

數學科

陳清風 / 桃園高中



110

學

測

最前線

掃瞄 QR code

可下載檔案



戰地記者龍騰報導

今年試題是採用 99 課綱的最後一年，題目靈活、文字閱讀量及計算量適中，基本題不足，難度偏高。題目設計上，出現好幾題不錯的題目（如第 2、3、6、7、10、13、D、F 題），是一份對高分群有鑑別度的試題，這也意味著數學將是今年甄選入學很關鍵科目。

發行人：李枝昌
發行所：龍騰文化事業股份有限公司
網址：<https://www.ltedu.com.tw>

電話：02-22982933
傳真：02-22989766
出刊日：110 年 2 月 5 日

→ 命中率分析 2

→ 大考風向球 4

→ 試題大剖析 8

預見學測新趨勢，遇見複習新關鍵

學測趨勢命中率 100%，黃峻棋老師小檔案：

任教學校：家齊高中

著作：99 課網龍騰【All Pass】數學總複習講義

108 課網龍騰【POWER】數學 1、2、3A、4A 分冊講義

108 課網龍騰【新關鍵】數學 A 學測總複習講義

108 課網龍騰【好好學】數學 B 學測總複習講義

99 課網最難學測試題!! 選龍騰，免擔心!!

【新關鍵】題目的廣度與深度絕對足以應付!

B. 坐標空間中有兩條直線 L_1, L_2 與一平面 E ，其中直線 $L_1: \frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{-5}$ ，而 L_2 的

參數式為 $\begin{cases} x=1 \\ y=1+2t \\ z=1+3t \end{cases}$ (t 為實數)。若 L_1 落在 E 上，且 L_2 與 E 不相交，則 E 的方程

式為 $x - \textcircled{16} y + \textcircled{17} z = \textcircled{18}$ 。

110 學測 數學科
選填題 B



動手做 2 已知兩歪斜線 $L_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{1}$ ， $L_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-2}{-1}$ ，試求：

1. 包含 L_2 且平行 L_1 的平面方程式為_____。
2. L_1 與 L_2 之間的距離為_____。

答 $1. y+2z=8$ 2. $\sqrt{5}$

【新關鍵】數學 A
學測總複習講義

學測數學 A 複習講義新書快訊：

【新關鍵】數學 A 學測總複習講義

- ✓ 數據設計具水準，好算又不失挑戰性。
- ✓ 重點整理清楚，解析條理分明，學生自讀也 OK。
- ✓ 邏輯相當清晰，概念題型完整，既好教亦好學。

隨書贈：解答本、練習題本、重點整理手冊

團訂贈：實力評量測驗卷、教學 PPT、題庫光碟



作者：黃峻棋老師

效率複習最佳解，概念秒懂好好學

龍騰【All Pass】數學總複習講義 真實用書好評回饋：

1. 融入觀察與思考向度，數據設計好算又不失挑戰性，貼近大考趨勢。
2. 題量適中且題型完整，完全足以應付學測考題。
3. 真正幫學生將易混淆觀念即時釐清，複習效果顯著。
4. 解析清楚完整，易讀易懂不冗長，是學生可以自己讀懂的解題過程。

題型歸納最完整，基礎、進階、素養全都有！

【好好學】題型份量完全足以應付學測考題！

1. 設 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ 。若 $A^4 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，則 $a+b+c+d$ 之值為下列哪一個選項

- (1) 158 (2) 162 (3) 166 (4) 170 (5) 174

110 學測 數學科
選填題 B

範例 6 設 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，且 $(I+A)^4 = aI + bA$ ， $a、b$ 為實數，則下列哪些選項是正確的？（多選） (A)(C)(E)。

- (A) $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ (B) $A^4 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ (C) $A^n = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix}$ ，其中 n 為正整數 (D) $a=4$
(E) $b=40$ 。



【好好學】數學 B
學測總複習講義

學測數學 B 複習講義新書快訊：

【好好學】數學 B 學測總複習講義

- ✓ 一本可以效率自學的複習講義。
- ✓ 即時觀念澄清，排除錯誤的概念。
- ✓ 針對數 B 學生布題，清楚好學。

隨書贈：解答本、練習題本

團訂贈：實力評量測驗卷、教學 PPT、題庫光碟



作者：黃峻棋老師



110 學測 最前線

大考風向球

110 學測命題特色

前言

受少子化現象影響，學測報考人數逐年減少，今年約有 12 萬 8606 人報考，比去年少了 4832 人，但重考生 1 萬 260 人，大學入學競爭仍是激烈。自 108 年起為減輕考生壓力，採「選考」，不用 5 科全考，大學招生最多只能參採 4 科，並可將部分科目合為一個組合，作為分發比序（繁星推薦）、倍率篩選（個人申請）的項目。然而大考中心統計，今年有 7 萬 7554 人選五科，占六成，另有 4 萬 8574 人選四科，占比近三成八。多數考生仍選考國文、英文、數學三主科，三科報考人數都占整體人數的九成八以上。

甄選入學仍是升大學的主流，今年「繁星推薦入學」共有 68 所大學、1779 校系參加，提供 1 萬 6111 個招生名額。而「個人申請入學」則有 69 所大學、2181 個學系參加，提供 5 萬 5541 個招生名額。兩個管道總計招生名額超過 7 萬 1 千個，使得這份學測試題受到多方的關注。

99 課綱將數學課程的內容簡化，採用此課綱的學測已九年，整體的難易度如下：

- 102 年第一次採用，出乎大家意料的難；
- 103 年第二次採用，難易度適中；
- 104 年第三次採用，又是意外的難；
- 105 年第四次採用，調回難易適中；
- 106 年第五次採用，再回到難的一方；
- 107 年第六次採用，又調回難易適中；
- 108 年第七次採用，七年來最簡單；
- 109 年第八次採用，超簡單，高達 1 萬 4489 人滿級分；
- 110 年第九次採用，採用 99 課綱以來最難。

現就個人見解，針對今年的試題提出以下幾點分析與建議。

歷年題型分配

今年試題的題型沒有改變，仍然包含單選題、多選題及選填題三大題，各大題的題數略有更動，但總題數（20 題）及配分（每題 5 分）則維持不變。

年度 題型	102 年	103 年	104 年	105 年	106 年	107 年	108 年	109 年	110 年
單選題	6	6	4	6	7	7	6	7	6
多選題	6	6	6	7	6	5	7	6	7
選填題	8	8	10	7	7	8	7	7	7
總題數	20	20	20	20	20	20	20	20	20

110 學測試題分布

今年試題的分布如下表（單元名稱的劃分是依據 99 課綱）：

冊	章	單元名稱	題號	配分	小計
一	1	數與式	A	5	25
	2	多項式函數	5, 13	10	
	3	指數、對數函數	D, E	10	
二	1	數列與級數	2	5	25
	2	排列、組合		0	
	3	機率	7, 12, C	15	
	4	數據分析	9	5	
三	1	三角	10, F	10	30
	2	直線與圓	3, 8	10	
	3	平面向量	4, 11	10	
四	1	空間向量	G	5	20
	2	空間中的平面與直線	B	5	
	3	矩陣	1	5	
	4	二次曲線	6	5	

觀察上表後，有以下看法：

1. 若以冊來分類，配分還算平均，每一冊各約占四分之一。
2. 若以章來分類，因為選填 C 主要解題觀念是排列組合單元，所以若將選填 C 納入排列組合單元，則每一章都至少出一題，這應是學測的命題原則。

試題評析

底下針對今年數學考題作評析：

1. 第 1 題：只考矩陣乘積的定義，容易計算，這個難度很適合放第 1 題。
2. 第 2 題：結合對數與樹狀圖，題目新穎，但若沒注意到每一項都大於 1，則會誤選(3)。這可能是命題者的精心設計。

3. 第 3 題：須作出圓心角、知道圓周角是圓心角的一半、會使用三角的換算公式，才足以解出，有鑑別度。
4. 第 4 題：常見的題目。若向量加坐標表示，如 $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ ，則因有提示作用，可降低難度。
5. 第 5 題：此題改自考古題，但與原題的解法不同。此題須想到將 $x = -1$ 代入才能解出，是一大關鍵。
6. 第 6 題：只考二次曲線的標準式，符合課綱，而且正六邊形大小的設計令人讚賞。
7. 第 7 題：題目敘述清楚易懂，且考出條件機率的基本概念，是很好的素養題。
8. 第 8 題：是直線、圓及向量的綜合考題。
9. 第 9 題：是一道結合時事與課程的素養題，看似容易，但須有清楚的邏輯分析才能解出。
10. 第 10 題：雖然 SSA 型解三角形的問題，算是考古題，但之前的題目是給足數據，而此題未給足數據，須靠抽象的邏輯推演，難度提高不少。
11. 第 11 題：題目簡短易懂。由於梯形是較不熟悉的圖形，加上須分類討論及不等式的處理，難度頗高。
12. 第 12 題：排列問題中的相鄰與不相鄰問題是熟悉的題型，但將「2 顆黑球不相鄰且 3 顆紅球都不相鄰」這種舊難題出在學測考題中，實在值得商榷。另外，選項(3)問 $2P(C|A) + 5P(C|B) < 2$ ，應該是考條件機率的乘法原理 $P(C) = P(A)P(C|A) + P(B)P(C|B)$ 。

將選項(1)的數據 $P(A) = \frac{2}{7}$, $P(B) = \frac{5}{7}$ 代入上式，得

$$\frac{2}{7} = \frac{2}{7}P(C|A) + \frac{5}{7}P(C|B) \Rightarrow 2P(C|A) + 5P(C|B) = 2。$$

13. 第 13 題：選項(1)考兩函數圖形的交點數等於方程式的實根數；選項(2)考勘根定理；選項(3)考虛根成雙定理；選項(4)須證明都不存在；選項(4)須找出符合條件的多項式。前三個選項都是教學的主要內容，得分不難。後二個選項就深具鑑別度了。
14. 第 A 題：學測常會出現不需用到高中數學就可解出的題目，此題就是，答對率應該很高，放選填題的第一題很適合。
15. 第 B 題：此題是常見的求平面方程式的題目。將兩條直線方程式分別用對稱比例式與參數式表示，是很細膩的設計。
16. 第 C 題：利用窮舉法列出所有情形，就可解出。但因不容易分類，還是有一些難度。
17. 第 D 題：函數 $y = a \times 2^x$ 不是學生熟悉的函數，只要能對其性質有所了解就可解出。
18. 第 E 題：科學記號與對數的首數、尾數關係是教學的重點，認真的學生此題應沒問題。
19. 第 F 題：根據移動規則就可畫出路徑形成的封閉區域，而且面積很容易求得，放在最後第二題有點驚訝。
20. 第 G 題：此題相當於求四面體的高，是學生熟悉的題型，只要確定投影點是某一邊的中點，就可解出。放在最後一題，有點擔心動作慢的同學沒做到，會很可惜。
21. 有「概念題」：今年有考單一概念的題目，例如第 1 題。
22. 數據美化：數據的設計可看出命題者的用心，例如第 6 題。
23. 選項細膩：因落掉條件解出的答案也會有選項給你選，足見命題者的用心，例如第 2 題。
24. 計算量適中。

25. 跨單元的題目量適當，例如第 2、8 題。

26. 題目依每一大題由易而難排列，難題集中在多選題，而選填題相較容易許多。

結語

整體而言，題目靈活，文字閱讀量及計算量適中，基本題不足，難度偏高。出現好幾題不錯的題目（如第 2、3、6、7、10、13、D、F 題），是一份對高分群有鑑別度的試題。這也意味著數學將是今年甄選入學很關鍵科目。

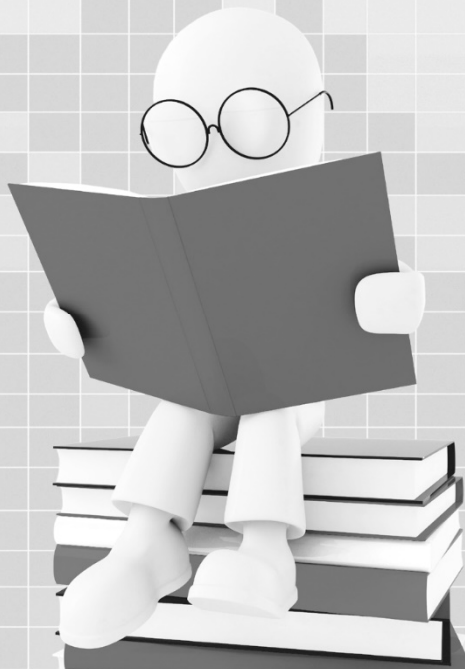
未來命題趨勢

大考中心所列數學考科的測驗目標，為評量考生是否具備「概念性」、「程序性」及「解題能力」等三方面的知識與能力。學測應以評量前二項為主，較偏向概念性知識與程序性知識。往年這三方面知能的試題各約占三分之一的原則組題，今年「概念性」的試題不足，「解題能力」的試題偏多。相信大考中心會審慎檢視這份試卷，讓來年的試題都符合學測評量的目標。

明年是 108 課綱的第一次學測命題，對其命題趨勢有以下幾點看法：

1. **基本概念**：著重基本概念的靈活應用，一直是學測命題的中心想法。因此，加強基本概念的練習是必做的功課。
2. **素養題**：素養是 108 課綱所強調能力，必然也是將來的命題趨勢。因為這類試題的敘述往往會比一般的題目長，所以應培養仔細閱讀题目的耐性，及加強將問題與教材連結的能力。
3. **混合題**：學測新增混合題型（兼含選擇與非選擇題），置於試題的最後，須寫出計算或證明過程。建議平時勤做筆記，從中加強書寫計算過程的能力。
4. **新單元**：由於課綱的改變，往年指考才有的單元學測也會出現，例如：期望值、正餘弦的疊合、三次函數圖形的特徵。由於這些單元在練習考古題時不會練習到，因此準備時要多留意這一塊。
5. **跨章節題**：學測題數多（20 題）必然會有幾題涵蓋兩個單元以上，也藉此提高試題的鑑別度。加強單元與單元之間的連結能力，多練習跨章節的題目，才能在眾多考生中勝出。

以上提出個人淺見供大家參考，尚祈前輩先進們不吝賜教。



試題大剖析

第壹部分：選擇題（占 65 分）

一、單選題（占 30 分）

（此份試卷解題係依據大學入學考試中心於 110 年 1 月 24 日所公告之答案為主）

說明：第 1 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請劃記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。

1 矩陣

設 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ 。若 $A^4 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，則 $a+b+c+d$ 之值為下列哪一個選項？

- (1) 158 (2) 162 (3) 166 (4) 170 (5) 174。

出處：龍騰版《數學 4》第 3 章 矩陣

《【ALL PASS】數學學測總複習講義》第 13 單元

解題觀念：矩陣乘積的定義

答案：(2)

解析：利用矩陣乘積的定義，得

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix},$$

$$A^4 = A^2 A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 80 \\ 0 & 81 \end{bmatrix},$$

因此 $a+b+c+d = 1+80+0+81 = 162$ 。

故選(2)。



2 數列

五項實數數列 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 的每一項都大於 1，且每相鄰的兩項中，都有一數是另一數的兩倍。若 $a_1 = \log_{10} 36$ ，則 a_5 有多少種可能的值？

(1) 3 (2) 4 (3) 5 (4) 7 (5) 8。

出處：龍騰版《數學 2》第 1 章 數列與級數

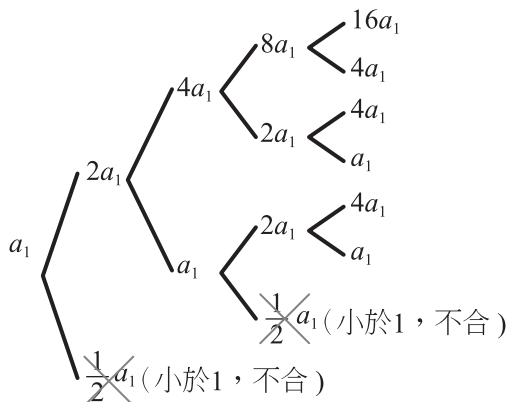
《【ALL PASS】數學學測總複習講義》第 4 單元

解題觀念：數列的意義、對數的定義及運算性質、樹狀圖

答案：(1)

解析：利用對數的定義及運算性質，得知 $a_1 = \log_{10} 36 > 1$ ， $\frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2}\log_{10} 36 = \log_{10} 6 < 1$ 。

藉助樹狀圖及數列的每一項都大於 1 的限制，分析如下：

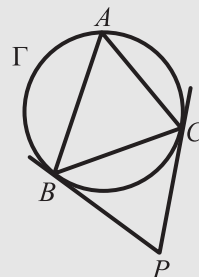


由上圖得知， a_5 可以是 $16a_1, 4a_1, a_1$ ，共 3 種。故選(1)。

3 三角

如圖， $\triangle ABC$ 為銳角三角形， P 為 $\triangle ABC$ 外接圓 Γ 外的一點，且 \overline{PB} 與 \overline{PC} 都與圓 Γ 相切。設 $\angle BPC = \theta$ ，試問 $\cos A$ 的值為下列哪一個選項？

(1) $\sin 2\theta$ (2) $\frac{\sin \theta}{2}$ (3) $\sin \frac{\theta}{2}$ (4) $\frac{\cos \theta}{2}$ (5) $\cos \frac{\theta}{2}$ 。



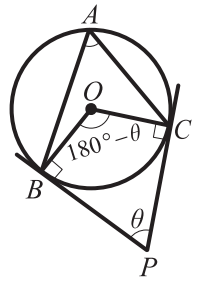
出處：龍騰版《數學 3》第 1 章 三角

《【ALL PASS】數學學測總複習講義》第 8 單元

解題觀念：三角的換算公式

答案：(3)

解 析：如圖，令圓心為 O 。在四邊形 $OBPC$ 中，因為 $\overline{OC} \perp \overline{CP}$ ， $\overline{OB} \perp \overline{BP}$ ，
 所以 $\angle BOC = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \theta = 180^\circ - \theta$ 。
 又因為圓周角等於圓心角的一半，
 所以 $\angle A = \frac{1}{2} \angle BOC = \frac{1}{2} (180^\circ - \theta) = 90^\circ - \frac{\theta}{2}$ 。
 再利用換算公式，得 $\cos A = \cos \left(90^\circ - \frac{\theta}{2} \right) = \sin \frac{\theta}{2}$ 。故選(3)。



4 二階行列式與面積

設 \vec{a} 與 \vec{b} 都是平面上不為零的向量。若 $2\vec{a} + \vec{b}$ 與 $\vec{a} + 2\vec{b}$ 所張成的三角形面積為 6，則 $3\vec{a} + \vec{b}$ 與 $\vec{a} + 3\vec{b}$ 所張成的三角形面積為下列哪一個選項？
 (1) 8 (2) 9 (3) 12 (4) 13.5 (5) 16。

出 處：龍騰版《數學 3》第 3 章 平面向量
 《【ALL PASS】數學學測總複習講義》第 10 單元

解題觀念：用行列式表示三角形的面積

答 案：(5)

解 析：設 $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ， $\vec{b} = (b_1, b_2)$ 。

因為 $2\vec{a} + \vec{b} = (2a_1 + b_1, 2a_2 + b_2)$ ， $\vec{a} + 2\vec{b} = (a_1 + 2b_1, a_2 + 2b_2)$ ，

所以 $\frac{1}{2} \times \begin{vmatrix} 2a_1 + b_1 & 2a_2 + b_2 \\ a_1 + 2b_1 & a_2 + 2b_2 \end{vmatrix} = 6$ 。利用二階行列式的性質，得

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2a_1 + b_1 & 2a_2 + b_2 \\ a_1 + 2b_1 & a_2 + 2b_2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ \leftarrow \times \left(-\frac{1}{2}\right) \end{matrix} &= \begin{vmatrix} 2a_1 + b_1 & 2a_2 + b_2 \\ \frac{3}{2}b_1 & \frac{3}{2}b_2 \end{vmatrix} = \frac{3}{2} \times \begin{vmatrix} 2a_1 + b_1 & 2a_2 + b_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \times (-1) \\ \leftarrow \times (-1) \end{matrix} \\ &= \frac{3}{2} \times \begin{vmatrix} 2a_1 & 2a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

因此 $\frac{1}{2} \times 3 \times \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 6$ ，得 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 4$ 。

又因為 $3\vec{a} + \vec{b} = (3a_1 + b_1, 3a_2 + b_2)$ ， $\vec{a} + 3\vec{b} = (a_1 + 3b_1, a_2 + 3b_2)$ ，且

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3a_1 + b_1 & 3a_2 + b_2 \\ a_1 + 3b_1 & a_2 + 3b_2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \times \left(-\frac{1}{3}\right) \\ \leftarrow \times \left(-\frac{1}{3}\right) \end{matrix} &= \begin{vmatrix} 3a_1 + b_1 & 3a_2 + b_2 \\ \frac{8}{3}b_1 & \frac{8}{3}b_2 \end{vmatrix} = \frac{8}{3} \begin{vmatrix} 3a_1 + b_1 & 3a_2 + b_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \times (-1) \\ \leftarrow \times (-1) \end{matrix} \\ &= \frac{8}{3} \begin{vmatrix} 3a_1 & 3a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

所以所求面積為 $\frac{1}{2} \times 8 \times \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 4 \times \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 4 \times 4 = 16$ 。故選(5)。



5 除法原理

設 $f(x)$ 為實係數三次多項式函數，滿足 $(x+1)f(x)$ 除以 x^3+2 的餘式為 $x+2$ 。若 $f(0)=4$ ，則 $f(2)$ 的值為下列哪一個選項？

- (1) 8 (2) 10 (3) 15 (4) 18 (5) 20。

出處：龍騰版《數學 1》第 2 章 多項式函數

《【ALL PASS】數學學測總複習講義》第 2 單元

解題觀念：多項式的除法原理

答案：(4)

解析：因為 $f(x)$ 為三次多項式，所以 $(x+1)f(x)$ 為四次多項式，

首先，利用除法原理可設 $(x+1)f(x) = (x^3+2)(ax+b) + (x+2)$ 。……(※)

將 $x=0$ 代入(※)式，由 $f(0)=4$ 得 $1 \times f(0) = 2 \times b + 2 \Rightarrow 4 = 2b + 2 \Rightarrow b = 1$ 。

接著，再將 $x=-1$ 代入(※)式，得 $0 \times f(-1) = 1 \times (-a+b) + 1 \Rightarrow 0 = -a+b+1 \Rightarrow a-b=1$ ，

因為 $b=1$ ，所以 $a=2$ 。因此 $(x+1)f(x) = (x^3+2)(2x+1) + (x+2)$ 。

最後，將 $x=2$ 代入上式，得 $3 \times f(2) = 10 \times 5 + 4 \Rightarrow f(2) = 18$ 。故選(4)。

6 橢圓的標準式

坐標平面上有一邊長為 3 的正六邊形 $ABCDEF$ ，其中 $A(3,0)$ ， $D(-3,0)$ 。試問橢圓 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ 與正

六邊形 $ABCDEF$ 有多少個交點？

- (1) 0 (2) 2 (3) 4 (4) 6 (5) 8。

出處：龍騰版《數學 4》第 4 章 二次曲線

《【ALL PASS】數學學測總複習講義》第 14 單元

解題觀念：橢圓方程式

答案：(5)

解析：橢圓 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ 的中心為原點 O ，且 $a=4$ ， $b=\sqrt{7}$ 。

因為 $c = \sqrt{16-7} = 3$ ，所以 A, D 為橢圓的焦點。

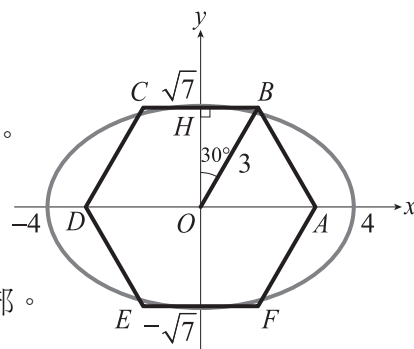
將橢圓及正六邊形 $ABCDEF$ 畫在坐標平面上，如圖所示。

其中因為 $\overline{BA} + \overline{BD} = 3 + 3\sqrt{3} > 8 = 2a$ ，

所以由橢圓的定義得知， B 點在橢圓外部；

因為 $\overline{OH} = \frac{3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{27}{4}} < \sqrt{\frac{28}{4}} = \sqrt{7}$ ，所以 H 點在橢圓內部。

由圖得知，兩圖形共有 8 個交點。故選(5)。



二、多選題（占 35 分）

說明：第 7 題至第 13 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項劃記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7 條件機率

心理學家找了 1000 位受試者進行暗室實驗，每位受試者都要觀看及辨識 6、8、9 三張數字卡，發現將實際數字看成某個數字的機率如下表：

實際數字 \ 看成數字	6	8	9	其他
6	0.4	0.3	0.2	0.1
8	0.3	0.4	0.1	0.2
9	0.2	0.2	0.5	0.1

例如：實際數字 6 被看成 6、8、9 的機率分別為 0.4、0.3、0.2，而被看成其他數字的機率是 0.1。根據上述實驗結果，試選出正確的選項。

- (1) 如果實際數字是 8，則至少有一半的可能性會被看成是 8
- (2) 如果實際數字是 6，則有六成的可能性會被看成不是 6
- (3) 在 6、8、9 三數字中，被誤認的可能性以 9 最低
- (4) 如果被看成的數字是 6，則實際上就是 6 的可能性不到一半
- (5) 如果被看成的數字是 9，則實際上就是 9 的可能性超過 $\frac{2}{3}$ 。

出處：龍騰版《數學 2》第 3 章 機率

《【ALL PASS】數學學測總複習講義》第 6 單元

解題觀念：條件機率

答案：(2)(3)(4)

解析：(1) 因為實際是 8 被看成 8 的機率為 $0.4 < 50%$ ，所以可能性不到一半。
 (2) 因為實際是 6 被看成不是 6 的機率為 $1 - 0.4 = 60%$ ，所以有六成的可能性。
 (3) 因為 6、8、9 被誤認的可能性分別為 $1 - 0.4 = 0.6$, $1 - 0.4 = 0.6$, $1 - 0.5 = 0.5$ ，所以 9 最低。

$$(4) P(\text{實際 } 6 | \text{被看成 } 6) = \frac{P(\text{被看成 } 6 \text{ 且實際 } 6)}{P(\text{被看成 } 6)} = \frac{0.4}{0.4 + 0.3 + 0.2} = \frac{4}{9} < \frac{1}{2}。$$

$$(5) P(\text{實際 } 9 | \text{被看成 } 9) = \frac{P(\text{被看成 } 9 \text{ 且實際 } 9)}{P(\text{被看成 } 9)} = \frac{0.5}{0.2 + 0.1 + 0.5} = \frac{5}{8} < \frac{2}{3}。$$

故選(2)(3)(4)。

**8 平面向量**

如圖， L 為坐標平面上通過原點 O 的直線， Γ 是以 O 為圓心的圓，且 L 與 Γ 有一個交點 $A(3, 4)$ 。

已知 B, C 為 Γ 上的相異兩點滿足 $\vec{BC} = \vec{OA}$ 。試選出正確的選項。

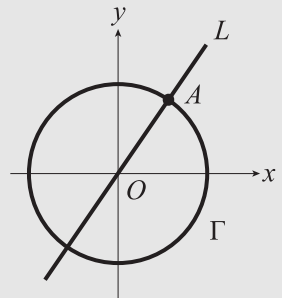
(1) L 與 Γ 的另一個交點為 $(-4, -3)$

(2) 直線 BC 的斜率為 $\frac{3}{4}$

(3) $\angle AOC = 60^\circ$

(4) $\triangle ABC$ 的面積為 $\frac{25\sqrt{3}}{2}$

(5) B 與 C 在同一象限內。



出處：龍騰版《數學3》第3章 平面向量

《【ALL PASS】數學學測總複習講義》第10單元

解題觀念：向量的概念

答案：(3)(5)

解析：因為 $\vec{BC} = \vec{OA}$ ，所以 $OACB$ 為平行四邊形。

又因為 $\vec{OB} = \vec{OC} = \vec{BC} = \vec{OA} = 5$ ，

所以 $\triangle OAC$ 與 $\triangle OBC$ 都是正三角形。

點 B 與 C 有兩種可能，分別以黑、灰兩色顯示，如圖所示。

(1) 因為另一交點與 A 點的連線段為直徑，它們的中點為原點，

所以另一交點的坐標為 $(-3, -4)$ 。

(2) 因為 $\vec{BC} = \vec{OA}$ ，所以直線 BC 的斜率 = 直線 OA 的斜率 = $\frac{4-0}{3-0} = \frac{4}{3}$ 。

(3) 因為 $\triangle OAC$ 為正三角形，所以 $\angle AOC = 60^\circ$ 。

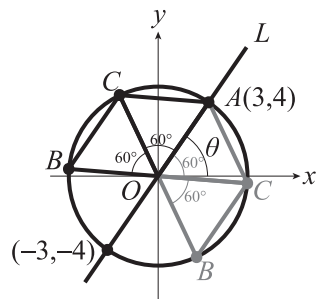
(4) $\triangle ABC$ 的面積為 $\frac{1}{2} \times 5 \times 5 \times \sin 120^\circ = \frac{25\sqrt{3}}{4}$ 。

(5) 設直線 L 與 x 軸正向的銳夾角為 θ 。因為 $\tan \theta = \frac{4}{3} < \sqrt{3}$ ，所以 $0^\circ < \theta < 60^\circ$ ($\theta \approx 53^\circ$)。

由圖知，黑色 B 與 C 兩點都在第二象限；灰色 B 與 C 兩點都在第四象限。

因此點 B 與 C 的兩種可能都在同一象限內。

故選(3)(5)。



9 數據分析

某村的村長選舉設有兩個投票所。已知兩位候選人在各投票所得到的有效票數比例如下表（廢票不列入計算）：

	甲候選人	乙候選人
第一投票所	40%	60%
第二投票所	55%	45%

假設第一投票所與第二投票所的有效票數分別為 x 與 y （其中 $x > 0, y > 0$ ），且以總得票數較高者為當選人。根據上述表格，試選出正確的選項。

- (1) 當有效票數的總和 $x + y$ 已知時，就可決定當選人
- (2) 當 $x : y$ 的比值小於 $\frac{1}{2}$ 時，就可決定當選人
- (3) 當 $x > y$ 時，就可決定當選人
- (4) 當甲候選人在第一投票所的有效票數比在第二投票所的有效票數多時，就可決定當選人
- (5) 當乙候選人在第二投票所的有效票數比在第一投票所的有效票數多時，就可決定當選人。

出 處：龍騰版《數學 2》第 4 章 數據分析

《【ALL PASS】數學學測總複習講義》第 7 單元

解題觀念：圖表解讀與數據分析

答 案：(2)(3)(4)

解 析：因為總得票數較高者為當選人，所以

$$\textcircled{1} \text{ 當甲當選時， } 0.4x + 0.55y > 0.6x + 0.45y \Rightarrow 0.2x < 0.1y \Rightarrow \frac{x}{y} < \frac{1}{2}。$$

$$\textcircled{2} \text{ 當乙當選時， } 0.4x + 0.55y < 0.6x + 0.45y \Rightarrow 0.2x > 0.1y \Rightarrow \frac{x}{y} > \frac{1}{2}。$$

(1) 因為由總和 $x + y$ 不能推得 x 與 y 的比例，所以不可決定當選人。

(2) 當 $\frac{x}{y} < \frac{1}{2}$ 時，甲當選。

(3) 當 $x > y$ 時， $\frac{x}{y} > 1 > \frac{1}{2}$ ，乙當選。

(4) 當 $0.4x > 0.55y$ 時， $\frac{x}{y} > \frac{11}{8} > \frac{1}{2}$ ，乙當選。

(5) 當 $0.45y > 0.6x$ 時， $\frac{x}{y} < \frac{3}{4}$ 。因為不能確定 $\frac{x}{y}$ 大於 $\frac{1}{2}$ 或小於 $\frac{1}{2}$ ，所以不能決定當選人。

故選(2)(3)(4)。

**10 解三角形**

在 $\triangle ABC$ 中，已經知道 $\overline{AB} = 4$ 和 $\overline{AC} = 6$ ，此時尚不足以確定 $\triangle ABC$ 的形狀與大小。但是，只要再知道某些條件（例如：再知道 \overline{BC} 的長度），就可確定 $\triangle ABC$ 唯一的形狀與大小。試選出正確的選項。

- (1)如果再知道 $\cos A$ 的值，就可確定 $\triangle ABC$ 唯一的形狀與大小
- (2)如果再知道 $\cos B$ 的值，就可確定 $\triangle ABC$ 唯一的形狀與大小
- (3)如果再知道 $\cos C$ 的值，就可確定 $\triangle ABC$ 唯一的形狀與大小
- (4)如果再知道 $\triangle ABC$ 的面積，就可確定 $\triangle ABC$ 唯一的形狀與大小
- (5)如果再知道 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑，就可確定 $\triangle ABC$ 唯一的形狀與大小。

出處：龍騰版《數學3》第1章 三角

《【ALL PASS】數學學測總複習講義》第8單元

解題觀念：三角函數值與正弦定理

答案：(1)(2)

解析：由於三角形的三個內角都介於 0° 與 180° 之間，當內角的 \cos 值知道時，就相當於知道該內角；而當內角的 \sin 值知道時，因為 $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$ ，所以該內角可能是兩互補的角。

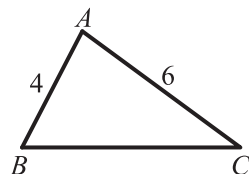
例如，若 $\cos A = -\frac{1}{2}$ ，且 $\angle A = 120^\circ$ ；若 $\sin A = \frac{1}{2}$ ，則 $\angle A = 30^\circ$ 或 150° 。

(1)知道 $\cos A$ 相當於知道 $\angle A$ ，此時有 SAS 的條件，可以確定 $\triangle ABC$ 的形狀與大小。

(2)知道 $\cos B$ 相當於知道 $\angle B$ ，此時的條件為 SSA 。

利用正弦定理，得 $\frac{6}{\sin B} = \frac{4}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{2}{3}\sin B$ ，即知道 $\sin C$ 。

因為 $\overline{AC} > \overline{AB}$ ，所以 $\angle B > \angle C$ ，即 $\angle C$ 必為銳角，因此知道 $\angle C$ ，再由 $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ 知道 $\angle A$ ，此時有 SAS 的條件，可以確定 $\triangle ABC$ 的形狀與大小。

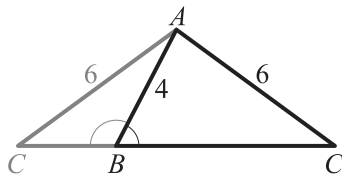


(3)知道 $\cos C$ 相當於知道 $\angle C$ ，此時的條件為 SSA 。

利用正弦定理，得 $\frac{6}{\sin B} = \frac{4}{\sin C} \Rightarrow \sin B = \frac{3}{2}\sin C$ ，即知道 $\sin B$ 。

雖然 $\overline{AC} > \overline{AB}$ ，得知 $\angle B > \angle C$ ，

但 $\angle B$ 還是可能為銳角或鈍角（此兩角互補），如下圖所示：



因此，不可以確定 $\triangle ABC$ 的形狀與大小。

(4) 知道 $\triangle ABC$ 的面積，利用公式 $\Delta = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \sin A$ 可以知道 $\sin A = \frac{\Delta}{12}$ ，

此時 $\angle A$ 可能為銳角或鈍角（此兩角互補）。因此，不可以確定 $\triangle ABC$ 的形狀與大小。

(5) 利用正弦定理，得 $\frac{6}{\sin B} = 2R$ 可以知道 $\sin B = \frac{3}{R}$ 。

雖然 $\overline{AC} > \overline{AB}$ ，得知 $\angle B > \angle C$ ，但 $\angle B$ 還是可能為銳角或鈍角（此兩角互補）。

因此，不可以確定 $\triangle ABC$ 的形狀與大小。

故選(1)(2)。

11 向量的內積

平面上有一梯形 $ABCD$ ，其上底 $\overline{AB} = 10$ 、下底 $\overline{CD} = 15$ ，且腰長 $\overline{AD} = \overline{BC} + 1$ 。試選出正確的選項。

(1) $\angle A > \angle B$ (2) $\angle B + \angle D < 180^\circ$ (3) $\overline{BA} \cdot \overline{BC} < 0$ (4) \overline{BC} 的長可能是 2 (5) $\overline{CB} \cdot \overline{CD} < 30$ 。

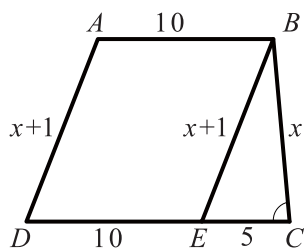
出處：龍騰版《數學 3》第 3 章 平面向量

《【ALL PASS】數學學測總複習講義》第 10 單元

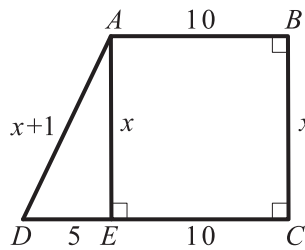
解題觀念：向量的內積

答案：(1)(2)(5)

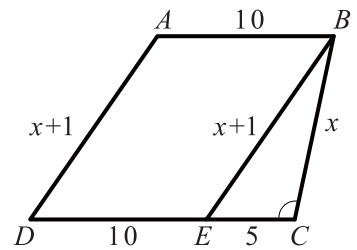
解析：依題意，令 $\overline{BC} = x$ ，將梯形 $ABCD$ 分割成一平行四邊形與一三角形並圖示如下：



(一) $\angle C$ 銳角



(二) $\angle C$ 直角



(三) $\angle C$ 鈍角

(1) 在圖(一)中，因為 $\overline{BE} > \overline{BC}$ ，所以 $\angle C > \angle BEC = \angle D$ ；在圖(二)中， $\angle C = 90^\circ > \angle D$ ；

在圖(三)中，因為 $\overline{BE} > \overline{BC}$ ，所以 $\angle C > \angle BEC = \angle D$ 。

綜合得知 $\angle C > \angle D$ 。又因為 $\angle A = 180^\circ - \angle D$ ， $\angle B = 180^\circ - \angle C$ ，所以 $\angle A > \angle B$ 。

(2) $\angle B + \angle D < \angle B + \angle C = 180^\circ$ 。(3) 在圖(二)中，因為 $\angle B = 90^\circ$ ，所以 $\overline{BA} \cdot \overline{BC} = 0$ 。

(4) 由三角形兩邊之和必大於第三邊，得 $(x+1) + x > 5 \Rightarrow x > 2$ 。

(5) 圖(一)、(三)：因為 $\overline{CB} \cdot \overline{CD} = \overline{CB} \times \overline{CD} \times \cos C = x \times 15 \times \frac{5^2 + x^2 - (x+1)^2}{2 \times 5 \times x} = 36 - 3x$ ，

且 $x > 2$ ，所以 $\overline{CB} \cdot \overline{CD} < 36 - 3 \times 2 = 30$ 。

圖(二)： $\overline{CB} \cdot \overline{CD} = 0 < 30$ 。

故選(1)(2)(5)。

**【另解】**

先固定 \overline{CD} ，如果確定 B 點的位置，那麼就確定 A 點的位置，也就確定梯形 $ABCD$ 。

底下我們來找 B 點可能的位置。

設 \overline{CD} 上一點 E 滿足 $\overline{DE} = 10, \overline{EC} = 5$ 。因為 $ABED$ 為平行四邊形，

所以 $\overline{BE} = \overline{AD} = \overline{BC} + 1$ ，即 $\overline{BE} - \overline{BC} = 1$ 。

由雙曲線的定義得知， B 點落在以 E, C 為焦點、 $2a = 1$ 的雙曲線右半支上。

因為 \overline{AB} 是上底，所以 B 點位於實軸的上方，如圖所示，

其中 V 為頂點， $c = \frac{1}{2}\overline{EC} = \frac{5}{2}$ ， $\overline{VC} = c - a = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2$ 。

(1) 在 $\triangle BEC$ 中，因為 $\overline{BE} > \overline{BC}$ ，所以 $\angle C > \angle BEC = \angle D$ 。

又因為 $\angle A = 180^\circ - \angle D$ ， $\angle B = 180^\circ - \angle C$ ，所以 $\angle A > \angle B$ 。

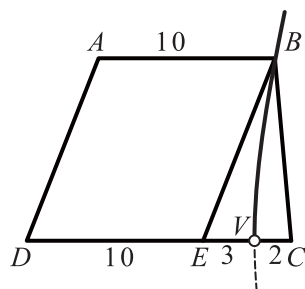
(2) $\angle B + \angle D < \angle B + \angle C = 180^\circ$ 。

(3) 將 B 點沿著雙曲線向右上方移動，當 $\angle ABC$ 為銳角時， $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} > 0$ 。

(4) 在雙曲線上，頂點 V 是距焦點 C 最近的點。因為 $\overline{VC} = 2$ ，所以 $\overline{BC} > 2$ 。

(5) 因為 B 在直線 CD 的投影點一定在 V 的右方，所以 $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} < \overline{CV} \times \overline{CD} = 2 \times 15 = 30$ 。

故選(1)(2)(5)。

**12 條件機率**

設 $P(X)$ 表示事件 X 發生的機率，而 $P(X|Y)$ 表示在事件 Y 發生的條件下，事件 X 發生的機率。

今有 2 顆黑球、2 顆白球、3 顆紅球共 7 顆大小相同的球排成一列。設事件 A 為 2 顆黑球相鄰的事件，事件 B 為 2 顆黑球不相鄰的事件，而事件 C 為任 2 顆紅球都不相鄰的事件。試選出正確的選項。

(1) $P(A) > P(B)$ (2) $P(C) = \frac{2}{7}$ (3) $2P(C|A) + 5P(C|B) < 2$ (4) $P(C|A) > 0.2$

(5) $P(C|B) > 0.3$ 。

出處：龍騰版《數學 2》第 3 章 機率

《【ALL PASS】數學學測總複習講義》第 6 單元

解題觀念：機率與條件機率

答案：(2)(5)

解析：將 7 顆球編號： $B_1, B_2, W_1, W_2, R_1, R_2, R_3$ 。樣本空間的樣本點個數為 $n(S) = 7! = 5040$ 。

(1) 計算 $n(A)$ ：將 B_1, B_2 看成一球，視為 6 球作排列，排法有 6! 種；

又 B_1, B_2 彼此有 2! 種排法，得 $n(A) = 6! \times 2! = 1440$ 。因此 $P(A) = \frac{1440}{5040} = \frac{2}{7}$ 。

因為 B 是 A 的補集 $A'P(A) = \frac{1440}{5040} = \frac{2}{7}$ ，所以 $P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$ ，得 $P(A) < P(B)$ 。

(2) 計算 $n(C)$ ：先將 B_1, B_2, W_1, W_2 排成一列，排法有 $4!$ 種；

再將 R_1, R_2, R_3 排入兩旁及中間的 5 個空隙，有 $C_3^5 \times 3!$ 種，

得 $n(C) = 4! \times C_3^5 \times 3! = 1440$ 。因此 $P(C) = \frac{1440}{5040} = \frac{2}{7}$ 。

(3) 計算 $n(A \cap C)$ ：先將 B_1, B_2 看成一球，與 W_1, W_2 作排列，排法有 $3!$ 種；

又 B_1, B_2 彼此有 $2!$ 種排法；再將 R_1, R_2, R_3 排入兩旁及中間的 4 個空隙，

有 $C_3^4 \times 3!$ 種，得 $n(A \cap C) = 3! \times 2! \times C_3^4 \times 3! = 288$ 。因此 $P(C|A) = \frac{n(A \cap C)}{n(A)} = \frac{288}{1440} = \frac{1}{5}$ 。

計算 $n(B \cap C)$ ：如圖，因為 $A \cap B = \emptyset$ 且 $A \cup B = S$ ，

所以 $n(A \cap C) + n(B \cap C) = n(C)$ ，

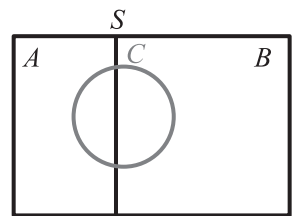
得 $n(B \cap C) = n(C) - n(A \cap C) = 1440 - 288 = 1152$ 。

再得 $P(C|B) = \frac{n(B \cap C)}{n(B)} = \frac{1152}{5040 - 1440} = \frac{8}{25}$ 。

因此 $2P(C|A) + 5P(C|B) = 2 \times \frac{1}{5} + 5 \times \frac{8}{25} = 2$ 。

(4) $P(C|A) = \frac{1}{5} = 0.2$ 。 (5) $P(C|B) = \frac{8}{25} = 0.32 > 0.3$ 。

故選(2)(5)。



13 多項式函數

設多項式函數 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ，其中 a, b, c 均為有理數。試選出正確的選項。

(1) 函數 $y = f(x)$ 與拋物線 $y = x^2 + 100$ 的圖形可能沒有交點

(2) 若 $f(0)f(1) < 0 < f(0)f(2)$ ，則方程式 $f(x) = 0$ 必有三個相異實根

(3) 若 $1+3i$ 是方程式 $f(x) = 0$ 的複數根，則方程式 $f(x) = 0$ 有一個有理根

(4) 存在有理數 a, b, c 使得 $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 依序形成等差數列

(5) 存在有理數 a, b, c 使得 $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 依序形成等比數列。

出處：龍騰版《數學 1》第 2 章 多項式函數

【ALL PASS】數學學測總複習講義》第 2 單元

解題觀念：勘根定理、虛根成對定理與代數基本定理

答案：(2)(3)(5)

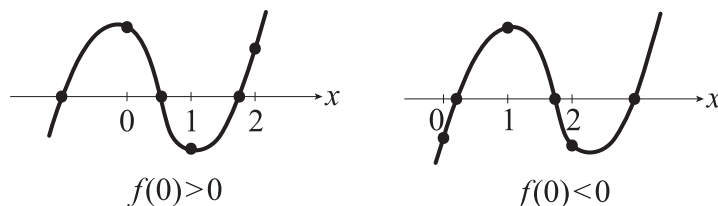
解析：(1) 解 $\begin{cases} y = f(x) \\ y = x^2 + 100 \end{cases}$ ，兩式相減，得 $x^3 + (a-1)x^2 + bx + (c-100) = 0$ 。

因為三次方程式至少一實根，所以兩圖形至少有一個交點。



(2) 因為 $f(x)$ 的首項係數 $1 > 0$ ，所以 $f(x)$ 圖形的最右方是上升的。

依題意，討論 $f(x)$ 圖形與 x 軸的相交情形如下：



因為兩種情形 $f(x)$ 的圖形都與 x 軸有三個相異交點，所以 $f(x) = 0$ 有三個相異實根。

(3) 由虛根成對定理，得知 $1-3i$ 也是方程式 $f(x) = 0$ 的一根。

因此 $(x-(1+3i))(x-(1-3i)) = x^2 - 2x + 10$ 是 $f(x)$ 的因式，

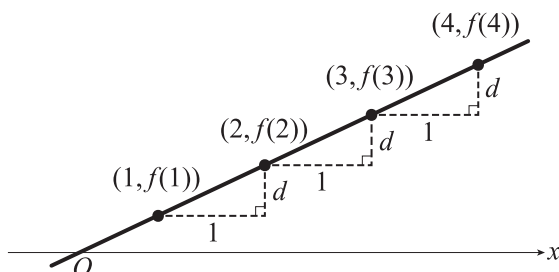
再由 $f(x)$ 的常數項為 c ，得 $f(x) = (x^2 - 2x + 10)\left(x + \frac{c}{10}\right)$ 。

因此 $f(x) = 0$ 有一個有理根 $x = -\frac{c}{10}$ 。

(4) 假設 $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 成等差數列，

則坐標平面上的四個點 $(1, f(1)), (2, f(2)), (3, f(3)), (4, f(4))$

落在斜率為公差 d 的一條直線上。下圖是公差 $d > 0$ 的情形：



令此直線方程式為 $y = dx + k$ 。解 $\begin{cases} y = f(x) \\ y = dx + k \end{cases}$ ，兩式相減，得 $x^3 + ax^2 + (b-d)x + (c-k) = 0$ 。

因為三次方程式至多三個實根，所以兩圖形至多三個交點。

這與兩圖形有四個交點矛盾，故 $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 不可能成等差數列。

(5) 設三次函數 $g(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ 滿足 $g(1) = 1, g(2) = 2, g(3) = 4, g(4) = 8$ 。

$$\text{解} \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta = 1 \\ 8\alpha + 4\beta + 2\gamma + \delta = 2 \\ 27\alpha + 9\beta + 3\gamma + \delta = 4 \\ 64\alpha + 16\beta + 4\gamma + \delta = 8 \end{cases}, \text{得 } \alpha = \frac{1}{6}, \beta = -\frac{1}{2}, \gamma = \frac{4}{3}, \delta = 0, \text{ 即 } g(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x。$$

令 $f(x) = 6g(x) = x^3 - 3x^2 + 8x$ ，則 $a = -3, b = 8, c = 0$ 均為有理數，

且 $f(1) = 6, f(2) = 12, f(3) = 24, f(4) = 48$ 形成公比 2 的等比數列。

故選(2)(3)(5)。

第貳部分：選填題（占 35 分）

說明：1.第 A 至 G 題，將答案劃記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（14-32）
2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A 數線

某機器貓從數線上原點位置朝數線的正向移動，其移動方式如下：以 8 秒為一週期，每一週期先以每秒 4 單位長等速度移動 6 秒，再休息 2 秒。如此繼續下去，則此機器貓在開始移動後 1415 秒會抵達數線上坐標為 116 的位置。

出處：龍騰版《數學 1》第 1 章 數與式

《【ALL PASS】數學學測總複習講義》第 1 單元

解題觀念：數線上的幾何

答案：37

解析：因為每一週期移動 $4 \times 6 = 24$ 單位，且 $116 = 24 \times 4 + 20$ ，

所以共移動 4 個週期又 20 個單位，所花的時間為 $4 \times 8 + \frac{20}{4} = 32 + 5 = 37$ （秒）。

B 空間中的平面與直線

坐標空間中有兩條直線 L_1, L_2 與一平面 E ，其中直線 $L_1: \frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{-5}$ ，而 L_2 的參數式為 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$ （ t 為實數）。若 L_1 落在 E 上，且 L_2 與 E 不相交，則 E 的方程式為 $x - \underline{16}y + \underline{17}z = \underline{18}$ 。

出處：龍騰版《數學 4》第 2 章 空間中的平面與直線

《【ALL PASS】數學學測總複習講義》第 12 單元

解題觀念：向量的外積與平面方程式

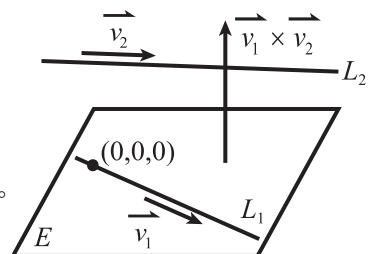
答案： $x - 6y + 4z = 0$

解析：直線 L_1 與 L_2 的一個方向向量分別為 $\vec{v}_1 = (2, -3, -5)$

與 $\vec{v}_2 = (0, 2, 3)$ 。因為 L_1 落在 E 上，且 L_2 平行 E ，

所以 $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (2, -3, -5) \times (0, 2, 3) = (1, -6, 4)$ 是 E 的一個法向量。

又因為 E 通過 L_1 上一點 $(0, 0, 0)$ ，所以 $E: x - 6y + 4z = 0$ 。



**C 機率**

從 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 這九個數中任意取出三個相異的數，每數被取出的機率皆相等，則三數乘積是一完全平方數的機率為 $\frac{\textcircled{19}}{\textcircled{20}\textcircled{21}}$ 。(化成最簡分數)

出處：龍騰版《數學 2》第 3 章 機率

《【ALL PASS】數學學測總複習講義》第 6 單元

解題觀念：機率的定義

答案： $\frac{1}{14}$

解析：樣本空間的樣本點個數為 $C_3^9 = 84$ 。

從 1 到 9 選三相異數乘積所得的完全平方數其質因數必只有 2 或 3，

利用窮舉法，逐一考慮 $4^2, 6^2, 8^2, 9^2, 12^2, 16^2, 18^2, \dots$ ，

得 $4^2 = 1 \times 2 \times 8$ ， $6^2 = 1 \times 4 \times 9 = 2 \times 3 \times 6$ ， $8^2 = 2 \times 4 \times 8$ ， $12^2 = 3 \times 6 \times 8 = 2 \times 8 \times 9$ ，共 6 組。

故所求機率為 $\frac{6}{84} = \frac{1}{14}$ 。

D 指數函數

在坐標平面上， Γ 是邊長為 4 的正方形，其中心位在點 (1, 1)，且各邊與坐標軸平行。已知函數 $y = a \times 2^x$ 的圖形與 Γ 相交，其中 a 為實數，則 a 的最大可能範圍為 $\textcircled{22}\textcircled{23} \leq a \leq \textcircled{24}$ 。

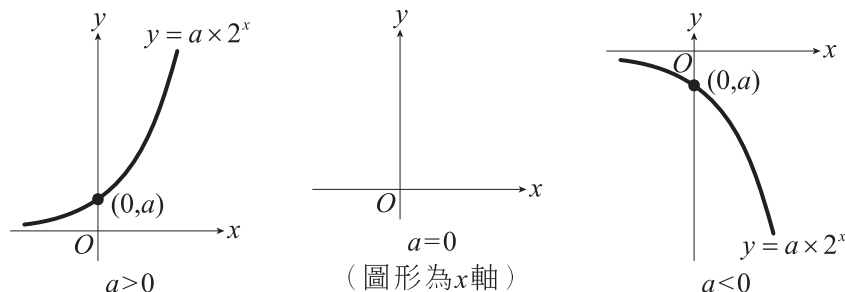
出處：龍騰版《數學 1》第 3 章 指數、對數函數

《【ALL PASS】數學學測總複習講義》第 3 單元

解題觀念：指數函數的性質

答案： $-2 \leq a \leq 6$

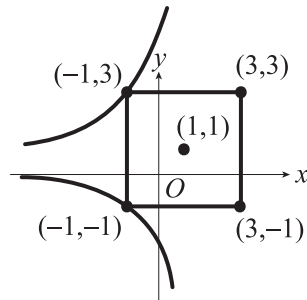
解析：函數 $y = a \times 2^x$ 的圖形如下：



其中

①當 $a > 0$ 時，函數為遞增函數， a 值愈大圖形與 y 軸的交點愈高。

- ②當 $a = 0$ 時，函數圖形為 x 軸。
 ③當 $a < 0$ 時，函數為遞減函數， a 值愈小圖形與 y 軸的交點愈低。
 觀察下圖：



- ①當 $y = a \times 2^x$ 的圖形通過 Γ 的頂點 $(-1, 3)$ 時， a 的值最大，此時 $3 = a \times 2^{-1} \Rightarrow a = 6$ 。
 ②當 $y = a \times 2^x$ 的圖形通過 Γ 的頂點 $(-1, -1)$ 時， a 的值最小，此時 $-1 = a \times 2^{-1} \Rightarrow a = -2$ 。
 故 a 的最大可能範圍為 $-2 \leq a \leq 6$ 。

E 對數的首數與尾數

將 $(\sqrt[3]{49})^{100}$ 寫成科學記號 $(\sqrt[3]{49})^{100} = a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq a < 10$ ，且 n 為正整數。若 a 的整數部分為 m ，則數對 $(m, n) = (\underline{25}, \underline{26})$ 。

出處：龍騰版《數學 1》第 3 章 指數、對數函數

《【ALL PASS】數學學測總複習講義》第 3 單元

解題觀念：科學記號與對數的首數、尾數的關係

答案：(2, 56)

解析：計算 $\log(\sqrt[3]{49})^{100} = \log\left(\left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{200}{3}}\right) = \log 7^{\frac{200}{3}} = \frac{200}{3} \times \log 7 \approx \frac{200}{3} \times 0.8451 = 56.34 = 56 + 0.34$ 。

因為 $\log(\sqrt[3]{49})^{100} = \log(a \times 10^n) = n + \log a$ ，且 $0 < \log a < 1$ ，所以 $n = 56$ ， $\log a = 0.34$ 。
 又因為 $\log 2 < 0.34 < \log 3$ ，所以 $m = 2$ 。故 $(m, n) = (2, 56)$ 。

F 廣義角與極坐標

如圖，機器人在地面上從一點 P 出發，按照以下規則移動：先朝某方向前進一公尺後，依前進方向逆時針旋轉 45° ；朝新方向前進一公尺後，依前進方向順時針旋轉 90° ；再朝新方向前進一公尺後，依前進方向逆時針旋轉 45° ；再朝新方向前進一公尺後，依前進方向順時針旋轉 90° ，……，以此類推。已知機器人移動的路徑會形成一個封閉區域，則此封閉區域的面積為 $\underline{28 + 29\sqrt{30}}$ 平方公尺。(化成最簡根式)





出處：龍騰版《數學3》第1章 三角

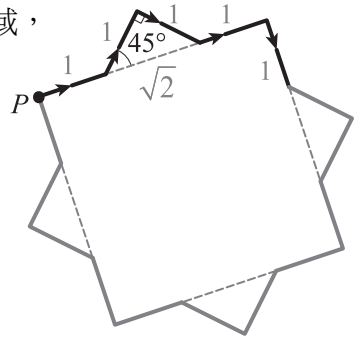
《【ALL PASS】數學學測總複習講義》第8單元

解題觀念：廣義角與極坐標

答案： $8+4\sqrt{2}$

解析：依移動規則機器人繼續前進，其移動的路徑形成一個封閉區域，如圖所示。此封閉區域的面積等於
(4個等腰直角三角形的面積)+(1個正方形的面積)

$$\begin{aligned} &= 4 \times \frac{1 \times 1}{2} + (2 + \sqrt{2})^2 \\ &= 2 + 6 + 4\sqrt{2} \\ &= 8 + 4\sqrt{2}。 \end{aligned}$$



G 直線與平面垂直

在四面體 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = 4\sqrt{6}$ 、 $\overline{BD} = \overline{CD} = 8$ ，且 $\cos \angle BAC = \frac{1}{3}$ ，則點 D 到平面 ABC 的距離為 ⑩ $\sqrt{32}$ 。(化成最簡根式)

出處：龍騰版《數學4》第1章 空間向量

《【ALL PASS】數學學測總複習講義》第11單元

解題觀念：直線與平面垂直

答案： $4\sqrt{2}$

解析：如圖，在 $\triangle ABC$ 中，利用餘弦定理，得

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= (4\sqrt{6})^2 + (4\sqrt{6})^2 - 2 \times 4\sqrt{6} \times 4\sqrt{6} \times \cos \angle BAC \\ &= 96 + 96 - 192 \times \frac{1}{3} = 128，即 \overline{BC} = 8\sqrt{2}。 \end{aligned}$$

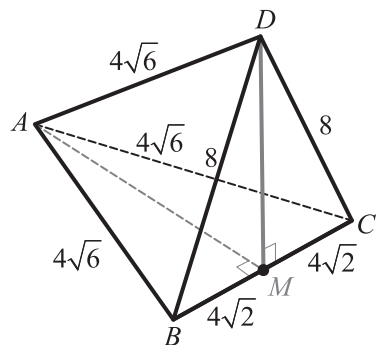
設 M 為 \overline{BC} 中點。因為 $\triangle ABC$ 與 $\triangle BCD$ 都是等腰三角形，所以 $\overline{AM} \perp \overline{BC}$ ， $\overline{DM} \perp \overline{BC}$ 。利用畢氏定理，得

$$\overline{AM} = \sqrt{(4\sqrt{6})^2 - (4\sqrt{2})^2} = 8，\overline{DM} = \sqrt{8^2 - (4\sqrt{2})^2} = 4\sqrt{2}。$$

在 $\triangle AMD$ 中，因為 $\overline{AM}^2 + \overline{DM}^2 = 8^2 + (4\sqrt{2})^2 = (4\sqrt{6})^2 = \overline{AD}^2$ ，所以 $\triangle AMD$ 為直角三角形，且 $\angle AMD = 90^\circ$ 。

又因為 $\overline{DM} \perp \overline{BC}$ 且 $\overline{DM} \perp \overline{AM}$ ，所以 \overline{DM} 垂直平面 ABC 。

故 D 點到平面 ABC 的距離為 $\overline{DM} = 4\sqrt{2}$ 。



參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$ ；

首項為 a ，公比為 r ($r \neq 1$) 的等比數列前 n 項之和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ 。

2. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ ，

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B，$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}。$$

3. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑)；

$\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ 。

4. 一維數據 X ： x_1, x_2, \dots, x_n ，

$$\text{算術平均數 } \mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i，$$

$$\text{標準差 } \sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - n\mu_X^2 \right)}。$$

5. 二維數據 (X, Y) ： $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，

$$\text{相關係數 } r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}，$$

迴歸直線 (最適合直線) 方程式 $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$ 。

6. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\sqrt{7} \approx 2.646$ ， $\pi \approx 3.142$ 。

7. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ， $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ ， $\log_{10} 7 \approx 0.8451$ 。

8. 角錐體積 = $\frac{1}{3}$ (底面積 \times 高)。