

111 學年度學科能力測驗

全真模擬試題(B 卷)

數學 B 考科

測驗範圍：高中數學一、二年級數學 B

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

作答方式：將答案填入卷末之答案欄中。

※此份試題本為模擬學科能力測驗之測驗形式，作答方式仍以實際學測之測驗形式為準。

選擇（填）題計分方式：

- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\frac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※請聽從指示後才翻頁作答

第壹部分、選擇（填）題（占 90 分）

一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題 5 分。

1. 已知 $a = \sin \pi^2$ ，則選出正確的選項？

(1) $-\frac{\sqrt{3}}{2} < a < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $-\frac{\sqrt{2}}{2} < a < -\frac{1}{2}$ (3) $-\frac{1}{2} < a < 0$ (4) $0 < a < \frac{1}{2}$

(5) $\frac{1}{2} < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. 所謂「新興病毒」在自然界裡未必真的是新的病毒。他們可能原來就是自然界組成的一份子，只是過去未傳染到人類，或是未對人類造成疾病而被忽略。這些病毒或許只是感染野生動物，沒有機會接觸到人類。隨著人類與大自然的界限越來越模糊，（包括探險旅遊，捕捉、獵食、販賣野生動物或是森林開發），都讓人類有機會接觸到這些病毒。尤其是現在長途旅行的交通便利，很多城市人口密集，一旦這些病毒可以感染人類細胞及複製時，那便有可能在人群中傳播，對人類健康造成威脅。許多新興病毒都是 RNA 病毒，例如 SARS、MERS 及 2019-nCoV (SARS-CoV-2) 冠狀病毒，這些 RNA 病毒複製時，可能會產生突變或重組。冠狀病毒在許多動物廣泛存在，過去也有數種冠狀病毒 (human coronavirus) 會感染人類造成普通感冒或肺炎。這個病毒具有外套膜，病毒顆粒直徑大小約 120nm。若與人的頭髮直徑相比較的話，頭髮直徑約 5×10^{-3} cm。

（1nm = 10^{-9} m）。請問頭髮直徑約是病毒顆粒直徑的幾倍？請選出正確的科學記號表示：

(1) 416.6 倍 (2) 4166 倍 (3) 4.166×10^1 倍 (4) 4.166×10^2 倍

(5) 4.166×10^3 倍

3. 在數學中，班佛定律 (Benford's law) 描述了真實數字數據集中首位數字的頻率分布。一堆從實際生活得出的數據中，以 1 為首位數字的數，出現機率約為總數的三成。而越大的數，以它為首幾位的數出現的機率就越低。此定律可用於檢查各種數據是否有造假，但要注意使用條件：(1) 數據至少 3000 筆以上。(2) 不能有人為操控。在數學中的班佛定律，以 n 為首位數字的數，出現比例以機率表示為 $P(n) = \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$ 。請問在某間銀行中，存款金額首位數字為 3 或 4 或 5 的比例有多少？（ $\log 2 \approx 0.3010$ ）

(1) 20% (2) 30% (3) 40% (4) 50% (5) 60%

4. 已知三角形 ABC 的三邊長分別為 $\overline{AB} = 5$ 、 $\overline{CB} = 9$ 、 $\overline{AC} = 7$ 。請選出和向量 \overline{AB} 的內積結果為最大值之選項：

- (1) \overline{AC} (2) \overline{CA} (3) \overline{BC} (4) \overline{CB} (5) \overline{AB}

5. 假設地球儀球心為原點 $(0,0,0)$ ，正北極為 z 軸正向，本初子午線位於 xz 平面上，其上一點 P 的球面坐標為 $(30\cos(-60^\circ)\cos 23^\circ, 30\cos(-60^\circ)\sin 23^\circ, 30\sin(60^\circ))$ ，判斷下列敘述何者錯誤？

- (1) 點 P 在東經 23° 經線上
 (2) 點 P 在南緯 60° 緯度線上
 (3) 地球儀上的赤道長度為 60π
 (4) 點 P 在東半球
 (5) 地球儀上 R 點坐標 $(30\cos(-60^\circ)\cos(-37^\circ), 30\cos(-60^\circ)\sin(-37^\circ), 30\sin(60^\circ))$ ，在地球儀表面上 P 點與 R 點兩點距離為 10π

6. 有甲乙兩個袋子，甲袋子內裝有 1 黑球 2 白球，乙袋內有 1 白球 3 黑球，今擲一不公正硬幣 1 次（其出現正面的機率為 0.3），若出現正面，則從甲袋抽出一球，若出現反面，則從乙袋抽出一球。已知取出的是白球的狀態下，此球來自乙袋的機率最接近下列哪一個選項？

- (1) 0.2 (2) 0.3 (3) 0.4 (4) 0.5 (5) 0.6

二、多選題（占 30 分）

說明：第 7 題至第 12 題，每題 5 分。

7. 設 $0 < a < 1$ ，且 $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 3$ ，試選出正確的選項。

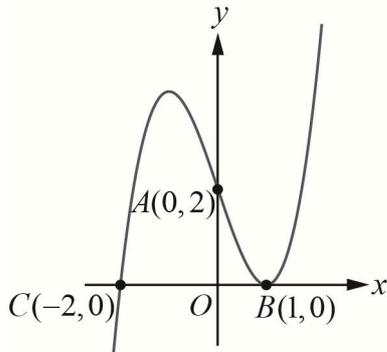
(1) $a^1 + a^{-1} = 7$ (2) $a^2 + a^{-2} = 47$ (3) $a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

(4) $a^{\frac{3}{2}} - a^{-\frac{3}{2}} = -8\sqrt{5}$ (5) $a^{\frac{3}{4}} - a^{-\frac{3}{4}} = -4$

8. 在坐標平面上，已知圓 $C: x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$ 與直線 $L: 3x - 4y + k = 0$ ，試選出正確的選項。

- (1) 圓 C 的半徑為 9
- (2) 若 L 與圓 C 有最大的割線段長，則 $k = 8$
- (3) 若 $k = 10$ 時，圓 C 上恰有 3 點到 L 距離為 2
- (4) 若 $k = -2$ 時，則 L 與 C 交於相異兩點
- (5) 若 L 與 C 不相交，此時 k 可能為 -6

9. 下圖是三次函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的圖形，其中 $A(0, 2)$ 為對稱中心；在 $x = 1$ 有極小值 0，請依圖形的特徵選出正確選項。



- (1) $b = 0$
- (2) $c > 0$
- (3) $f(x)$ 可以被 $(x - 1)^2$ 整除
- (4) $f(x)$ 在 $x = 1$ 附近的一次近似為 $y = 0$
- (5) $x = -1$ 有極大值 $y = 4$ (極大值：局部最高點的 y 坐標值)

10. 三民書局出版社總部共有六層樓高，假設有 n 個人從 1 樓開始搭乘電梯必須移動到別的樓層，並且各自按下各自的樓層後，電梯只會由下往上移動並且停靠在各自乘客按下的樓層，不考慮人員進出，只考慮電梯停靠在那些樓層，請問依據下列條件選出正確的停靠的方式。

- (1) 若 $n = 1$ ，則電梯有 C_1^6 種停靠方式
- (2) 若 $n = 2$ ，則電梯有 C_2^5 種停靠方式
- (3) 若 $n = 3$ ，則電梯有 25 種停靠方式
- (4) 若 $n = 4$ ，則電梯有 30 種停靠方式
- (5) 若 $n = 5$ ，則電梯有 32 種停靠方式

11. 下表為 110 學年度學測自然級分人數統計表，請依據下表，選出正確的選項。

- (1) 眾數為 6 級分
- (2) 頂標（第 88 百分位數）為 13 級分
- (3) 均標（第 50 百分位數）為 9 級分
- (4) 此次學測自然全國平均數大於中位數
- (5) 某考生報考了 A 大某系，該系檢定標準為英數自三科均須達前標（第 75 百分位數）。他的自然考了 11 級分，沒有達自然檢定標準。

| 級分 | 自然 | | | |
|----|--------|-------|----------|-------|
| | 人數 | 百分比 | 自高分往低分累計 | |
| | | | 人數 | 百分比 |
| 15 | 4,062 | 4.34 | 4,062 | 4.34 |
| 14 | 5,824 | 6.22 | 9,886 | 10.56 |
| 13 | 6,393 | 6.83 | 16,279 | 17.38 |
| 12 | 7,209 | 7.7 | 23,488 | 25.08 |
| 11 | 7,594 | 8.11 | 31,082 | 33.19 |
| 10 | 7,495 | 8 | 38,577 | 41.2 |
| 9 | 7,828 | 8.36 | 46,405 | 49.56 |
| 8 | 8,765 | 9.36 | 55,170 | 58.92 |
| 7 | 9,499 | 10.14 | 64,669 | 69.06 |
| 6 | 11,271 | 12.04 | 75,940 | 81.1 |
| 5 | 9,950 | 10.63 | 85,890 | 91.72 |
| 4 | 6,072 | 6.48 | 91,962 | 98.21 |
| 3 | 1,560 | 1.67 | 93,522 | 99.88 |
| 2 | 97 | 0.1 | 93,619 | 99.98 |
| 1 | 10 | 0.01 | 93,629 | 99.99 |
| 0 | 10 | 0.01 | 93,639 | 100 |

12. 在 xy 平面上有五個圖形，分別為： $F_1: y = \sin x$ 、 $F_2: y = 2 \sin x$ 、 $F_3: y = \sin 3x$ 、

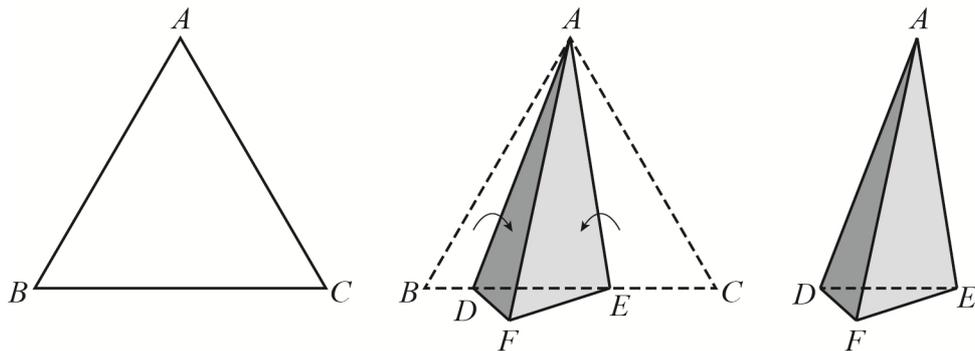
$F_4: y = \sin(3x - \frac{\pi}{3})$ 、 $F_5: y = 2 \sin(3x - \frac{\pi}{3}) + 4$ ，試選出正確選項。

- (1) F_2 是將 F_1 的圖形鉛直伸縮為原來的 2 倍而得。
- (2) F_3 是將 F_1 的圖形水平伸縮為原來的 3 倍而得。
- (3) F_4 是將 F_1 的圖形先水平伸縮為原來的 $\frac{1}{3}$ 倍，再向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 單位而得。
- (4) F_4 是將 F_1 的圖形先向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 單位，再水平伸縮為原來的 $\frac{1}{3}$ 倍而得。
- (5) F_5 是將 F_4 的圖形向上平移 4 單位，再鉛直伸縮為原來的 2 倍而得。

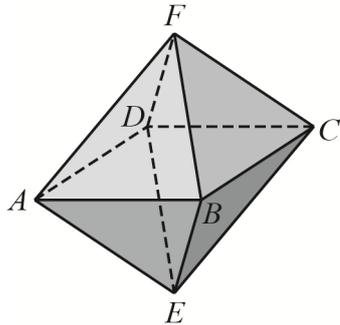
三、選填題（占 30 分）

說明：第 13 至 18 題，每題 5 分。

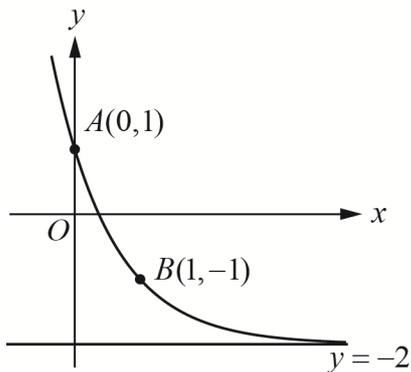
13. 如圖，已知正三角形 ABC 紙片，邊長為 132，且 $\overline{BD} = 22$ ，今沿著兩線段 \overline{AD} 、 \overline{AE} 將三角形摺起，使得其分別與 \overline{AB} 、 \overline{AC} 兩邊重和，形成四邊形 $ADFE$ ，請問四邊形 $ADFE$ 面積為_____。



14. 正八面體 $ABCDEF$ ，由 F 沿著稜線到達 E 點，如果不通過同一個點，也不一定要每個點都經過，請問有幾種走法：_____。



15. 設 a, b, c 為實數， $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，若下圖為 $y = a^{x+b} - c$ 的部分圖形，圖形通過 $A(0, 1)$ ， $B(1, -1)$ 兩點，且直線 $y = -2$ 為其漸進線，則序對 $(a, b, c) =$ _____。



16. 在人口密集的都會區發生了嚴重的疫情感染，於疫情爆發一開始有 2000 人感染確診，醫學家用數學模式 $N(t) = 2000 \times (1 + 100^{0.03t})$ 表示其遭受到感染的人數，其中 t (小時) 為時間， $N(t)$ 為被感染的人數，請問要經過_____小時後 (無條件進位至整數位)，感染人數會超過 10 萬人。($\log 7 \approx 0.8451$)

17. 當數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足遞迴關係式：
$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{3} \\ a_n = \frac{1 - a_{n-1}}{3 - 4a_{n-1}}, n \geq 2 \end{cases}$$
 , 請問 $a_{20} =$ _____。

18. 已知阿三說實話的機率為 $\frac{4}{5}$ ，阿民說實話的機率為 $\frac{3}{5}$ ，兩人說實話的狀況互相不影響。
今有一個箱子裝有 3 黃球 2 綠球 5 藍球，每球被取到的機會都相等。現自袋中任取一球，若兩人皆說黃球的條件下，該球是綠球的機率是多少_____。

第貳部分、混合題或非選擇題（占 10 分）

說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

19 至 20 題為題組

19. 令 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ， $B = I + A + A^{-1}$ ，若 $BA = rA$ 且 $r \in \mathbb{R}$ ，請問 r 之值。（單選題，占 3 分）
(1) 3 (2) 4 (3) 5 (4) 6 (5) 7

20. 已知 $C(BA) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ ，請問 C 答案是多少？（計算題，占 7 分）

答案卷

第壹部分：選擇題（占 90 分）

一、 單選題（占 30 分）

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|

二、 多選題（占 30 分）

| | | | | | |
|---|---|---|----|----|----|
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|----|----|----|

三、 選填題（占 30 分）

| | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|----|----|----|----|----|----|

第貳部分：混合題（占 10 分）

| 作 答 區 | |
|-------|--|
| 題號 | 注意：1.應依據題號順序，於作答區內作答。2.除另有規定外，書寫時應由左至右橫式書寫。3.作答須清晰，如難以辨識時，恐將影響成績評閱並傷及權益。4.不得於作答區書寫姓名、應試號碼或無關之文字、圖案符號等。 |
| 19 | |
| 20 | |

20