111 學年度學科能力測驗

全真模擬試題(B 卷)

數學 A 考科

教師用

測驗範圍：高中數學一、二年級數學 A

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

作答方式：將答案填入卷末之答案欄中。

※此份試題本為模擬學科能力測驗之測驗形式，作答方式仍以實際學測之測驗形式為準。

選擇（填）題計分方式：

- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\dfrac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※請聽從指示後才翻頁作答

三民書局

版權所有
請勿翻印

第壹部分、選擇（填）題（占 90 分）

一、 單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題 5 分。

1. 關於空間中的點與直線及面的敘述何者是正確的？

(1) 點 $A(1,2,-1)$ 為直線 $L:\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{3}$ 線外一點。

(2) 包含點 $B(5,0,5)$ 及直線 $L:\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{3}$ 的平面是唯一的。

(3) 包含直線 $L:\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{3}$ 及直線 $N:\frac{x-5}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-5}{-1}$ 的平面是唯一的。

(4) 直線 $L:\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{3}$ 與平面 $E:2x-y+3z=11$ 平行。

(5) 直線 $L:\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{3}$ 與平面 $E:3x+3y-z=10$ 平行。

答案：(3)

解析：(1) 將點 $A(1,2,-1)$ 代入直線 $L:\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{3}$ ，

可得 $\frac{(1)-3}{2}=\frac{(2)-1}{-1}=\frac{(-1)-2}{3}$ ，等式皆成立，所以點在直線上。

(2) $B(5,0,5)$ 在 $L:\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{3}$ 上，所以包含點 B 與直線 L 的平面有無限多組。

(3) 直線 $L:\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{3}$ 與直線 $N:\frac{x-5}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-5}{-1}$ 交於 $(5,0,5)$ 一點

所以包含兩直線的平面是唯一一組。

(4) 直線 $L:\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{3}$ 與平面 $E:2x-y+3z=11$ 垂直。

(5) 直線 $L:\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{3}$ 方向向量 $(2,-1,3)$ 與平面 $E:3x+3y-z=10$ 法向量 $(3,3,-1)$

$(2,-1,3)\cdot(3,3,-1)=0$ 所以直線 L 可能與平面 E 平行或者在平面 E 上。

又代入直線 L 點 $(3,1,2)$ 至平面 $E:3x+3y-z=10$ 發現等式成立，

所以直線 L 在平面 E 上。

2. 所謂「新興病毒」在自然界裡未必真的是新的病毒。他們可能原來就是自然界組成的一份子，只是過去未傳染到人類，或是未對人類造成疾病而被忽略。這些病毒或許只是感染野生動物，沒有機會接觸到人類。隨著人類與大自然的界限越來越模糊，(包括探險旅遊，捕捉、獵食、販賣野生動物或是森林開發)，都讓人類有機會接觸到這些病毒。尤其是現在長途旅行的交通便利，很多城市人口密集，一旦這些病毒可以感染人類細胞及複製時，那便有可能在人群中傳播，對人類健康造成威脅。許多新興病毒都是 RNA 病毒，例如 SARS、MERS 及 2019-nCoV (SARS-CoV-2)冠狀病毒，這些 RNA 病毒複製時，可能會產生突變或重組。冠狀病毒在許多動物廣泛存在，過去也有數種冠狀病毒(human coronavirus)會感染人類造成普通感冒或肺炎。這個病毒具有外套膜，病毒顆粒直徑大小約 120nm。若與人的頭髮直徑相比較的話，頭髮直徑約5×10^{-3} cm。($1\text{nm}=10^{-9}\text{ m}$)。請問頭髮直徑約是病毒顆粒直徑的幾倍？請選出正確的科學記號表示：

(1) 416.6 倍　(2) 4166 倍　(3) 4.166×10^{1} 倍　(4) 4.166×10^{2} 倍

(5) 4.166×10^{3} 倍

答案：(4)

解析：$5\times10^{-3}\text{cm}=5\times10^{-5}\text{m}$ 又 $120\text{nm}=120\times10^{-9}\text{m}$

$$\frac{5\times10^{-5}}{120\times10^{-9}}=\frac{1}{24}\times10^{4}=\frac{100}{24}\times10^{2}=4.1\overline{6}\times10^{2}$$，故選(4)

3. 在數學中，班佛定律（Benford's law）描述了真實數字數據集中首位數字的頻率分布。一堆從實際生活得出的數據中，以1為首位數字的數，出現機率約為總數的三成。而越大的數，以它為首幾位的數出現的機率就越低。此定律可用於檢查各種數據是否有造假，但要注意使用條件：(1)數據至少 3000 筆以上。(2)不能有人為操控。在數學中的班佛定律，以 n 為首位數字的數，出現比例以機率表示為 $P(n)=\log\left(\frac{n+1}{n}\right)$。請問在某間銀行中，存款金額首位數字為 3 或 4 或 5 的比例有多少？($\log2\approx0.3010$)

(1) 20%　(2) 30%　(3) 40%　(4) 50%　(5) 60%

答案：(2)

解析：$\log\left(\frac{4}{3}\right)+\log\left(\frac{5}{4}\right)+\log\left(\frac{6}{5}\right)=\log\left(\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\frac{6}{5}\right)=\log2$ 約為0.3010

4. 已知$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$，且$\cos\theta=\frac{4}{5}$，則$\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}$之值為多少？

(1) $\frac{\sqrt{10}}{5}$　(2) $\frac{-\sqrt{10}}{5}$　(3) $\frac{\sqrt{10}}{10}$　(4) $\frac{-\sqrt{10}}{10}$　(5) $\frac{-3\sqrt{10}}{10}$

答案：(2)

解析：$\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)^2=1+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=1+\sin\theta=1+\frac{-3}{5}=\frac{2}{5}$

所以$\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{2}{5}}=\pm\frac{\sqrt{10}}{5}$，其中$\frac{3}{4}\pi<\frac{\theta}{2}<\pi$

故$\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}=-\frac{\sqrt{10}}{5}$（餘弦負多，正弦正少）

5. 空間中，已知向量$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$滿足$\left|\overrightarrow{a}\right|=3$、$\left|\overrightarrow{b}\right|=4$、$\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|=\sqrt{41}$，求$\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|=$？

(1) 12　(2) $4\sqrt{5}$　(3) 8　(4) 16　(5) $2\sqrt{41}$

答案：(2)

解析：$\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|^2=41=\left|\overrightarrow{a}\right|^2+\left|\overrightarrow{b}\right|^2+2(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})=9+16+2(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})$

所以$(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})=8=3\times4\times\cos\theta$，其中$\cos\theta=\frac{2}{3}$，$\theta$為兩向量$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$夾角，

可得：$\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$，所以$\left|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right|=3\times4\times\frac{\sqrt{5}}{3}=4\sqrt{5}$

6. NBA公鹿隊主力球員：揚尼斯・安戴托昆波（Giannis Antetokounmpo）(綽號：字母哥)測試罰球命中率，已知第一次罰球命中率為60%。若在前一次投進的狀態下，第二球可投進的命中率可提升至70%；即使前一球沒投進的狀態下，下一球命中的水準也有50%。假設字母哥連續罰球，請問下列選項何者錯誤？

(1) 字母哥連續投球兩次，恰命中一球的機率為0.38。

(2) 字母哥連續投球三次，恰命中一球的機率為0.25。

(3) 字母哥連續投球三次，恰命中兩球的機率為0.358。

(4) 字母哥連續投球三次，已知恰命中一球，則其為第三球才命中的機率為0.4。

(5) 字母哥連續投球三次，命中球數量期望值為1.844。

答案：(3)

解析：除了第一球，後續的每一球都滿足：

只要前一次中，下一球命中率為 0.7；只要前一次沒中，下一球命中率為 0.5

所以可歸納下表：

<table>
<tr><th></th><th>第一球</th><th>第二球</th><th>第三球</th></tr>
<tr><td rowspan="8">開始罰球</td><td rowspan="4">命中 0.6</td><td rowspan="2">命中 0.7</td><td>命中 0.7</td></tr>
<tr><td>不中 0.3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">不中 0.3</td><td>命中 0.5</td></tr>
<tr><td>不中 0.5</td></tr>
<tr><td rowspan="4">不中 0.4</td><td rowspan="2">命中 0.5</td><td>命中 0.7</td></tr>
<tr><td>不中 0.3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">不中 0.5</td><td>命中 0.5</td></tr>
<tr><td>不中 0.5</td></tr>
</table>

(1) 字母哥連續投球兩次，恰命中一球的機率：

$=$中$\times$不中$+$不中$\times$中

$=0.6\times0.3+0.4\times0.5=0.38$

(2) 字母哥連續投球三次，恰命中一球的機率：

$=$中$\times$不中$\times$不中$+$不中$\times$中$\times$不中$+$不中$\times$不中$\times$中

$=0.6\times0.3\times0.5+0.4\times0.5\times0.3+0.4\times0.5\times0.5=0.25$

(3) 字母哥連續投球三次，恰命中兩球的機率：

$=$中$\times$中$\times$不中$+$中$\times$不中$\times$中$+$不中$\times$中$\times$中

$=0.6\times0.7\times0.3+0.6\times0.3\times0.5+0.4\times0.5\times0.7=0.356$

(4) 字母哥連續投球三次，已知恰命中一球，則其為第三球才命中的機率：

$$=\frac{\text{不中}\times\text{不中}\times\text{中}}{\text{中}\times\text{不中}\times\text{不中}+\text{不中}\times\text{中}\times\text{不中}+\text{不中}\times\text{不中}\times\text{中}}$$

$$=\frac{0.4\times0.5\times0.5}{0.6\times0.3\times0.5+0.4\times0.5\times0.3+0.4\times0.5\times0.5}=0.4$$

(5) 字母哥連續投球三次，命中球數量期望值為1.844。

設進球數 x

x	0	1	2	3
P	p_0	0.25	0.356	p_3

$p_3=0.6\times0.7\times0.7=0.294$

$E(x)=0\times p_0+1\times0.25+2\times0.356+3\times0.294=1.844$

多選題（占 **30** 分）

說明：第 7 題至第 12 題，每題 5 分。

7. 設$0<a<1$，且$a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{-1}{2}}=3$，試選出正確的選項。

(1) $a^1+a^{-1}=7$　(2) $a^2+a^{-2}=47$　(3) $a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{-1}{2}}=\sqrt{5}$

(4) $a^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{-3}{2}}=-8\sqrt{5}$　(5) $a^{\frac{3}{4}}-a^{\frac{-3}{4}}=-4$

答案：(1)(2)(4)(5)

解析：(1)○：$a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{-1}{2}}=3$將其平方得到$a^1+a^{-1}+2=9 \Rightarrow a^1+a^{-1}=7$

(2)○：$a^1+a^{-1}=7$將其平方得到$a^2+a^{-2}+2=49 \Rightarrow a^2+a^{-2}=47$

(3)×：令$a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{-1}{2}}=k$將其平方得到$a^1+a^{-1}-2=k^2 \Rightarrow 7-2=k^2$

解得$k=\pm\sqrt{5}$，取$k=-\sqrt{5}$ (因為$0<a<1$)

(4)○：$a^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{-3}{2}}=(a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{-1}{2}})(a^1+1+a^{-1})=(-\sqrt{5})(7+1)=-8\sqrt{5}$

(5)○：令$a^{\frac{3}{4}}-a^{-\frac{3}{4}}=p$將其平方得到$a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}-2=p^2$

又$a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}=(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})(a^1-1+a^{-1})=3\times(7-1)=18$

所以$18-2=p^2 \Rightarrow p=\pm 4$，取$p=-4$ (因為$0<a<1$)

8. 在坐標平面上，已知圓$C:x^2+y^2+4x-2y-4=0$與直線$L:3x-4y+k=0$，試選出正確的選項。

(1) 圓C的半徑為9

(2) 若L與圓C有最大的割線段長，則$k=8$

(3) 若$k=10$時，圓C上恰有3點到L距離為2

(4) 若$k=-2$時，則L與C交於相異兩點

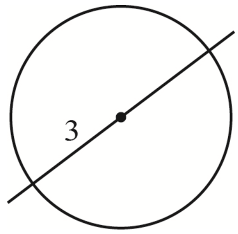
(5) 若L與C不相交，此時k可能為-6

答案：(4)(5)

解析：(1)×：$x^2+y^2+4x-2y-4=0$ 配方得 $(x+2)^2+(y-1)^2=9$，圓心 $(-2,1)$、半徑 $=3$

(2)×：最大割線段長為直徑，即該直線通過圓心：

$3(-2)-4(1)+k=0 \Rightarrow k=10$

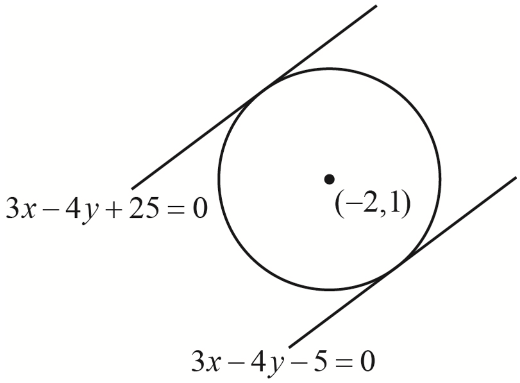


(3)×：半徑為 3，故有 4 個點

(4)○：透過圓心 $(-2,1)$ 到直線 $3x-4y+k=0$ 距離等於半徑

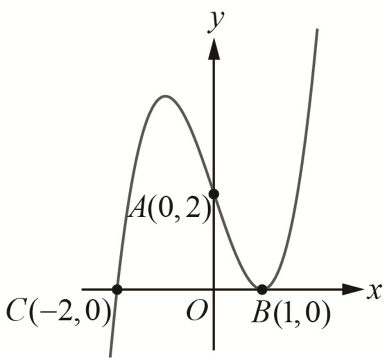
$\dfrac{|-6-4+k|}{\sqrt{25}}=3$，解得 $k=-5$ 或 25 (如下圖)

所以 $k=-2$ 時，即 $3x-4y-2=0$ 的確與圓交於兩點



(5)○：$-5\le k\le 25$ 直線與圓相交(包含相切)

9. 下圖是三次函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx^1+d$ 的圖形，其中 $A(0,2)$ 為對稱中心；在 $x=1$ 有極小值 0，請依圖形的特徵選出正確選項。



(1) $b=0$　(2) $c>0$　(3) $f(x)$ 可以被 $(x-1)^2$ 整除

(4) $f(x)$ 在 $x=1$ 附近的一次近似為 $y=0$

(5) $x=-1$ 有極大值 $y=4$（極大值：局部最高點的 y 坐標值）

答案：(1)(3)(4)(5)

解析：(1)○(2)×：若對稱中心在 $A(0,2)$ 則可假設 $f(x)=ax^3+0\times x^2+cx^1+2$

代入 $B(1,0)$、$C(-2,0)$ 兩點解聯立可得：$f(x)=x^3-3x+2$

所以：$b=0$ 且 $c=-3$

(3)○(4)○：利用以 $x=1$ 為中心連續綜合除法得到泰勒展開式：

$f(x)=(x-1)^3+3(x-1)^2+0$ 可得知在 $x=1$ 附近的一次近似為 $y=0$

(5)○：利用以 $x=-1$ 為中心連續綜合除法得到泰勒展開式：

$f(x)=(x+1)^3-3(x+1)^2+4$ 可得知在 $x=1$ 附近的一次近似為 $y=4$

又 $y=4$ 為水平線，所以可得 $x=1$ 的極大值 $=4$

10. 三民書局出版社總部共有六層樓高，假設有 n 個人從 1 樓開始搭乘電梯必須移動到別的樓層，並且各自按下各自的樓層後，電梯只會由下往上移動並且停靠在各自乘客按下的樓層，不考慮人員進出，只考慮電梯停靠在那些樓層，請問依據下列條件選出正確的停靠的方式。

(1) 若 $n=1$，則電梯有 C_1^6 種停靠方式

(2) 若 $n=2$，則電梯有 C_2^5 種停靠方式

(3) 若 $n=3$，則電梯有 25 種停靠方式

(4) 若 $n=4$，則電梯有 30 種停靠方式

(5) 若 $n=5$，則電梯有 32 種停靠方式

答案：(3)(4)

解析：(1)×：1 人可能移動到 5 個樓層（2～6 樓），所以有 5 種。

(2)×：2 人有可能有兩種狀況：

（一）2 人同樓層：C_1^5　（二）2 人不同樓層：C_2^5

共有：$C_1^5+C_2^5=5+10=15$ 種。

(3)○：3 人有可能有三種狀況：

（一）3 人同 1 個樓層：C_1^5

（二）3 人不同分布在 2 個樓層：C_2^5

（三）3 人不同分布在 3 個樓層：C_3^5

共有：$C_1^5+C_2^5+C_3^5=5+10+10=25$ 種。

(4)○：由上面同理可得：4 人共有：$C_1^5+C_2^5+C_3^5+C_4^5=5+10+10+5=30$ 種。

(5)×：由上面同理可得：5 人共有：$C_1^5+C_2^5+C_3^5+C_4^5+C_5^5=5+10+10+5+1=31$ 種。

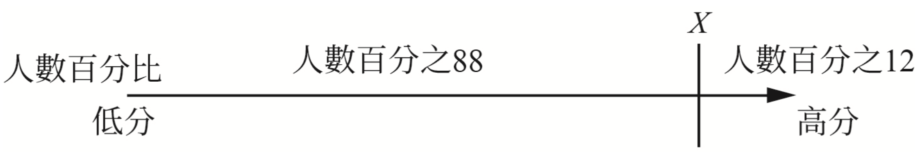
11. 下表為 110 學年度學測自然級分人數統計表，請依據下表，選出正確的選項。
(1) 眾數為 6 級分
(2) 頂標（第 88 百分位數）為 13 級分
(3) 均標（第 50 百分位數）為 9 級分
(4) 此次學測自然全國平均數大於中位數
(5) 某考生報考了 A 大某系，該系檢定標準為英數自三科均須達前標（第 75 百分位數）。他的自然考了 11 級分，沒有達自然檢定標準。

級分	自然			
	人數	百分比	自高分往低分累計	
			人數	百分比
15	4,062	4.34	4,062	4.34
14	5,824	6.22	9,886	10.56
13	6,393	6.83	16,279	17.38
12	7,209	7.7	23,488	25.08
11	7,594	8.11	31,082	33.19
10	7,495	8	38,577	41.2
9	7,828	8.36	46,405	49.56
8	8,765	9.36	55,170	58.92
7	9,499	10.14	64,669	69.06
6	11,271	12.04	75,940	81.1
5	9,950	10.63	85,890	91.72
4	6,072	6.48	91,962	98.21
3	1,560	1.67	93,522	99.88
2	97	0.1	93,619	99.98
1	10	0.01	93,629	99.99
0	10	0.01	93,639	100

答案：(1)(2)(4)(5)

解析：(1)○：眾數為出現次數最多的資料，所以是 6 級分。

(2)○：頂標（第 88 百分位數）為 X 級分，意指：



小於等於 X 級分的資料至少占總考生人數的百分之 88

且大於等於 X 級分的資料至少占總考生人數的百分之 12，所以 X 為 13 級分

(3)×：均標（第 50 百分位數）為 8 級分

(4)○：平均級分約為 8.8 級分所以大於中位數 8 級分
(5)○：第 75 百分位數即為 12 級分，所以自然沒有通過檢定標準

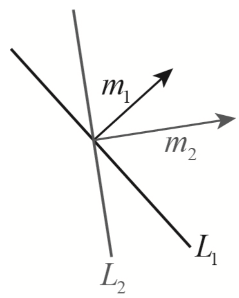
12. 平面上相異兩相交直線 L_1 、L_2 ，其法向量分別為 $\overrightarrow{m_1}$ 與 $\overrightarrow{m_2}$ ，則下列選項中，那些必為 L_1 、L_2 的角平分線向量？

(1) $\overrightarrow{m_1}+\overrightarrow{m_2}$　　(2) $\overrightarrow{m_1}+\dfrac{\left|\overrightarrow{m_1}\right|}{\left|\overrightarrow{m_2}\right|}\overrightarrow{m_2}$　　(3) $\dfrac{\overrightarrow{m_1}}{\left|\overrightarrow{m_1}\right|}+\dfrac{\overrightarrow{m_2}}{\left|\overrightarrow{m_2}\right|}$

(4) $\left|\overrightarrow{m_1}\right|\overrightarrow{m_1}+\left|\overrightarrow{m_2}\right|\overrightarrow{m_2}$　　(5) $\left|\overrightarrow{m_2}\right|\overrightarrow{m_1}+\left|\overrightarrow{m_1}\right|\overrightarrow{m_2}$

答案：(2)(3)(5)

解析：如圖為例，有可能取到的兩個法向量長度不同，所以必須先將法向量延伸變成兩個相同長度的法向量，即為：$\left|\overrightarrow{m_2}\right|\overrightarrow{m_1}$ 與 $\left|\overrightarrow{m_1}\right|\overrightarrow{m_2}$ 長度相同。



所以：$\left|\overrightarrow{m_2}\right|\overrightarrow{m_1}+\left|\overrightarrow{m_1}\right|\overrightarrow{m_2}$ 為 $\left|\overrightarrow{m_2}\right|\overrightarrow{m_1}$ 與 $\left|\overrightarrow{m_1}\right|\overrightarrow{m_2}$ 兩向量圍成的菱形對角線向量，即為兩直線的角平分線向量。

故為（$\left|\overrightarrow{m_2}\right|\overrightarrow{m_1}+\left|\overrightarrow{m_1}\right|\overrightarrow{m_2}$）實數倍數的答案皆可選（因為向量伸縮方向不變）：

(5) $\left|\overrightarrow{m_2}\right|\overrightarrow{m_1}+\left|\overrightarrow{m_1}\right|\overrightarrow{m_2}$ 正確

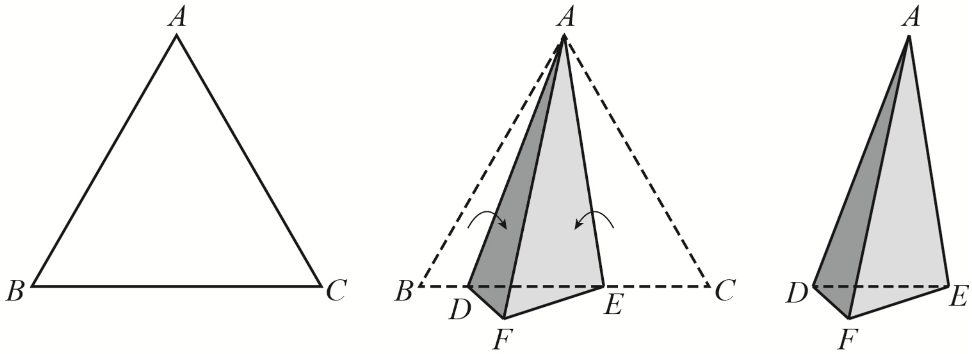
(2) $\overrightarrow{m_1}+\dfrac{\left|\overrightarrow{m_1}\right|}{\left|\overrightarrow{m_2}\right|}\overrightarrow{m_2}=\dfrac{\left|\overrightarrow{m_2}\right|\overrightarrow{m_1}+\left|\overrightarrow{m_1}\right|\overrightarrow{m_2}}{\left|\overrightarrow{m_2}\right|}$ 正確

(3) $\dfrac{\overrightarrow{m_1}}{\left|\overrightarrow{m_1}\right|}+\dfrac{\overrightarrow{m_2}}{\left|\overrightarrow{m_2}\right|}=\dfrac{\left|\overrightarrow{m_2}\right|\overrightarrow{m_1}+\left|\overrightarrow{m_1}\right|\overrightarrow{m_2}}{\left|\overrightarrow{m_1}\right|\left|\overrightarrow{m_2}\right|}$ 正確

選填題（占 30 分）

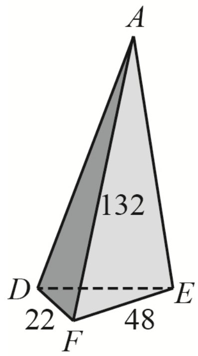
說明：第 13 至 18 題，每題 5 分。

13. 如圖，已知正三角形 ABC 紙片，邊長為 132，且 $\overline{BD}=22$，今沿著兩線段 $\overline{AD}$ 、 $\overline{AE}$ 將三角形摺起，使得 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 兩邊重和於 $\overline{AF}$ ，形成四邊形 $ADFE$ ，請問四邊形 $ADFE$ 面積為______ 。



答案：$2310\sqrt{3}$

解析：已知 $\overline{AF}=132$ 且三角形 DEF 周長亦為 132，



又 $\overline{BD}=22=\overline{DF}$ ，且 $\angle DFE=120°$ ，

所以可假設 $\overline{FE}=x$ 與 $\overline{ED}=132-22-x=110-x$

在三角形 DFE 中使用餘弦定理： $\cos 120^\circ=\dfrac{x^2+22^2-(110-x)^2}{2\times x\times 22}$

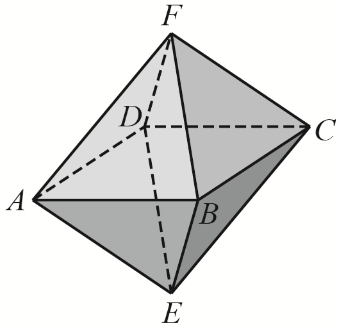
可得 $\dfrac{-1}{2}=\dfrac{x^2+484-(12100+x^2-220x)}{2\times x\times 22}$

乘開後解出 $x=48$ ，故可得 $\overline{DF}=22$ ， $\overline{FE}=48$ 且已知 $\overline{AF}=132$

所以四邊形 $ADFE$ 面積 $=$ 三角形 ADF 面積 $+$ 三角形 AEF 面積

$=\dfrac{1}{2}\times 22\times 132\times\sin 60^\circ+\dfrac{1}{2}\times 48\times 132\times\sin 60^\circ=2310\sqrt{3}$

14. 正八面體 $ABCDEF$ ，由 F 沿著稜線到達 E 點，如果不通過同一個點，也不一定要每個點都經過，試問有幾種走法：______ 。



答案：28 種

解析：若經過 1 個點，例如 $F-A-E$ ： $1\times4\times1=4$

若經過 2 個點，例如 $F-A-B-E$ ： $1\times4\times2\times1=8$

若經過 3 個點，例如 $F-A-B-C-E$ ： $1\times4\times2\times1\times1=8$

若經過 4 個點，例如 $F-A-B-C-D-E$ ： $1\times4\times2\times1\times1\times1=8$

所以總共 $4+8+8+8=28$ 種

15. 函數 $g(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{3})-2\sin x$ ，若 $0\le x<2\pi$ ， $g(x)$ 有最大值，此時 $x=$_____ 。

答案：$\frac{11}{6}\pi$

解析：$g(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{3})-2\sin x=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\cos x\right)-2\sin x$

$$=2\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)-2\sin x=\sqrt{3}\cos x-\sin x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)$$

$$=2\sin(\frac{\pi}{3}-x)$$

當 x 為 $\frac{11}{6}\pi$ 時，函數值有最大值 2。

16. 小夫就讀海洋學系，他在疫情過後決定去考潛水執照，根據他的研究，當一個潛水員在水裡每下降 1 公尺的時候，光線的強度就會減少 2.5 %，若現在小夫已經下降到光線強度低於水面時的 25 %，則此時小夫至少下降了約______公尺。(小數點以下無條件進位計算到整數公尺，已知： $\log 0.025\approx-1.6021$ ， $\log 0.975\approx-0.0110$)

答案：55

解析：光線的強度就會減少 $2.5\,\%(=0.025)$ 是指：每下降一公尺，光線變成原本的 0.975 倍

$0.975^n < 0.25 \Rightarrow \log(0.975^n) < \log(0.25) \Rightarrow n\times\log 0.975 < \log(0.025)+1$

$\Rightarrow (-0.0110)n < -1.6021+1 \Rightarrow (-0.0110)n < -0.6021 \Rightarrow n > 54.736$

取 55 公尺為答案

17\. 當數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足遞迴關係式：$\begin{cases} a_1=\dfrac{1}{3} \\ a_n=\dfrac{1-a_{n-1}}{3-4a_{n-1}}, n\ge 2 \end{cases}$ 請問 $a_{20}=$______。

答案：$\dfrac{20}{41}$

解析：觀察前三項：$a_1=\dfrac{1}{3}$，$a_2=\dfrac{1-\dfrac{1}{3}}{3-4\times\dfrac{1}{3}}=\dfrac{2}{5}$，$a_3=\dfrac{1-\dfrac{2}{5}}{3-4\times\dfrac{2}{5}}=\dfrac{3}{7}$

可以歸納出一般項為 $a_n=\dfrac{n}{2n+1}$，所以 $a_{20}=\dfrac{20}{41}$

18\. 已知矩陣 $A=\begin{bmatrix}\cos 15^\circ & -\sin 15^\circ \\ \sin 15^\circ & \cos 15^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(-15^\circ) & -\sin(-15^\circ) \\ \sin(-15^\circ) & \cos(-15^\circ)\end{bmatrix}$ 且 $N=A^{32}$，若點 $K(2020,2021)$ 經過了 N 的線性變換後所得的點為 J 點，則 J 點的 y 坐標為______。

答案：2021

解析：$A=\begin{bmatrix}\cos 15^\circ & -\sin 15^\circ \\ \sin 15^\circ & \cos 15^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(-15^\circ) & -\sin(-15^\circ) \\ \sin(-15^\circ) & \cos(-15^\circ)\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\cos 15^\circ & \sin 15^\circ \\ \sin 15^\circ & -\cos 15^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos 15^\circ & \sin 15^\circ \\ -\sin 15^\circ & \cos 15^\circ\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\cos 15^\circ\cos 15^\circ-\sin 15^\circ\sin 15^\circ & \cos 15^\circ\sin 15^\circ+\sin 15^\circ\cos 15^\circ \\ \sin 15^\circ\cos 15^\circ+\cos 15^\circ\sin 15^\circ & \sin 15^\circ\sin 15^\circ-\cos 15^\circ\cos 15^\circ\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\cos 30^\circ & \sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & -\cos 30^\circ\end{bmatrix}$

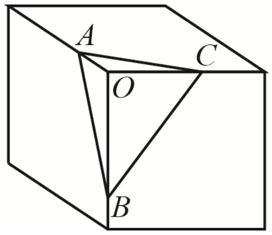
可發現 A 為鏡射矩陣且其對稱軸為 $y=(\tan 15^\circ)x$，所以 $N=A^{32}$ 是指對稱 32 次以後的結果，故 P 點對稱 32 次以後依然停在原來 P 點位置，所以其 y 坐標為 2021

第貳部分、混合題或非選擇題（占 **10** 分）

說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

<u>19 至 20 題為題組</u>

在一個邊長為 20 公分的正方形體截下四面體 $O-ABC$ 。如圖，取 $\overline{OB}=16$ 公分，$\overline{OC}=12$ 公分。



19. 若希望截面 ABC 面積為 104 平方公分，試問 $\overline{OA}$ 長度為多少？（單選題，3 分）

    (1) 4 公分　(2) 5 公分　(3) 6 公分　(4) 7 公分　(5) 8 公分

答案：(1)

解析：假設 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OC}$ 及 $\overrightarrow{OB}$ 分別為 x 軸正向、 y 軸正向與 z 軸正向且 $O(0,0,0)$ 為原點，

所以設 $\overrightarrow{OA}=(a,0,0)$ 、 $\overrightarrow{OC}=(0,12,0)$ 與 $\overrightarrow{OB}=(0,0,16)$

由 $\overrightarrow{CB}=(0,-12,16)$ 與 $\overrightarrow{CA}=(a,-12,0)$ 外積所得的長度即為 104 的兩倍，

$\left|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CA}\right|=\left|(192,16a,12a)\right|=208$ 即： $192^2+(16a)^2+(12a)^2=208^2$ 可以解得 $a=4$ ，

故 $\overline{OA}$ 為 4 公分。

20. 承第 19 題，如果平面 ABC 與平面 OAB 所夾的銳角為 α，請問 $\cos\alpha$ 值多少？（非選題，7 分）

答案：$\dfrac{4}{13}$

解析：平面 ABC 方程式為截距式： $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{12}+\dfrac{z}{16}=1$ 其法向量為 $(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{12},\dfrac{1}{16})//(12,4,3)$

平面 OAB 法向量為 y 軸正向 $(0,1,0)$ (亦可以選反向)

所以 $(12,4,3)$ 與 $(0,0,1)$ 所夾銳角 α 即為答案

$$\cos\alpha=\left|\frac{12\cdot 0+4\cdot 1+3\cdot 0}{\sqrt{12^2+4^2+3^2}\times\sqrt{0^2+1^2+0^2}}\right|=\frac{4}{13}$$

答案卷

第壹部分： 選擇題（占 **90** 分）

一、 單選題（占 **30** 分）

1　3	2　4	3　2	4　2	5　2	6　3

二、 多選題（占 **30** 分）

7　1245	8　45	9　1345	10　34	11　1245	12　235

三、 選填題（占 **30** 分）

13　$2310\sqrt{3}$	14　28 種	15　$\frac{11}{6}\pi$	16　55	17　$\frac{20}{41}$	18　2021

第貳部分：混合題（占 **10** 分）

題號	作　答　區 注意：1.應依據題號順序，於作答區內作答。2.除另有規定外，書寫時應由左至右橫式書寫。3.作答須清晰，如難以辨識時，恐將影響成績評閱並傷及權益。4.不得於作答區書寫姓名、應試號碼或無關之文字、圖案符號等。
19	(1)
20	平面 ABC 方程式為截距式：$\frac{x}{4}+\frac{y}{12}+\frac{z}{16}=1$ 其法向量為 $(\frac{1}{4},\frac{1}{12},\frac{1}{16})//(12,4,3)$ 平面 OAB 法向量為 y 軸正向 $(0,1,0)$ (亦可以選反向) 所以 $(12,4,3)$ 與 $(0,0,1)$ 所夾銳角 α 即為答案 $\cos\alpha=\left\lvert\frac{12\cdot0+4\cdot1+3\cdot0}{\sqrt{12^2+4^2+3^2}\times\sqrt{0^2+1^2+0^2}}\right\rvert=\frac{4}{13}$

20	