111 學年度學科能力測驗

全真模擬試題(A 卷)

數學 B 考科

教師用

測驗範圍：高中數學一、二年級數學 B

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

作答方式：將答案填入卷末之答案欄中。

※此份試題本為模擬學科能力測驗之測驗形式，作答方式仍以實際學測之測驗形式為準。

選擇（填）題計分方式：

- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\dfrac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※請聽從指示後才翻頁作答

三民書局

第壹部分、選擇（填）題（占 **85** 分）

一、 單選題（占 **35** 分）

說明：第 1 題至第 7 題，每題 5 分。

(　　)1. 計算化簡 $\sqrt{\dfrac{243^4+9^8}{3^8+27^4}}$ 等於？

(1) $3\sqrt{3}$　(2)9　(3)27　(4)81　(5)243

答案：(4)

解析：原式 $=\sqrt{\dfrac{3^{20}+3^{16}}{3^8+3^{12}}}=\sqrt{\dfrac{3^{16}(3^4+1)}{3^8(1+3^4)}}=3^4=81$，選(4)

(　　)2. 坐標平面上五個點 $(1,3)$、$(1,4)$、$(3,1)$、$(6,5)$、$(4,2)$，求一直線 L 滿足此五點與 L 的水平距離差的平方和最小，則 L 方程式為？

(1) $y-5x+12=0$　(2) $x-5y+12=0$　(3) $x=y+1$

(4) $3x-10y+21=0$　(5) $3y-10x+21=0$

答案：(5)

解析：所求為 x 對 y 的迴歸直線。由資料 $(3,1)$、$(4,1)$、$(1,3)$、$(5,6)$、$(2,4)$ 算得 y 對 x 的迴歸直線為 $y-3=\dfrac{3}{10}(x-3)$，化簡得 $3x-10y+21=0$，故所求為 $3y-10x+21=0$

故選(5)

(　　)3. 將 5 本相同的書任意分給 3 個人，共有幾種分法？

(1) 21　(2) 125　(3) 243　(4) 35　(5) 5

答案：(1)

解析：所求 $=C_5^{5+3-1}=21$，故選(1)

(　　)4. 已知平面上一定直線 $L: y=mx$（$m>\frac{4}{3}$）及一點 $P(3,4)$，則一個圓 C 滿足圓心在 x 軸上，且圓 C 通過 P 點且與 L 相切，問這樣的圓 C 可能的個數為

(1)0　　(2)1　　(3)2　　(4)4　　(5)不一定

答案：(3)

解析：令圓心 $C(x,0)$，則 $\sqrt{(x-3)^2+16}=\frac{|mx|}{\sqrt{m^2+1}} \Rightarrow x^2-6(m^2+1)x+25(m^2+1)=0$

其判別式 $=36(m^2+1)^2-100(m^2+1)=4(9m^2-16)(m^2+1)$ 恆 >0

可知 x 有兩相異實根，故選(3)

(　　)5. 已知一公比為 r 的等比數列，其前 n 項和為 S_n，n 為任意正整數，若 $\langle S_n\rangle$ 是等差數列，試求 r 之值。

(1)$\frac{1}{2}$　　(2)1　　(3)$-\frac{1}{2}$　　(4)-1　　(5)0

答案：(2)

解析：$\because S_n$、S_{n+1}、S_{n+2} 成等差：

①若 $r=1$，則 $S_n=na$、$S_{2n}=(n+1)a$、$S_{3n}=(n+2)a$ 為等差，成立（a 為首項 $\neq 0$）

②若 $r\neq 1$，$2S_{n+1}=S_n+S_{n+2} \Rightarrow \frac{2a(1-r^{n+1})}{1-r}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}+\frac{a(1-r^{n+2})}{1-r} \Rightarrow r^n(r-1)^2=0$

$\because r\neq 0$，$\therefore r-1=0$，但 $r\neq 1$，故 r 無解

由①②得 $r=1$，故選(2)

(　　)6. 有三組資料各 6 筆如下，令 σ_A、σ_B、σ_C 分別表 A、B、C 三組資料之標準差，則下列何者正確？

A：21，31，51，81，61，41

B：40，60，50，90，80，70

C：54，81，36，63，72，45

(1)$\sigma_A=\sigma_B=\sigma_C$　　(2)$\sigma_A>\sigma_B=\sigma_C$　　(3)$\sigma_A>\sigma_B>\sigma_C$

(4)$\sigma_A=\sigma_B>\sigma_C$　　(5)$\sigma_B>\sigma_A>\sigma_C$

答案：(3)

解析：C 資料為 B 資料的 0.9 倍，又

B 資料的標準差 $=$ 資料 $\{21,31,41,51,61,71\}$ 的標準差 $<A$ 資料的標準差，故選(3)

(　　)7. 設 $f(x)=x^3+7x^2+7x+16$，試求 $f(17)\div 23$ 的餘數。

(1) -6　(2) 6　(3) 10　(4) 16　(5) 22

答案：(3)

解析：$\because f(x)=(x+6)(x^2+x+1)+10$，$\therefore f(17)=23\times(17^2+17+1)+10$

可知 $f(17)\div 23$ 的餘數為 10，故選(3)

二、多選題（占 30 分）

說明：第 8 題至第 13 題，每題 5 分。

(　　)8. 已知圓內接四邊形 $ABCD$，$\overline{AB}=6$，$\overline{BC}=1$，$\overline{AD}=4$，$\angle BAD=120°$，

$\angle ABC=150°$，$\overline{CD}=x$，試選出正確的選項。

(1) x 的解不只 1 個　(2) $9<x<11$　(3) $8<x<10$　(4) $7<x<9$　(5) x 為有理數

答案：(2)(3)

解析：$\angle C=60°$，由餘弦定理 $\overline{BD}^2=6^2+4^2-2\times 6\times 4\cos A=1^2+x^2-2x\cos C$

解得 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{301}}{2}$（負不合），$\dfrac{1+\sqrt{301}}{2}=9.\cdots$，故選(2)(3)

(　　)9. 從 1 到 9 這 9 個數中任取相異兩個數，令 m 表示其和為偶數的機率，p 表示其乘積為偶數的機率，試選出正確的選項。

(1) $m>\dfrac{1}{2}$　(2) $m=\dfrac{1}{2}$　(3) $p>\dfrac{1}{2}$　(4) $p>m$　(5) $p+m>1$

答案：(1)(3)(4)(5)

解析：令取出之相異兩個數為 s、t，$P(s\text{是偶數})=\dfrac{4}{9}$

$m=\dfrac{4}{9}\times\dfrac{4}{9}+\dfrac{5}{9}\times\dfrac{5}{9}=\dfrac{41}{81}$，$p=1-\dfrac{5}{9}\times\dfrac{5}{9}=\dfrac{56}{81}$，故選(1)(3)(4)(5)

(　　　　)10. 設 M 、N 皆為 2 階方陣，A 為 2×3 階矩陣，B 為 3×2 階矩陣，I_2 為 2 階單位矩陣，I_3 為 3 階單位矩陣，試選出正確的選項。

(1)若 $MN=I_2$，則 $NM=I_2$

(2)若 $AB=I_2$，則 $BA=I_3$

(3)若 A 不為零矩陣，$MA=A$，則 $BM=B$

(4)若 $MN=NM$，則 $M^{-1}N=NM^{-1}$

(5)若 $MN=N$ 且 M^{-1} 存在，則 $MA=A$

答案：(1)

解析：(1)○：$N=M^{-1}$

(2)×：如 $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I_2$，但 $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\neq I_3$

(3)×：如 $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，但 $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}$

(4)×：M 可能為零矩陣

(5)×：N 可能為零矩陣

故選(1)

(　　　　)11. 擲三顆相同的骰子 1 次，試選出正確的選項。

(1)恰有一顆骰子是 6 點的機率為 $\dfrac{25}{72}$

(2)恰有兩顆骰子是 6 點的機率為 $\dfrac{5}{72}$

(3)恰有一顆骰子是 6 點，一顆骰子是 1 點的機率為 $\dfrac{1}{9}$

(4)三顆骰子的點數和為 10 的機率最大

(5)三顆骰子的點數均不相同的機率為 $\dfrac{5}{9}$

答案：(1)(2)(3)(4)(5)

解析：(1) $P(\text{恰有一顆骰子是 6 點})=C_1^3\times\dfrac{1}{6}\times(\dfrac{5}{6})^2=\dfrac{25}{72}$

(2) $P(\text{恰有兩顆骰子是 6 點})=C_2^3\times(\dfrac{1}{6})^2\times\dfrac{5}{6}=\dfrac{5}{72}$

(3) $P(\text{恰有一顆骰子是 6 點，一顆骰子是 1 點})=C_1^3\times(\dfrac{1}{6})^2\times2\times\dfrac{4}{6}=\dfrac{1}{9}$

(4)三顆骰子的點數和為 10 或 11 的機率最大

(5) $P(\text{三顆骰子的點數均不相同})=1\times\dfrac{5}{6}\times\dfrac{4}{6}=\dfrac{5}{9}$

故選(1)(2)(3)(4)(5)

(　　　　)12. 直角坐標上四點 $A(0,0)$、$B(2,3)$、$C(-7,s)$、$D(t,-6)$，若 $\overline{AD}$ 垂直 $\overline{AB}$ 且直線 AD 交 $\overline{BC}$ 於 P，$\triangle ABP$ 與 $\triangle ACP$ 面積比為 $2:1$，試選出正確的選項。

(1) $t=9$　(2) C 點在第三象限　(3) $(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}) // \overrightarrow{AD}$

(4) $\triangle ABC$ 面積 >13　(5) $\overrightarrow{BD}$ 在 $\overrightarrow{BA}$ 的正射影為 $(-2,-3)$

答案：(1)(3)(5)

解析：(1)○：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=(2,3)\cdot(t,-6)=0$ 得 $t=9$

(2)×：$\overline{BP}:\overline{CP}=2:1$，由內分點公式知 $P(-4,\dfrac{2s+3}{3})$

又 P 在直線 AD 上，得 $s=\dfrac{5}{2}$，故 C 點在第二象限

(3)○：$\overrightarrow{AP}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ 且 $\overrightarrow{AP} // \overrightarrow{AD}$，故 $(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC})=3\overrightarrow{AP} // \overrightarrow{AD}$

(4)×：$\overleftrightarrow{BC}: x-18y+52=0$，則 $d(A,\overleftrightarrow{BC})=\dfrac{4\sqrt{13}}{5}$

$\triangle ABC$ 面積 $=\dfrac{1}{2}\times\overline{BC}\times d(A,\overleftrightarrow{BC})=13$

(5)○：$\overrightarrow{BD}$ 在 $\overrightarrow{BA}$ 的正射影 $=\overrightarrow{BA}=(-2,-3)$

故選(1)(3)(5)

(　　　　)13. 令 $S=1^2+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)+\cdots+(1^2+2^2+3^2+\cdots+21^2)$，試選出正確的選項。

(1) $S>20000$　(2) S 是 7 的倍數　(3) S 是 77 的倍數

(4) S 是 43 的倍數　(5) S 是 253 的倍數

答案：(2)(3)(5)

解析：$S=\displaystyle\sum_{k=1}^{21}(1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2)=\sum_{k=1}^{21}\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}=\sum_{k=1}^{21}(\frac{k^3}{3}+\frac{k^2}{2}+\frac{k}{6})$

$=\dfrac{1}{3}\times(\dfrac{21\times22}{2})^2+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{21\times22\times43}{6}+\dfrac{1}{6}\times\dfrac{21\times22}{2}=19481$

故選(2)(3)(5)

三、選填題（占 20 分）

說明：第 14 至 17 題，每題 5 分。

14. 已知某國家有 15%的人受到新型冠狀病毒病（COVID-19）感染，目前此國有 1 種檢測法可以檢測一個人是否受到 COVID-19 病毒感染。假若被檢驗者已受到 COVID-19 病毒感染，則使用此檢測法有 90%可以檢測出；而若被檢驗者未受到 COVID-19 病毒感染，則使用此檢測法有 6%會誤判受到感染。今有小胖因擔心受到 COVID-19 病毒感染，使用檢測法得到報告遭受 COVID-19 病毒感染，則小胖確實遭受 COVID-19 病毒感染的機率為__________。（需化為最簡分數）

答案：$\dfrac{45}{62}$

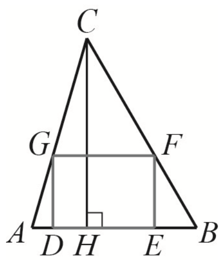
解析：$P($(小胖確實遭受 COVID-19 病毒感染$)=\dfrac{0.15\times0.9}{0.15\times0.9+0.85\times0.06}$

$$=\frac{15\times90}{15\times90+85\times6}=\frac{45}{62}$$

15. 阿三有一個$\triangle ABC$的田地，其中$\overline{AB}=12$、$\overline{BC}=16$、$\angle B=60^\circ$，今阿三欲在田地的內部規劃一個長方形$DEFG$種植草莓。已知此長方形的一邊在$\overline{AB}$上，則此長方形$DEFG$的最大面積為__________。

答案：$24\sqrt{3}$

解析：如圖，令長方形之$\overline{DG}=x$，$\overline{FG}=y$



$\triangle ABC$之高$\overline{CH}=16\sin60^\circ=8\sqrt{3}$

由相似比例，$\dfrac{8\sqrt{3}}{12}=\dfrac{8\sqrt{3}-x}{y}$得$12x+8\sqrt{3}y=96\sqrt{3}$

長方形面積$=xy$

由算幾不等式得$\dfrac{12x+8\sqrt{3}y}{2}\ge\sqrt{96\sqrt{3}xy}$得$xy\le24\sqrt{3}$

故長方形$DEFG$的最大面積為$24\sqrt{3}$

16. 三次函數$f(x)=x^2-6x^2+8x+3$的對稱中心坐標為__________。

答案：$(2,3)$

解析：對稱中心坐標為$(-\dfrac{-6}{3},f(-\dfrac{-6}{3}))=(2,3)$

17. 滿足$\sqrt{t+1}-\sqrt{t}>0.02$的最大正整數t值為__________。

答案：624

解析：$\sqrt{t+1}-\sqrt{t}=\dfrac{(\sqrt{t+1}-\sqrt{t})(\sqrt{t+1}+\sqrt{t})}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t}}=\dfrac{1}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t}}>0.02=\dfrac{1}{50}\Rightarrow\sqrt{t+1}+\sqrt{t}<50$

$\because\sqrt{624+1}+\sqrt{624}<50$且$\sqrt{625+1}+\sqrt{625}>50$，故$t$的最大正整數值為 624

第貳部分、混合題或非選擇題（占 **15** 分）

說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

第 18 至 19 題為題組

金先生一家人準備在放假期間規劃旅遊活動，首先他們選了 7 個想去的地點，其中包含甲城市和乙城市，然後準備從中挑選 5 個地點去遊玩，但必須要包含甲城市和乙城市，而且這 5 個地點的遊玩先後次序一定要先去甲城市再去乙城市（但甲城市和乙城市的遊玩次序並不一定要相鄰）。試回答下列問題：

18. 若總共有 T 種不同的可能旅遊路線，試選出正確的選項。(多選題，5 分)

(1) T 為三位數　(2) $T=480$　(3) $4!$ 能整除 T　(4) $5!$ 能整除 T　(5) T 能被 200 整除

答案：(1)(3)(4)(5)

解析：$T=C^5_3\times\frac{5!}{2!}=600=5\times5!$，故選(1)(3)(4)(5)

19. 若這 7 個地點也包含丙城市及丁城市，且丙城市及丁城市至多只能選一個去，試問總共有幾種可能的旅遊路線？（非選擇題，10 分）

答案：可能的旅遊路線數 $=600-($丙城市及丁城市兩個都選的方法數$)$

$$=600-C^3_1\times\frac{5!}{2!}=420\text{（種）}$$

答案卷

第壹部分： 選擇題（占 **85** 分）

一、 單選題（占 **35** 分）

1 4	2 5	3 1	4 3	5 52	6 3	7 3

二、 多選題（占 **30** 分）

8 23	9 1345	10 1	11 12345	12 135	13 235

三、 選填題（占**20**分）

14 $\frac{45}{62}$	15 $24\sqrt{3}$	16 $(2,3)$	17 624

第貳部分：混合題（占 **15** 分）

題號	作　　答　　區 注意：1.應依據題號順序，於作答區內作答。2.除另有規定外，書寫時應由左至右橫式書寫。3.作答須清晰，如難以辨識時，恐將影響成績評閱並傷及權益。4.不得於作答區書寫姓名、應試號碼或無關之文字、圖案符號等。
18	(1)(3)(4)(5)
19	可能的旅遊路線數 $=600-($丙城市及丁城市兩個都選的方法數$)$ $=600-C_1^3\times\dfrac{5!}{2!}=420$（種）