline{OQ}$ 分別與 L 所夾的銳角皆為 30° ，試選出內積 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 之值可能發生的選項。
 (1) $2\sqrt{3}$ (2) $-2\sqrt{3}$ (3) 0 (4) -2 (5) -4 。

出處：龍騰版《數學 3》第 3 章 平面向量

《【ALL PASS】數學學測總複習講義》第 10 單元 平面向量

解題觀念：向量內積的定義。

答案：(4)(5)

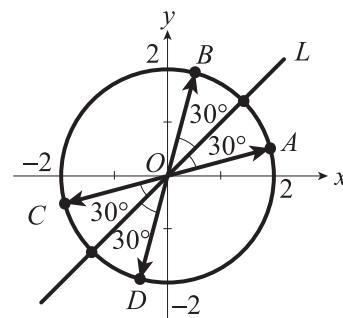
解析：如圖， P, Q 為 A, B, C, D 四點其中相異兩點，

因此 $\angle POQ$ 可能為 60° 、 120° 、 180° ，

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 2 \times 2 \cos \angle POQ = 4 \cos \angle POQ，$$

$$4 \cos 60^\circ = 2，4 \cos 120^\circ = -2，4 \cos 180^\circ = -4。$$

故選(4)(5)。



10 多項式方程式

考慮多項式 $f(x) = 3x^4 + 11x^2 - 4$ ，試選出正確的選項。

(1) $y = f(x)$ 的圖形和 y 軸交點的 y 坐標小於 0

(2) $f(x) = 0$ 有 4 個實根

(3) $f(x) = 0$ 至少有一個有理根

(4) $f(x) = 0$ 有一根介於 0 與 1 之間

(5) $f(x) = 0$ 有一根介於 1 與 2 之間。

出處：龍騰版《數學 1》第 2 章 多項式函數

《【ALL PASS】數學學測總複習講義》第 2 單元 多項式函數



解題觀念：因式分解。

答 案：(1)(4)

解 析： $f(x) = (3x^2 - 1)(x^2 + 4)$ 。

選項(1)： $x = 0$ 代入， $f(0) = -4$ ，因此 $y = f(x)$ 的圖形與 y 軸的交點為 $(0, -4)$ 。

選項(2)(3)(4)(5)： $f(x) = 0$ 的 4 個根為 $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ ， $\pm 2i$ 。

故選(1)(4)。

11 對數

設 a, b, c 為實數且滿足 $\log a = 1.1$ 、 $\log b = 2.2$ 、 $\log c = 3.3$ 。試選出正確的選項。

(1) $a + c = 2b$

(2) $1 < a < 10$

(3) $1000 < c < 2000$

(4) $b = 2a$

(5) a, b, c 成等比數列。

出 處：龍騰版《數學 1》第 3 章 指數、對數函數

《【ALL PASS】數學學測總複習講義》第 3 單元 指數與對數函數

龍騰版《數學 2》第 1 章 數列與級數

《【ALL PASS】數學學測總複習講義》第 4 單元 數列與級數

解題觀念：對數換成指數，次方為有理數時的估算。

答 案：(3)(5)

解 析： $a = 10^{1.1}$ ， $b = 10^{2.2}$ ， $c = 10^{3.3}$ ， $\log 2 \approx 0.3010 \Rightarrow 10^{0.3010} \approx 2$ 。

選項(1)(5)： $b = 10^{2.2} = (10^{1.1})^2 = a^2$ ， $c = 10^{3.3} = (10^{1.1})^3 = a^3$ ，

因此 a, b, c 的關係應為 $ac = b^2$ ，而非 $a + c = 2b$ ，且 a, b, c 為等比數列。

選項(2)： $a = 10^{1.1}$ ， $10 = 10^1 < 10^{1.1} < 10^{1.3010} \approx 20$ ，因此 $10 < a < 20$ 。

選項(3)： $c = 10^{3.3}$ ， $1000 = 10^3 < 10^{3.3} < 10^{3.3010} \approx 2000$ ，因此 $1000 < c < 2000$ 。

選項(4)： $b = a^2 \neq 2a$ 。

故選(3)(5)。

12 一維數據分析

下表是 2011 年至 2018 年某國總就業人口與農業就業人口的部分相關數據，各年度的人口以人數計，有些是以千人計，有些以萬人計，例如 2011 年總就業人口為 1,070.9 萬人，65 歲以上男性農業就業人口為 69.1 千人。試根據表格資料選出正確的選項。

年別	就業人口			男性農業就業人口按年齡別分			
	總就業人口 (萬人)	農業就業 人口 (萬人)	男性農業 就業人口 (千人)	39 歲以下 (千人)	40-49 歲 (千人)	50-64 歲 (千人)	65 歲以上 (千人)
2011 年	1,070.9	54.2	386.3	67.6	85.4	164.2	69.1
2012 年	1,086.0	54.4	394.9	67.5	87.0	169.5	70.9
2013 年	1,096.7	54.4	391.5	66.6	83.9	171.3	69.7
2014 年	1,107.9	54.8	391.2	65.8	79.8	173.0	72.6
2015 年	1,119.8	55.5	403.1	71.7	76.9	181.3	73.2
2016 年	1,126.7	55.7	404.5	77.4	77.4	176.4	73.3
2017 年	1,135.2	55.7	405.1	73.9	78.1	178.3	74.8
2018 年	1,143.4	56.1	415.1	72.0	78.8	184.9	79.4

- (1)從 2013 年至 2018 年，65 歲以上的男性農業就業人口逐年遞增
- (2)從 2013 年至 2018 年，50 歲至 64 歲之男性農業就業人口逐年遞增
- (3)上表中，每一年的男性農業就業人口占總就業人口的比率都小於百分之五
- (4)上表中，每一年 50 歲至 64 歲之男性農業就業人口都少於 49 歲以下之男性農業就業人口
- (5)就 65 歲以上之男性農業就業人口而言，2018 年比 2011 年增加了不到一萬人。

出 處：龍騰版《數學 2》第 4 章 數據分析

《【ALL PASS】數學學測總複習講義》第 7 單元 數據分析

解題觀念：表格判讀。

答 案：(1)(3)

解 析：選項(1)： $69.7 < 72.6 < 73.2 < 73.3 < 74.8 < 79.4$ ，逐年遞增。

選項(2)：2015 年為 181.3 千人，2016 年為 176.4 千人，人數減少。

選項(3)：總就業人口都超過 1000 萬人，而男性農業就業人口都低於 50 萬人。

選項(4)：2011 年就不符合了，50 至 64 歲為 164.2 千人，49 歲以下為 $67.6 + 85.4 = 153$ 千人。

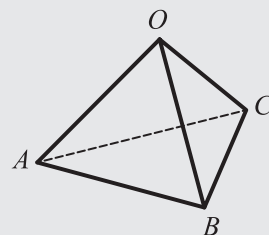
選項(5)：增加了 $79.4 - 69.1 = 10.3$ 千人。

故選(1)(3)。

**13 空間概念**

如示意圖，四面體 $OABC$ 中， $\triangle OAB$ 和 $\triangle OAC$ 均為正三角形， $\angle BOC = 30^\circ$ 。試選出正確的選項。

- (1) $\overline{BC} > \overline{OC}$
 (2) $\triangle OBC$ 是等腰三角形
 (3) $\triangle OBC$ 的面積大於 $\triangle OAB$ 的面積
 (4) $\angle CAB = 30^\circ$
 (5) 平面 OAB 和平面 OAC 的夾角（以銳角計）小於 30° 。



出處：龍騰版《數學3》第1章 三角

《【ALL PASS】數學學測總複習講義》第8單元 三角

龍騰版《數學4》第1章 空間向量

《【ALL PASS】數學學測總複習講義》第11單元 空間向量

解題觀念：正弦定理、三角形面積等於 $\frac{1}{2}ab\sin C$ 與二面角。

答案：(2)(4)

解析：選項(2)(4)：令 $\overline{OA} = a$ 。在 $\triangle OBC$ 與 $\triangle ABC$ 中， $\overline{BO} = \overline{BA} = a$ ， $\overline{CO} = \overline{CA} = a$ ，共用 \overline{BC} ，因此 $\triangle OBC$ 與 $\triangle ABC$ 全等，且兩者皆為 $30^\circ-75^\circ-75^\circ$ 的等腰三角形。又 $\angle CAB = \angle COB = 30^\circ$ 。

選項(1)：由正弦定理： $\frac{\overline{BC}}{\sin 30^\circ} = \frac{\overline{OB}}{\sin 75^\circ} = \frac{\overline{OC}}{\sin 75^\circ}$ ，因此 $\overline{BC} < \overline{OC}$ 。

選項(3)： $\triangle OBC$ 的面積為 $\frac{1}{2}a^2 \sin 30^\circ$ ， $\triangle OAB$ 的面積為 $\frac{1}{2}a^2 \sin 60^\circ$ ，因此 $\triangle OBC$ 的面積小於 $\triangle OAB$ 的面積。

選項(5)：如圖，由視角的觀念：長度固定的木棒離眼睛越近，兩端與眼睛所構成的視角越大，故兩平面的夾角大於 30° 。

選項(5)詳細說明：

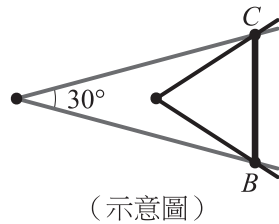
令 \overline{OA} 中點為 D ，所求兩平面的夾角為 $\angle BDC$ ，而 $\angle BOC = 30^\circ$ 。

在等腰三角形 DBC 中， $\overline{DB} = \overline{DC} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ 。

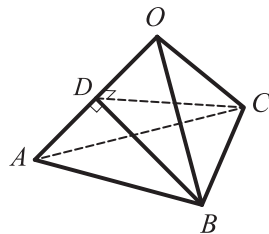
在等腰三角形 OBC 中， $\overline{OB} = \overline{OC} = a > \frac{\sqrt{3}}{2}a$ 。

如圖所示，因此 $\angle BDC > 30^\circ$ 。

故選(2)(4)。



(示意圖)



第貳部分：選填題 (占 35 分)

說明：1.第 A 至 G 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(14-36)
2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A 數列

網路賣家以 200 元的成本取得某件模型，並以成本的 5 倍作為售價，差價即為利潤。但過了一段時間無人問津，因此賣家決定以逐次減少一半利潤的方式調降售價。若依此方式進行，則調降三次後該模型的售價為 ⑭⑮⑯ 元。

出處：龍騰版《數學 2》第 1 章 數列與級數

《【ALL PASS】數學學測總複習講義》第 4 單元 數列與級數

解題觀念：等比數列 $a_n = a_1 \times r^{n-1}$ 。

答案：300

解析：成本為 200 元，一開始的售價為 1000 元，利潤為 800 元，

調降三次後利潤為 $800 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 100$ 元，售價為 $200 + 100 = 300$ 元。

B 機率的定義與性質

有一按鈕遊戲機，每投幣一枚，可按遊戲機三次。第一次按下會出現黑色或白色的機率各為 $\frac{1}{2}$ ；第二或第三次按下，出現與前一次同色的機率為 $\frac{1}{3}$ ，不同色的機率為 $\frac{2}{3}$ 。今某甲投幣一枚後，按三次均出現同色的機率為 $\frac{⑰}{⑱}$ 。(化為最簡分數)

出處：龍騰版《數學 2》第 3 章 機率

《【ALL PASS】數學學測總複習講義》第 6 單元 機率

解題觀念：機率的樹狀圖。

答案： $\frac{1}{9}$

解析：黑黑黑的機率為 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$ ，白白白的機率亦同，

故所求機率為 $\frac{1}{18} \times 2 = \frac{1}{9}$ 。

**C 線性規劃**

設 S 為坐標平面上直線 $2x + y = 10$ 被平行線 $x - 2y + 15 = 0$ 與 $x - 2y = 0$ 所截的線段（含端點）。若直線 $3x - y = c$ 與 S 有交點，則 c 的最小值為 ⑱⑲。

出 處：龍騰版《數學3》第2章 直線與圓

《【ALL PASS】數學學測總複習講義》第9單元 直線與圓

解題觀念：線性規劃的極值發生在端點。

答 案：-5

解 析：由線性規劃中，平行線法的觀念可知， $3x - y = c$ 的極值必發生在端點上。

$$\begin{cases} x - 2y + 15 = 0 \\ 2x + y = 10 \end{cases} \Rightarrow A(x, y) = (1, 8)。$$

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + y = 10 \end{cases} \Rightarrow B(x, y) = (4, 2)。$$

以點 $A(1, 8)$ 代入 $3x - y = c$ ，可得 $c = -5$ 。

以點 $B(4, 2)$ 代入 $3x - y = c$ ，可得 $c = 10$ 。

故 c 的最小值為 -5 。

D 正弦定理、餘弦定理

平面上有一箏形 $ABCD$ ，其中 $\overline{AB} = \overline{BC} = \sqrt{2}$ ， $\overline{AD} = \overline{CD} = 2$ ， $\angle BAD = 135^\circ$ 。

則 $\overline{AC} = \frac{\textcircled{1}\sqrt{\textcircled{2}\textcircled{3}}}{\textcircled{4}}$ 。（化為最簡根式）

出 處：龍騰版《數學3》第1章 三角

《【ALL PASS】數學學測總複習講義》第8單元 三角

解題觀念：餘弦定理，與三角形面積等於 $\frac{1}{2}ab\sin C$ 。

答 案： $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

試題大剖析

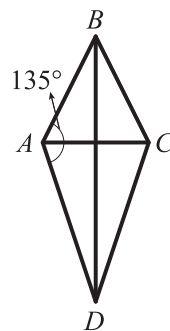
解 析：由餘弦定理： $\overline{BD}^2 = \sqrt{2}^2 + 2^2 - 2 \times \sqrt{2} \times 2 \cos 135^\circ$

$$= 2 + 4 + 4 = 10$$

$$\Rightarrow \overline{BD} = \sqrt{10}。$$

$\triangle ABD$ 的面積為 $\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 2 \sin 135^\circ = 1$ ，箏形 $ABCD$ 的面積為 2。

$$\text{因此 } \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BD} = 2 \Rightarrow \overline{AC} = \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}。$$



E 空間直線方程式

空間中有三點 $A(1,7,2)$ 、 $B(2,-6,3)$ 、 $C(0,-4,1)$ 。若直線 L 通過 A 點並與直線 BC 相交且垂直，則 L 和直線 BC 的交點坐標為 (25) (26)，(27) (28)，(29) (30)。

出 處：龍騰版《數學4》第2章 空間中的平面與直線

《【ALL PASS】數學學測總複習講義》第12單元 空間中的平面與直線

解題觀念：空間直線的參數式，與兩個向量垂直時內積為零。

答 案： $(-3, -1, -2)$

解 析： $\overline{BC} = (-2, 2, -2) = 2(-1, 1, -1)$ ，直線 BC 的參數式之一為
$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -6 + t \\ z = 3 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}。$$

令交點 P 的坐標為 $(2-t, -6+t, 3-t)$ ，則 $\overline{AP} = (1-t, -13+t, 1-t)$ 。

由於直線 AP 垂直直線 BC ，所以 $\overline{AP} \cdot \overline{BC} = 0$

$$\Rightarrow (1-t, -13+t, 1-t) \cdot (-2, 2, -2) = 0$$

$$\Rightarrow -2 + 2t - 26 + 2t - 2 + 2t = 0 \Rightarrow 6t - 30 = 0 \Rightarrow t = 5，$$

$t = 5$ 代入 $(2-t, -6+t, 3-t)$ 可得交點 P 的坐標為 $(-3, -1, -2)$ 。

**F 拋物線**

坐標平面上有一條拋物線 Γ ，其上有四個點構成等腰梯形，且等腰梯形的對稱軸與 Γ 的對稱軸重合。已知該等腰梯形的上底為4、下底為6、高為14，則 Γ 的焦距為 $\frac{\textcircled{1}}{\textcircled{2}\textcircled{3}}$ 。(化為最簡分數)

出處：龍騰版《數學4》第4章 二次曲線

《【ALL PASS】數學學測總複習講義》第14單元 二次曲線

解題觀念：解析幾何，從拋物線標準式計算焦距。

答案： $\frac{5}{56}$

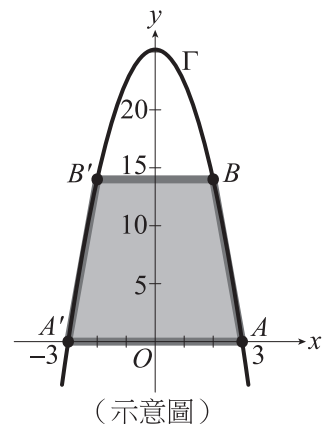
解析：如圖，定坐標 $A(3,0)$ ， $A'(-3,0)$ ， $B(2,14)$ ， $B'(-2,14)$ ，

令拋物線 Γ 的方程式為 $y = a(x+3)(x-3) = a(x^2-9)$ 。

以 $B(2,14)$ 代入可得 $14 = -5a \Rightarrow a = \frac{-14}{5}$ ，

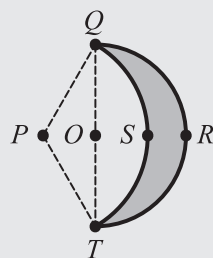
拋物線 Γ 的方程式為 $y = \frac{-14}{5}(x^2-9) \Rightarrow x^2 = \frac{-5}{14}y + 9$ ，

焦距為 $\frac{1}{4} \times \left| \frac{-5}{14} \right| = \frac{5}{56}$ 。



G 廣義角與極坐標

設計師為天文館設計以不銹鋼片製成的月亮形狀，其中有一款設計圖如右圖所示：圖中，圓弧 QRT 是一個以 O 點為圓心、 \overline{QT} 為直徑的半圓， $\overline{QT} = 2\sqrt{3}$ 。圓弧 QST 的圓心在 P 點， $\overline{PQ} = \overline{PT} = 2$ 。圓弧 QRT 與圓弧 QST 所圍出的灰色區域 $QRTSQ$ 即為某一天所見的月亮形狀。設此灰色區域的面積為 $a\pi + \sqrt{b}$ ，其中 π 為圓周率， a 為有理數， b 為整數，則 $a = \frac{34}{35}$ （化為最簡分數）， $b = 36$ 。



出處：龍騰版《數學3》第1章 三角

《【ALL PASS】數學學測總複習講義》第8單元 三角

解題觀念：扇形面積，與三角形面積。

答案： $a = \frac{1}{6}$ ， $b = 3$

解析： $\triangle PQT$ 為等腰三角形， $\overline{OQ} = \overline{OT} = \sqrt{3}$ ，

因此 $\triangle OPQ$ 與 $\triangle OPT$ 為全等的直角三角形。

直角三角形 OPQ 中， $\overline{PQ} = 2$ ， $\overline{OQ} = \sqrt{3}$ ，

因此 $\overline{OP} = 1$ ，且 $\triangle OPQ$ 為 $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ 的直角三角形， $\angle QPT = 120^\circ$ 。

扇形 $PQST$ 的面積為 $\frac{1}{3} \times 2^2 \pi = \frac{4\pi}{3}$ ，

半圓 QRT 的面積為 $\frac{1}{2} \times \sqrt{3}^2 \pi = \frac{3\pi}{2}$ ，

$\triangle PQT$ 的面積為 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 1 = \sqrt{3}$ ，

因此斜線區域面積為 $\frac{3\pi}{2} + \sqrt{3} - \frac{4\pi}{3} = \frac{1}{6}\pi + \sqrt{3}$ ，

故 $a = \frac{1}{6}$ ， $b = 3$ 。



參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$ ；

首項為 a ，公比為 r ($r \neq 1$) 的等比數列前 n 項之和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ 。

2. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ ，

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B，$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}。$$

3. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑)；

$\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ 。

4. 一維數據 X ： x_1, x_2, \dots, x_n ，

$$\text{算術平均數 } \mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i，$$

$$\text{標準差 } \sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - n\mu_X^2 \right)}。$$

5. 二維數據 (X, Y) ： $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，

$$\text{相關係數 } r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}，$$

迴歸直線 (最適合直線) 方程式 $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$ 。

6. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$ 。

7. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ， $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ ， $\log_{10} 7 \approx 0.8451$ 。

8. 角錐體積 = $\frac{1}{3}$ 底面積 \times 高。