新北基高級中等學校

110 學年度學科能力測驗聯合模擬考試

數學考科參考答案暨詳解

翰林出版事業股份有限公司

99362214-30

110-E2

數學

數學考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(5)	(4)	(3)	(4)	(1)	(1)(4)	(2)(5)
8.	9.	10.	11.			
(2)(5)	(2)(3)(5)	(1)(2)(4)	(1)(5)			

第壹部分、選擇題

一、單選題

1. (5)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：操作標準差公式

解析：令 X：2，3，4，5，6

Y：1，$\frac{3}{2}$，2，$\frac{5}{2}$，3

Z：20，30，40，50，60

T：201，302，403，504，605

U：199，200，200，200，201

(1) $\mu_x=\dfrac{2+3+4+5+6}{5}=4$，

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{(2-4)^2+(3-4)^2+(4-4)^2+(5-4)^2+(6-4)^2}{5}}$$

$$=\sqrt{2}$$

(2)因為 $y=\frac{1}{2}x$，所以 $\sigma_y=\frac{1}{2}\sigma_x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3)因為 $z=10x$，所以 $\sigma_z=10\sigma_x=10\sqrt{2}$

(4)因為 $t=101x-1$，所以 $\sigma_t=101\sigma_x=101\sqrt{2}$

(5) $\mu_u=200$，

$$\sigma_u=\sqrt{\frac{(199-200)^2+3\cdot(200-200)^2+(201-200)^2}{5}}$$

$=\sqrt{\dfrac{(-1)^2+1^2}{5}}=\sqrt{\dfrac{2}{5}}$，所以(5)最小

故選(5)。

2. (4)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：利用餘事件和排列組合

解析：樣本空間 6x5x4＝120，

三種課程連續排在相鄰三天的排法為 4x3!＝24

所求為 120－24＝96 (種)

故選(4)。

3. (3)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：學習機率、組合與期望值

解析：因為玩一遍可以戳相異兩格，可獲得金額與機率如下

情況	150 元＋60 元	60 元＋60 元	150 元＋0 元	60 元＋0 元	0 元＋0 元
金額	210	120	150	60	0
機率	$\frac{C^1_1C^{20}_1}{C^{25}_2}=\frac{1}{15}$	$\frac{C^{20}_2}{C^{25}_2}=\frac{19}{30}$	$\frac{C^1_1C^4_1}{C^{25}_2}=\frac{1}{75}$	$\frac{C^{20}_1C^4_1}{C^{25}_2}=\frac{4}{15}$	$\frac{C^4_2}{C^{25}_2}=\frac{1}{50}$

所以玩一遍這個戳戳樂遊戲獲得金額的期望值為

$210\times\frac{1}{15}+120\times\frac{19}{30}+150\times\frac{1}{75}+60\times\frac{4}{15}+0\times\frac{1}{50}=108$ 元

故選(3)。

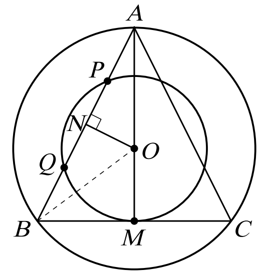
4. (4)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：學習觀察圓的特性與畢氏定理應用

解析：設圓心 O，依題意知 $\overline{AM}\perp\overline{BC}$ ($\because$相切)

做 $\overline{PQ}$ 中點為 N 點，則 $\overline{ON}\perp\overline{PQ}$



根據畢氏定理，在△OBM 中，

$\overline{MB}=\sqrt{\overline{OB}^2-\overline{OM}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

$\overline{AM}=\overline{AO}+\overline{OM}=5+3=8$

同樣根據畢氏定理，在△ABM 中，

$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AM}^2+\overline{MB}^2}=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$

因為 N 為圓心 O 對 $\overline{AB}$ 的垂足，也是 $\overline{AB}$ 中點

所以 $\overline{AN}=\frac{1}{2}\overline{AB}=2\sqrt{5}$

在△AON 中，$\overline{ON}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AN}^2}$

$=\sqrt{5^2-(2\sqrt{5})^2}=\sqrt{5}$

則 $\overline{PQ}=2\overline{PN}$

$=2\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{ON}^2}$

$=2\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2}=4$

故選(4)。

5. (1)

出處：第一冊〈指數、對數〉

目標：閱讀長題意的題目，學習使用 10 的冪次

解析：公式為 $M_w=\frac{2}{3}\log M_0-10.73$

當地震矩規模為 10 時，能量 M_0 變成 M_{10}

$10=\frac{2}{3}\log M_{10}-10.73$

$\Rightarrow\frac{2}{3}\log M_{10}=20.73$

$\Rightarrow\log M_{10}=31.095$

$\Rightarrow M_{10}=10^{31.095}$ ……①

當地震矩規模為 8.8 時，能量 M_0 變成 $M_{8.8}$

$8.8=\frac{2}{3}\log M_{8.8}-10.73$

$\Rightarrow\frac{2}{3}\log M_{8.8}=19.53$

$\Rightarrow\log M_{8.8}=29.295$

$\Rightarrow M_{8.8}=10^{29.295}$ ……②

兩式相除①÷②得

$\frac{M_{10}}{M_{8.8}}=10^{31.095-29.295}$

$=10^{1.8}=(10^{0.3})^6\approx2^6=64$

最接近 60，即 60 倍

故選(1)。

二、多選題

6. (1)(4)

出處：第一冊〈指數、對數〉

目標：學習指數的定義與數值的比較大小

解析：(1) ○：$(-3)^{-2}\cdot 5^{-2}=\dfrac{1}{(-3)^2}\cdot\dfrac{1}{5^2}=\dfrac{1}{225}$

(2) ╳：$(2^{\sqrt{6}})\cdot(2^{\sqrt{6}})=2^{2\sqrt{6}}\neq 2^6=64$

(3) ╳：$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{2}{6}}=\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{6}}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{1}{6}}$，

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{3}{6}}=\left(\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\right)^{\frac{1}{6}}=\left(\dfrac{1}{27}\right)^{\frac{1}{6}}$

因為 $\dfrac{1}{4}>\dfrac{1}{27}$，所以 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}>\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$

(4) ○：根據算幾不等式且 $2^{1.301}\neq 2^{2.699}$，

$2^{1.301}+2^{2.699}>2\sqrt{2^{1.301}\cdot 2^{2.699}}=2\cdot 2^2=2^3$

(5) ╳：因為 $8\approx 10^{0.903}$，$7\approx 10^{0.8451}$，$6\approx 10^{0.7781}$

所以 $8^{100}\approx 10^{90.3}$，$7^{100}\approx 10^{84.51}$，$6^{100}\approx 10^{77.81}$，

也就是 8^{100} 為 91 位數，7^{100} 為 85 位數，6^{100} 為 78 位數，

可知 7^{100} 和 6^{100} 的總和不會超過 91 位數

得出 $7^{100}+6^{100}<8^{100}$

故選(1)(4)。

7. (2)(5)

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：學習使用遞迴數列，利用級數和求出一般項

解析：$n=2$ 時，$a_2=a_1+2^2=6$，

$n=3$ 時，$a_3=a_2+2^3=14$

n 項相加如下

$$\begin{array}{rl} & a_1=2 \\ & a_2=a_1+2^2 \\ & a_3=a_2+2^3 \\ & \vdots \\ +) & a_n=a_{n-1}+2^n \\ \hline & a_n=2+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^n=2^{n+1}-2 \end{array}$$

$n=1$ 時，$a_1=2^2-2=2$ (合)

故選(2)(5)。

8. (2)(5)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：認識二次多項式的圖形與方程式 $f(x)=0$ 沒有實數解的意義

解析：$y=f(x)$ 為二次實係數多項式函數且 $f(x)=0$ 沒有實數解有兩種可能：

$y=f(x)$ 的圖形開口向上，y 值恆正，也就是 $f(x)>0$ 或

$y=f(x)$ 的圖形開口向下，y 值恆負，也就是 $f(x)<0$

(1) ╳：$f(0)$ 可能為負數

(2) ○：$f(1)$ 和 $f(2)$ 的函數值同正或是同負，所以乘積必定為正數

(3) ╳：因為 $f(x)$ 的函數值可能恆為正數或負數，所以解不能確定

(4) ╳：承(3)，同理可知解不能確定

(5) ○：因為 $(f(x))^2$ 恆正，所以等同於解 $(x+3)(x-4)<0$，即為 $-3<x<4$

故選(2)(5)。

9. (2)(3)(5)

出處：第二冊〈三角比〉

目標：學習使用廣義角與面積公式

解析：(1) ╳：A 點坐標為 $(\cos\theta,\sin\theta)$

(2) ○：$\overline{OB}=\overline{OA}\cos(180^\circ-\theta)=\cos(180^\circ-\theta)$

(3) ○：$\triangle OAD$ 的面積為

$\dfrac{1}{2}\,\overline{OA}\cdot\overline{OD}\cdot\sin(180^\circ-\theta)$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin(180^\circ-\theta)$

$=\dfrac{\sin\theta}{2}$

(4) ╳：$\triangle OCD$ 的面積為

$\dfrac{1}{2}\,\overline{OD}\cdot\overline{CD}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan(180^\circ-\theta)$

$=-\dfrac{\tan\theta}{2}$

(5) ○：$\because \triangle OAB\sim\triangle OCD$

$\therefore \dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OD}}=\dfrac{\cos(180^\circ-\theta)}{1}=-\cos\theta$

故選(2)(3)(5)。

10. (1)(2)(4)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：認識三次函數的對稱中心與圖形平移，多項式函數的意義

解析：(1) ○：$f(0)=a(2)^3+2(2)+16=4\Rightarrow a=-2<0$

(2) ○

(3) ╳：因為 $a=-2$，所以 $y=g(x)=x^3+2x+16$ 的圖形無法平移得到 $y=f(x)$ 的圖形

(4) ○：$y=f(x)$ 的圖形在 $x=-2$ 附近的近似直線為 $y=2(x+2)+16$，斜率為 2

(5) ╳：$f(-2.01)=-2(-0.01)^3+2(-0.01)+16\approx 15.98$

故選(1)(2)(4)。

11. (1)(5)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：本題為程序題，學習相關係數與利用迴歸直線估算人口數

解析：$\mu_x=\dfrac{0+4+6+7+8}{5}=5$，$\mu_y=\dfrac{3+5+10+14+18}{5}=10$

I (編號)	X (年度)	Y (人數)	$x_i-\mu_x$	$y_i-\mu_y$	$(x_i-\mu_x)^2$	$(y_i-\mu_y)^2$	$(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)$
1	0	3	-5	-7	25	49	35
2	4	5	-1	-5	1	25	5
3	6	10	1	0	1	0	0
4	7	14	2	4	4	16	8
5	8	18	3	8	9	64	24
總和					40	154	72

$r=$

$$\frac{(x_1-\mu_x)(y_1-\mu_y)+(x_2-\mu_x)(y_2-\mu_y)+(x_3-\mu_x)(y_3-\mu_y)+(x_4-\mu_x)(y_4-\mu_y)+(x_5-\mu_x)(y_5-\mu_y)}{\sqrt{(x_1-\mu_x)^2+(x_2-\mu_x)^2+(x_3-\mu_x)^2+(x_4-\mu_x)^2+(x_5-\mu_x)^2}\times\sqrt{(y_1-\mu_y)^2+(y_2-\mu_y)^2+(y_3-\mu_y)^2+(y_4-\mu_y)^2+(y_5-\mu_y)^2}}$$

$$=\frac{72}{\sqrt{40}\times\sqrt{154}}=\frac{18}{\sqrt{385}}>\frac{18}{20}=0.9$$

又迴歸直線斜率為

$$\frac{(x_1-\mu_x)(y_1-\mu_y)+(x_2-\mu_x)(y_2-\mu_y)+(x_3-\mu_x)(y_3-\mu_y)+(x_4-\mu_x)(y_4-\mu_y)+(x_5-\mu_x)(y_5-\mu_y)}{(x_1-\mu_x)^2+(x_2-\mu_x)^2+(x_3-\mu_x)^2+(x_4-\mu_x)^2+(x_5-\mu_x)^2}$$

$$=\frac{72}{40}=\frac{9}{5}$$

且通過 $(\mu_x , \mu_y)=(5 , 10)$，得迴歸直線方程式為

$y=\frac{9}{5}x+1$，則 $a=1$，$b=\frac{9}{5}$

故⑴ ○；⑵⑶ ╳

⑷ ╳：1950 年表示 $x=5$，代入迴歸直線方程式得 $y=10$，表示人口為 1000 萬人

⑸ ○：2000 年表示 $x=10$，代入迴歸直線方程式得 $y=19$，表示人口為 1900 萬人

故選擇⑴⑸。

三、選填題

12. 15

出處：第一冊〈數與式〉

目標：化簡雙重根式和近似值運算

解析：$\sqrt{11-6\sqrt{2}}=\sqrt{11-2\sqrt{18}}$

$=\sqrt{(\sqrt{9}-\sqrt{2})^2}$

$=3-\sqrt{2}$

得知 $\frac{k}{10}<3-\sqrt{2}<\frac{k+1}{10}$

$\Rightarrow k<30-10\sqrt{2}<k+1$

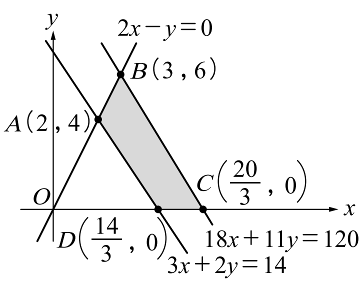
又 $30-10\sqrt{2}\approx 15.86$，因此 $k=15$。

13. $\frac{32}{3}$

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：利用二元一次不等式，計算坐標平面上被圍成的區域面積

解析：滿足聯立不等式所形成的區域如下圖陰影區域，此區域為 $ABCD$ 四點所圍成的四邊形



四邊形 $ABCD$ 面積可利用△OBC 面積減去

△OAD 面積，即 $\frac{1}{2}\times\frac{20}{3}\times6-\frac{1}{2}\times\frac{14}{3}\times4=\frac{32}{3}$。

14. 228

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：利用排列組合討論滿足條件的入座方式

解析：當甲選第 1，3，5 列的座位時，乙剩下 12 個座位可以選

當甲選第 2，4 列的座位時，乙剩下 14 個座位可以選

所以共有 $3\times4\times12+2\times3\times14=228$ 種入座方式。

15. 18

出處：第二冊〈三角比〉

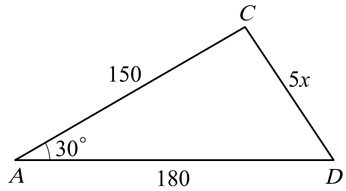
目標：學習利用餘弦定理求距離

解析：設補給太空船的平均速度為每天前進 x 萬公里

五天的航程距離為 $5x$ 萬公里

且太空站 A 距離補給點 D 為 180 萬公里

採用餘弦定理得



$(5x)^2=150^2+180^2-2\times150\times180\cos 30^\circ$

$\Rightarrow 25x^2=22500+32400-54000\times\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 8136$

則 $x^2\approx 325.44\Rightarrow x\approx 18$

故應每天前進 18 萬公里。

16. 16

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：利用平方和公式來估計滿足題意的最大值

解析：由題意可知第 n 層有 n^2 個橘子

$1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\leq 20\times80=1600$

$n=15$ 時，$\frac{15\times16\times31}{6}=1240\leq 1600$

$n=16$ 時，$1240+16^2=1496\leq 1600$

$n=17$ 時，$1496+17^2=1785\geq 1600$(不合)

故最高可以堆 16 層。

17. $\frac{11}{216}$

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：學習古典機率與方程式為 0 時的條件

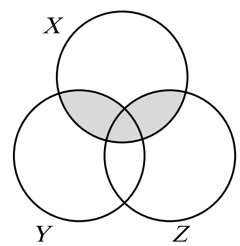
解析：擲一顆公正骰子 4 次

若點數分別為 a、b、c、d，

則所求即為找尋 $a=b$ 且 $b=c$ 或 $c=d$ 的事件機率

令 X 表示點數 $a=b$ 的事件，Y 表示點數 $b=c$ 的事件

Z 表示點數 $c=d$ 的事件



所求即為

$P(X\cap(Y\cup Z))=P((X\cap Y)\cup(X\cap Z))$

$=P(X\cap Y)+P(X\cap Z)-P((X\cap Y)\cap(X\cap Z))$

$=P(a=b=c)+P(a=b$ 且 $c=d)$

$\quad -P(a=b=c$ 且$(a=b$ 且 $c=d))$

$=P(a=b=c)+P(a=b$ 且 $c=d)-P(a=b=c=d)$

$=\frac{6\times1\times1\times6}{6\times6\times6\times6}+\frac{6\times1\times6\times1}{6\times6\times6\times6}-\frac{6\times1\times1\times1}{6\times6\times6\times6}$

$=\frac{11}{216}$。

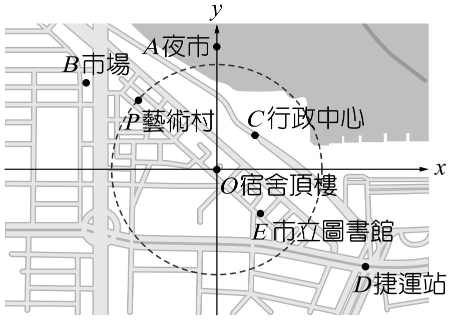
第貳部分、混合題

18. ⑶⑸

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：圓的定義

解析：如下圖，



可知翰翰無人機的飛行範圍是以 O 為圓心，$\overline{OP}$ 為半徑的圓及其內部

因此可得 C 行政中心與 E 市立圖書館也在這個圓內

故選⑶⑸。

19. $187500\pi+125000$ 平方公尺

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：解出直線與圓的交點坐標

解析：通過 $(2\,,11)$ 與 $(4\,,-3)$ 這兩點的直線方程式為

$L：7x+y=25$

而以 O 為圓心，$\overline{OP}$ 為半徑的圓方程式為

$C：x^2+y^2=25$

其與 L 的交點為 $G(3\,,4)$ 與 $H(4\,,-3)$

可計算 $\overline{GH}=\sqrt{(4-3)^2+(-3-4)^2}$

$=5\sqrt{2}$

且 $\overline{OG}=\overline{OH}=5$

即得 $\triangle GOH$ 是等腰直角三角形

所以 $\angle GOH=90^\circ$

或利用 $d(O\,,L)=\dfrac{|-25|}{\sqrt{7^2+1^2}}$

$=\dfrac{5}{\sqrt{2}}$

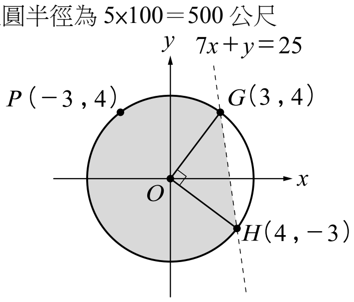
令 M 為 O 到 L 的垂線之垂足，利用畢氏定理，

可得 $\overline{GM}=\dfrac{5}{\sqrt{2}}$，同理 $\overline{HM}=\dfrac{5}{\sqrt{2}}$

即 $\triangle GMO$、$\triangle HMO$、$\triangle GOH$ 都是等腰直角三角形

所以 $\angle GOH=90^\circ$

實際上圓半徑為 $5\times100=500$ 公尺



因此翰翰無人機最遠可操控的範圍如上圖的陰影區域，

其面積為

$500^2\pi\times\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}\times500^2=187500\pi+125000$(平方公尺)。

◎評分原則

19. 通過 $(2\,,11)$ 與 $(4\,,-3)$ 這兩點的直線方程式為

$L：7x+y=25$

而以 O 為圓心，$\overline{OP}$ 為半徑的圓方程式為

$C：x^2+y^2=25$

其與 L 的交點為 $G(3\,,4)$ 與 $H(4\,,-3)$

可計算 $\overline{GH}=\sqrt{(4-3)^2+(-3-4)^2}$

$=5\sqrt{2}$

且 $\overline{OG}=\overline{OH}=5$

即得 $\triangle GOH$ 是等腰直角三角形

所以 $\angle GOH=90^\circ$。(2 分)

或利用 $d(O\,,L)=\dfrac{|-25|}{\sqrt{7^2+1^2}}$

$=\dfrac{5}{\sqrt{2}}$

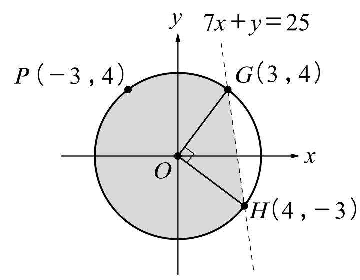
令 M 為 O 到 L 的垂線之垂足，利用畢氏定理，

可得 $\overline{GM}=\dfrac{5}{\sqrt{2}}$，同理 $\overline{HM}=\dfrac{5}{\sqrt{2}}$

即 $\triangle GMO$、$\triangle HMO$、$\triangle GOH$ 都是等腰直角三角形

所以 $\angle GOH=90^\circ$

實際上圓半徑為 $5\times100=500$ 公尺



因此翰翰無人機最遠可操控的範圍如上圖的陰影區域，

其面積為

$500^2\pi\times\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}\times500^2=187500\pi+125000$(平方公尺)。

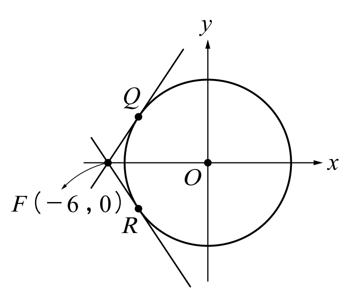
(3 分)(單位寫錯得 2 分)

20. $-\dfrac{5\sqrt{11}}{11}\le m\le\dfrac{5\sqrt{11}}{11}$

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：求直線與圓的切線方程式

解析：如下圖，過 $F(-6\,,0)$ 向圓 C 作切線 L，切點為 Q 點與 R 點



切線方程式可設為 $L：mx-y+6m=0$

因為兩臺無人機可能會相遇

所以 $d(O\,,L)\le r\Rightarrow\dfrac{|6m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}\le5$

解得 $-\dfrac{5\sqrt{11}}{11}\le m\le\dfrac{5\sqrt{11}}{11}$。

〈另解〉

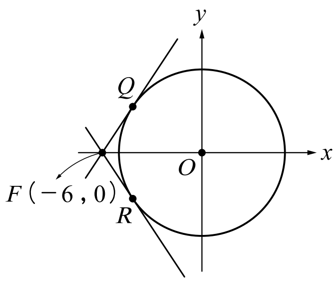
也可以利用直角三角形 QFO 中 $\sin\angle QFO=\dfrac{\overline{OQ}}{\overline{OF}}=\dfrac{5}{6}$

則 $m=\tan\angle QFO=\dfrac{5\sqrt{11}}{11}$

並取 $-\dfrac{5\sqrt{11}}{11}\leq m\leq\dfrac{5\sqrt{11}}{11}$ 。

◎評分原則

20. 如下圖，過 $F(-6, 0)$ 向圓 C 作切線 L，切點為 Q 點與 R 點



切線方程式可設為 L：$mx-y+6m=0$ (1 分)

因為兩臺無人機可能會相遇

所以 $d(O, L)\leq r\Rightarrow\dfrac{|6m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}\leq 5$ (2 分)

解得 $-\dfrac{5\sqrt{11}}{11}\leq m\leq\dfrac{5\sqrt{11}}{11}$ 。(3 分)

〈另解〉

也可以利用直角三角形 QFO 中 $\sin\angle QFO=\dfrac{\overline{OQ}}{\overline{OF}}=\dfrac{5}{6}$ (1 分)

則 $m=\tan\angle QFO=\dfrac{5\sqrt{11}}{11}$ (2 分)

並取 $-\dfrac{5\sqrt{11}}{11}\leq m\leq\dfrac{5\sqrt{11}}{11}$ 。(3 分)