111 學年度學科能力測驗

全真模擬試題(A 卷)

數學 A 考科

教師用

測驗範圍：高中數學一、二年級數學 A

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

作答方式：將答案填入卷末之答案欄中。

※此份試題本為模擬學科能力測驗之測驗形式，作答方式仍以實際學測之測驗形式為準。

選擇（填）題計分方式：

- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\frac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※請聽從指示後才翻頁作答

三民書局

第壹部分、選擇（填）題（占 85 分）

一、 單選題（占 35 分）

說明：第 1 題至第 7 題，每題 5 分。

1. 計算化簡$\sqrt{\dfrac{243^4+9^8}{3^8+27^4}}$等於?

(1) $3\sqrt{3}$　(2) 9　(3) 27　(4) 81　(5) 243

答案：(4)

解析：原式$=\sqrt{\dfrac{3^{20}+3^{16}}{3^8+3^{12}}}=\sqrt{\dfrac{3^{16}(3^4+1)}{3^8(1+3^4)}}=3^4=81$，故選(4)

2. 已知圓內接四邊形 $ABCD$，$\overline{AB}=6$，$\overline{BC}=1$，$\overline{AD}=4$，$\angle BAD=120°$，$\angle ABC=150°$，$\overline{CD}=x$，請問下列何者正確？

(1) x的解不只 1 個　(2) $9<x<10$　(3) $8<x<9$　(4) $7<x<8$　(5) $10<x<11$

答案：(2)

解析：$\angle C=60°$，由餘弦定理，$(\overline{BD}^2)=6^2+4^2-2\cdot 6\cdot 4\cdot\cos A=1^2+x^2-2x\cdot\cos C$，解得

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{301}}{2}$(負不合)，$\dfrac{1+\sqrt{301}}{2}\approx 9...$，故選(2)

3. 已知溶液的 pH 值定義為$\text{pH}=-\log[\text{H}^+]$，其中$[\text{H}^+]$為此溶液中$\text{H}^+$的濃度。今欲將 pH 值為 5 與 4 的溶液按一定的比例$a:b$混合使混合後的溶液 pH 值為 4.2，請問$a:b$的比值最接近下列何者？$(10^{0.8}\approx 6.3)$

(1) $\dfrac{2}{3}$　(2) $\dfrac{1}{4}$　(3) $\dfrac{1}{2}$　(4) $\dfrac{1}{3}$　(5) $\dfrac{2}{5}$

答案：(1)

解析：pH 值為 5 的溶液的$[\text{H}^+]=10^{-5}$，pH 值為 4 的溶液的$[\text{H}^+]=10^{-4}$，兩者按比例$a:b$混合後之溶液的$[\text{H}^+]=10^{-4.2}$，得$\dfrac{a\times 10^{-5}+b\times 10^{-4}}{a+b}=10^{-4.2}$，$\dfrac{a+10b}{a+b}=10^{0.8}\approx 6.3$，得

$\dfrac{a}{b}\approx\dfrac{2}{3}$，故選(1)

4. 下列哪一個向量可以表為 $\overrightarrow{b}=(-1,1,1)$ 、 $\overrightarrow{c}=(4,5,2)$ 、 $\overrightarrow{d}=(-1,4,3)$ 三向量的線性組合？

(1) $(2,2,-2)$　(2) $(2,-2,2)$　(3) $(-2,2,2)$　(4) $(-2,-2,2)$　(5) $(-2,-2,-2)$

答案：(3)

解析：檢查 $\overrightarrow{b}$ 、 $\overrightarrow{c}$ 、 $\overrightarrow{d}$ 三向量發現共平面（ $(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})\cdot\overrightarrow{d}=0$ ），故只需檢查哪個向量可表為 $\overrightarrow{b}$ 、 $\overrightarrow{c}$ 的線性組合，因 $\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}=(-3,6,-9)=3(-1,2,-3)$，且 $(-2,2,2)\cdot(-1,2,-3)=0$，故選(3)

5. 已知單位圓內接正五邊形 $ABCDE$ 的邊長為 1，則 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}|=$

(1) $5\sqrt{5}-5$　(2) $\dfrac{5\sqrt{5}+5}{2}$　(3) $5\cos 36^{\circ}$　(4) 5　(5) $2\sqrt{5}+2$

答案：(4)

解析：令 O 為正五邊形的中心，

$$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}|$$
$$=|(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OA})|$$
$$=|(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE})-5\overrightarrow{OA}|=5\overrightarrow{OA}=5$$
，故選(4)

6. 有三組資料各 6 筆如下，令 σ_A 、 σ_B 、 σ_C 分別表 A 、 B 、 C 三組資料之標準差，則下列何者正確？

A ：21，31，51，81，61，41

B ：40，60，50，90，80，70

C ：54，81，36，63，72，45

(1) $\sigma_A=\sigma_B=\sigma_C$　(2) $\sigma_A>\sigma_B=\sigma_C$　(3) $\sigma_A>\sigma_B>\sigma_C$

(4) $\sigma_A=\sigma_B>\sigma_C$　(5) $\sigma_B>\sigma_A>\sigma_C$

答案：(3)

解析：C 資料為 B 資料的 0.9 倍，

又 B 資料的標準差＝資料 $\{21,31,41,51,61,71\}$ 的標準差 $<$ A 資料的標準差，故選(3)

7. 設 $f(x)=x^3+7x^2+7x+16$ ，求 $f(17)\div 23$ 的餘數為

(1) -6　(2) 6　(3) 10　(4) 16　(5) 22

答案：(3)

解析：將 $f(x)\div(x+6)$ 得 $f(x)=(x+6)\cdot(x^2+x+1)+10$ ，左式以 $x=17$ 代入，知 $f(17)\div 23$ 的餘數為 10 ，故選(3)

二、多選題（占 30 分）

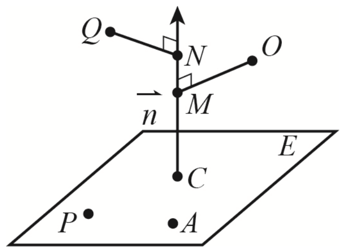
說明：第 8 題至第 13 題，每題 5 分。

8. 空間中，平面 $E:\alpha x+\beta y+\gamma z+d=0$，$P$ 為平面 E 上的動點，A 與 Q 分別為平面上和平面外的定點，O 為原點，O 不在平面 E 上，若 $\vec{n}=(\alpha,\beta,\gamma)$，試選出下列算式為定值的選項。

(1) $\vec{n}\cdot\overrightarrow{OP}$　(2) $(\vec{n}\times\overrightarrow{AP})\cdot\overrightarrow{OQ}$　(3) $(\vec{n}\times\overrightarrow{OQ})\cdot\overrightarrow{OQ}$　(4) $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}$　(5) $\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ}$

答案：(1)(3)(4)(5)

解析：如圖，令 O、Q 在 $\vec{n}$ 的投影分別為 M、N



(1)○：$\vec{n}\cdot\overrightarrow{OP}=-|\vec{n}|\times\overline{CM}$ 為定值

(2)×：$(\vec{n}\times\overrightarrow{AP})\cdot\overrightarrow{OQ}$ 為 $\vec{n}$、$\overrightarrow{AP}$、$\overrightarrow{OQ}$ 所張平行六面體之體積不為定值

(3)○：$(\vec{n}\times\overrightarrow{OQ})\cdot\overrightarrow{OQ}=0$

(4)○：$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0$

(5)○：$\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ}=|\vec{n}|\times\overline{CN}$ 為定值

9. 已知 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分別為二次多項式及三次多項式，試選出正確的選項。

(1) $f(x)\times g(x)$ 為六次多項式

(2) $g(x)$ 分別被 $(x-2)$ 與 $(99x-199)$ 除的餘式相同

(3) $f(x)\div(x-3)$ 的餘式為 r，則 $(x^2f(x))\div(x-3)$ 的餘式為 $9r$

(4) 若 $g(x)\div(x^2-3)$ 的餘式為一次式 kx，則 $(xg(x))\div(x^2-3)$ 的餘式必不為一次式

(5) $f(x)\times g(x)$ 的奇次項係數和為 $\dfrac{f(1)\times g(-1)}{2}+\dfrac{f(-1)\times g(1)}{2}$

答案：(3)(4)

解析：(1)×：$f(x)\times g(x)$ 為五次多項式

(2)×：$g(x)$ 分別被 $(x-2)$ 與 $(99x-198)$ 除的餘式才相同

(3)○：$f(3)=r$，$(x^2f(x))\div(x-3)$ 的餘式為 $3^2\times f(3)=9r$

(4)○：令 $g(x)=(x^2-3)\times Q(x)+kx$，

$$xg(x)=x(x^2-3)\times Q(x)+kx^2$$
$$=x(x^2-3)\times Q(x)+k(x^2-3)+3k$$ ，故餘式為 $3k$

(5)×：$f(x)\times g(x)$ 的奇次項係數和為

$[f(x)$ 的奇次項係數和$]\times[g(x)$ 的偶次項係數和$]$

$+[f(x)$ 的偶次項係數和$]\times[g(x)$ 的奇次項係數和$]$

$$\neq\frac{f(1)\times g(-1)}{2}+\frac{f(-1)\times g(1)}{2}$$

10. 設 M 、 N 皆為 2 階方陣， A 為 2×3 階矩陣， B 為 3×2 階矩陣， I_2 為 2 階單位矩陣， I_3 為 3 階單位矩陣，試選出正確的選項。

(1) 若 $MN=I_2$ ，則 $NM=I_2$　　(2) 若 $AB=I_2$ ，則 $BA=I_3$

(3) 若 A 不為零矩陣， $MA=A$ ，則 $BM=B$　　(4) 若 $MN=NM$ ，則 $M^{-1}N=NM^{-1}$

(5) 若 $MN=N$ 且 M^{-1} 存在，則 $MA=A$

答案：(1)

解析：(1)○： $N=M^{-1}$ ，故正確

(2)×：如 $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I_2$ ，但 $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\neq I_3$

(3)×：如 $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ ，但 $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}$

(4)×： M 可能為零矩陣，故不正確

(5)×： N 可能為零矩陣，故不正確

故選(1)

11. 試從下列選項中，選出答案為 C_n^{n+3} 的選項。

(1) $x_1+x_2+x_3+x_4=n$ 的非負整數數對 (x_1,x_2,x_3,x_4) 的個數

(2) 從 4 種皮包中共挑選出 n 個皮包的方法數

(3) 將 n 本相同的書發給 4 個小朋友的方法數

(4) 從 $(n+3)$ 個相異物中取出 3 個的方法數

(5) 若 $n>3$ ，則 $C_0^2+C_1^3+C_2^4+C_3^5+\ldots+C_n^{n+2}$ 之值

答案：(1)(2)(3)(4)(5)

解析：(1)(2)○：令 4 種皮包各挑 x_1、x_2、x_3、x_4 個，則 $x_1+x_2+x_3+x_4=n$ ，與(1)同

(3)○：令 4 個小朋友各得書 x_1、x_2、x_3、x_4 本，則 $x_1+x_2+x_3+x_4=n$ ，與(1)同

(4)○：符號定義

(5)○： $C_0^2+C_1^3+C_2^4+C_3^5+\ldots+C_n^{n+2}=C_0^3+C_1^3+C_2^4+C_3^5+\ldots+C_n^{n+2}$

$=C_1^4+C_2^4+C_3^5+\ldots+C_n^{n+2}=\cdots=C_n^{n+3}$

12. 試從下列選項中，選出恰可決定一圓的選項。

(1) 過空間中三點 $(2,7,1)$ 、 $(4,-2,-4)$ 、 $(9,-24.5,-16.5)$

(2) 過 $z=0$ 平面上 4 點 $(-1,3,0)$ 、 $(1,-3,0)$ 、 $(3,-1,0)$ 、 $(-3,-1,0)$

(3) 平面上滿足動點 P 到 $A(-1,-2)$ 的距離等於 P 到 $B(2,4)$ 的距離的 2 倍之所有 P 點所形成的圖形

(4) 平面上以 $C(-2,-4)$ 、 $D(-8,-12)$ 為直徑兩端點且與 y 軸相切

(5) 空間中 $A(1,2,4)$ 和 $B(7,6,6)$ ，則所有在 xy 平面上的動點 P 滿足 $\overrightarrow{PA}$ 垂直 $\overrightarrow{PB}$ 的 P 點軌跡。

答案：(2)(3)(4)

解析：(1)×：三點共線

(2)○：4 點與原點的距離均為 $\sqrt{10}$

(3)○： $\overline{PA}=2\overline{PB}\Rightarrow\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}=2\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}$

整理可得 $(x-3)^2+(y-5)^2=20$

(4)○： $\overline{CD}$ 中點 $(-5,-8)$ 且 $\overline{CD}=10$ ，所以半徑 $=5$ 且與 y 軸相切

(5)×：令 $P(x,y,0)$ ，由 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(1-x,2-y,4)\cdot(7-x,6-y,6)=0$

化簡得 $(x-4)^2+(y-4)^2=-11$ ，無圖形

13. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\cos A=-\dfrac{5}{13}$ 、 $\sin B=\dfrac{3}{5}$ 、 $\overline{BC}=1$ ，下列何者正確？

(1) $\tan C=\dfrac{33}{56}$　(2) $\angle B>\angle C$　(3) 滿足已知條件的三角形不只一個

(4) $\cos(A-B)=\dfrac{16}{65}$　(5) $\sin(B+C)=\dfrac{12}{13}$

答案：(1)(2)(4)(5)

解析：$\triangle ABC$ 中，$\angle A$ 為鈍角，$\angle B$ 和 $\angle C$ 為銳角

$\sin A=\dfrac{12}{13}$ 、 $\cos B=\dfrac{4}{5}$ 、 $\tan A=-\dfrac{12}{5}$ 、 $\tan B=\dfrac{3}{4}$

(1)○： $\tan C=-\tan(A+B)=-\left(\dfrac{-\frac{12}{5}+\frac{3}{4}}{1-(-\frac{12}{5})\times\frac{3}{4}}\right)=\dfrac{33}{56}$

(2)○：因為 $\tan B>\tan C$ ，所以 $\angle B>\angle C$

(3)×：因為 $\angle B$ 、 $\angle C$ 及 $\overline{BC}$ 的值確定，所以 $\triangle ABC$ 形狀大小唯一

(4)○： $\cos(A-B)=-\dfrac{5}{13}\times\dfrac{4}{5}+\dfrac{12}{13}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{16}{65}$

(5)○： $\sin(B+C)=\sin A=\dfrac{12}{13}$

三、選填題（占 20 分）

說明：第 14 至 17 題，每題 5 分。

14. 小民欲架設錄影機錄影，他將一個攝影機三腳架擺好架在地面上，已知腳架頂端 A 點，三隻腳架 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 、 $\overline{AD}$ 長皆為 84 公分，B 、C 、D 點皆在地面上。若 $\overline{BC}=56\text{ cm}$，$\overline{CD}=64\text{ cm}$，$\overline{BD}=72\text{ cm}$，則 A 點離地面的高度為________cm。

答案：$\dfrac{168\sqrt{5}}{5}$

解析：A 點對地面的垂足點必為 $\triangle BCD$ 的外心(到三頂點等距離)，又由海龍公式算出 $\triangle BCD$ 面積 $=768\sqrt{5}$ ，再由 $768\sqrt{5}=\dfrac{56\times 64\times 72}{4R}$ 得 $\triangle BCD$ 之外接圓半徑 $R=\dfrac{84}{\sqrt{5}}$ ，

所以 A 點到地面的距離 $=\sqrt{84^2-(\dfrac{84}{\sqrt{5}})^2}=84\sqrt{1-\dfrac{1}{5}}=84\times\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{168\sqrt{5}}{5}$

15. 阿三有一個 $\triangle ABC$ 的田地，其中 $\overline{AB}=12$ ，$\overline{BC}=16$ ，$\angle B=60^\circ$ ，今阿三欲在田地的內部規劃一個長方形 $DEFG$ 種植草莓。已知此長方形的一邊在 $\overline{BC}$ 上，則此長方形 $DEFG$ 的最大面積為________ 。

答案：$24\sqrt{3}$

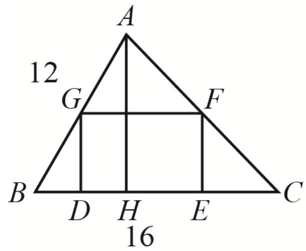
解析：如圖，令長方形之 $\overline{DG}=x$ ，$\overline{FG}=y$ ，$\triangle ABC$ 之高 $\overline{AH}=6\sqrt{3}$ ，

由相似比例，$\dfrac{6\sqrt{3}}{16}=\dfrac{6\sqrt{3}-x}{y}$ 得 $8x+3\sqrt{3}y=48\sqrt{3}$ ，

長方形面積 $=xy$ ，

再利用算幾不等式 $\dfrac{8x+3\sqrt{3}y}{2}\geq\sqrt{24\sqrt{3}xy}$ 得 $xy\leq 24\sqrt{3}$ ，

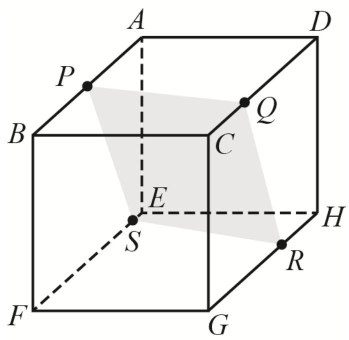
故長方形之最大面積 $=24\sqrt{3}$



16. 已知正立方體 $ABCD-EFGH$ 的邊長為 6，P 為 $\overline{AB}$ 中點，Q 在 $\overline{CD}$ 上且 $\overline{CQ}:\overline{QD}=1:2$，$R$ 在 $\overline{GH}$ 上且 $\overline{GR}:\overline{RH}=2:1$，則通過 PQR 三點的平面截此正立方體所截出的截面積為？

答案：$6\sqrt{41}$

解析：如圖，建立空間坐標系，$E(0,0,0)$，$F(6,0,0)$，$H(0,6,0)$，$A(0,0,6)$，則 $P(3,0,6)$，$Q(4,6,6)$，$R(2,6,0)$，得 PQR 所在的平面方程式為 $-6x+y+2z=-6$，此平面與 $\overline{EF}$ 交點 $S(1,0,0)$，故截面為平行四邊形 $PQRS$，其面積 $=|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PS}|=6\sqrt{41}$



17. 求滿足 $\sqrt{t+1}-\sqrt{t}>0.02$ 的最大正整數 t 值為________。

答案：624

解析：$\dfrac{1}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t}}>\dfrac{1}{50}$，$50>\sqrt{t+1}+\sqrt{t}$，$\because \sqrt{624+1}+\sqrt{624}<50$ 且 $\sqrt{625+1}+\sqrt{625}>50$，故 t 的最大正整數值為 624

第貳部分、混合題或非選擇題（占 15 分）

說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

第 18 至 19 題為題組

假設某公司經營第 x 年的獲利函數為三次函數 $f(x)=x^3-6x^2+kx+3$ (單位：百萬元)，其中 k 為一正整數，試回答下列問題：

18. 若 $k=8$，求此函數的對稱中心坐標為何？(7 分，要有計算過程)

答案：(2,3)

解析：$f(x)$ 的對稱中心坐標為 $(-\frac{-6}{3},f(-\frac{-6}{3}))=(2,3)$

19. 若此公司每年的獲利均較前一年增加，求 k 的最小值為？(8 分)

(1) 9　(2) 10　(3) 11　(4) 12　(5) 13

答案：(4)

解析：將 $f(x)$ 連除以 $(x-2)$ 得 $f(x)=(x-2)^3+(k-12)(x-2)+(2k-13)$，

其圖形為 $h(x)=x^3+(k-12)x$ 的圖形平移，

又 $h(x)=x(x^2+(k-12))$ 圖形對稱中心 $(0,0)$，與 x 軸恰 1 交點的條件為 $(k-12)\geq 0$，

此時圖形為嚴格遞增，故 $k\geq 12$，12 為 k 的最小值

答案卷

第壹部分： 選擇題（占 85 分）

一、 單選題（占 35 分）

1　4	2　2	3　1	4　3	5　4	6　3	7　3

二、 多選題（占 30 分）

8　1345	9　34	10　1	11　12345	12　234	13　1245

三、 選填題（占 20 分）

14　$\frac{168}{5}\sqrt{5}$	15　$24\sqrt{3}$	16　$6\sqrt{41}$	17　624

第貳部分：混合題（占 15 分）

題號	作　答　區 注意：1.應依據題號順序，於作答區內作答。2.除另有規定外，書寫時應由左至右橫式書寫。3.作答須清晰，如難以辨識時，恐將影響成績評閱並傷及權益。4.不得於作答區書寫姓名、應試號碼或無關之文字、圖案符號等。
18	$f(x)$的對稱中心坐標為$(-\frac{-6}{3},f(-\frac{-6}{3}))=(2,3)$
19	(4)