

110 學年度全國高級中學
學科能力測驗雲端模擬考試

數學考科

—作答注意事項—

考試範圍：第一冊全

考試時間：100 分鐘

選擇(填)題計分方式：

- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。
 - 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\frac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
 - 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。
- ※ 試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及可能用到的數值。

祝考試順利



版權所有 · 翻印必究

第壹部分、選擇題（占 85 分）

一、單選題（占 35 分）

說明：第 1 題至第 7 題，每題 5 分。

1. 坐標平面上，已知直線 L 過點 $A(k, 2)$ 和點 $B(-2, k)$ ，且直線 L 與直線 $3x+y=5$ 平行，則實數 k 的值為下列哪一個選項？
 - (A) -4
 - (B) -1
 - (C) 0
 - (D) 1
 - (E) 4
2. P 為數線上的一整數點，已知點 P 與點 $\sqrt{173}$ 的距離小於 6，且與點 $\sqrt{57}$ 的距離大於 4，則滿足條件的點 P 共有幾個？
 - (A) 5 個
 - (B) 6 個
 - (C) 7 個
 - (D) 8 個
 - (E) 9 個
3. 滿足不等式 $2(x-1)^2(x+2)^2 \leq (x-1)^3(x+2)$ 的整數解個數為下列哪一個選項？
 - (A) 1 個
 - (B) 2 個
 - (C) 3 個
 - (D) 4 個
 - (E) 5 個

4. 設圓 C 的圓心為 $A(7, 5)$ ，已知圓 C 與直線 $L: y = mx + 6$ ($m > 0$) 相切，且圓 C 與 x 軸交於相異兩點，則 m 的最大範圍為下列哪一個選項？

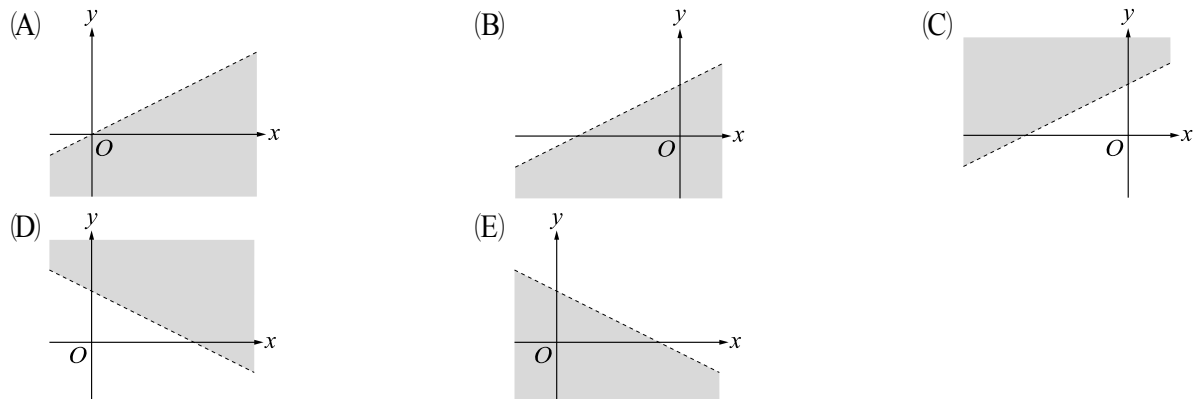
- (A) $0 < m < \frac{3}{4}$
- (B) $0 < m < \frac{4}{3}$
- (C) $\frac{3}{4} < m < \frac{4}{3}$
- (D) $m > \frac{3}{4}$
- (E) $m > \frac{4}{3}$

5. 已知函數 $f(x) = x^2 - 3|x| + 5k$ ，當 $-1 \leq x \leq 4$ 時， $f(x)$ 的最大值為 14，則實數 k 之值為下列哪一個選項？

- (A) 2
- (B) $\frac{14}{5}$
- (C) $\frac{7}{2}$
- (D) $\frac{15}{4}$
- (E) 5

版權所有
翻印必究

6. 已知兩點 $A(0, 0)$ 、 $B(4, 8)$ ，與圓 C 的圓心 $P(x, y)$ ，若點 A 在圓 C 的內部且點 B 在圓 C 的外部，則滿足條件的點 $P(x, y)$ 所形成的區域為下列哪一個選項？

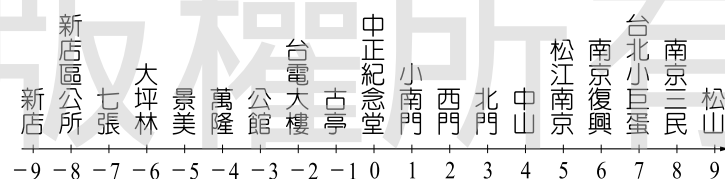


7. 試求滿足 n^n 是 n 位數的正整數 n 共有幾個？
- (A) 1 個
(B) 2 個
(C) 3 個
(D) 4 個
(E) 0 個

二、多選題（占 30 分）

說明：第 8 題至第 13 題，每題 5 分。

8. 若將臺北捷運松山新店線以數線標示，並以中正紀念堂站所在的位置定為 0，往松山方向 1 個站 +1，往新店方向 1 個站 -1，如下圖所示：



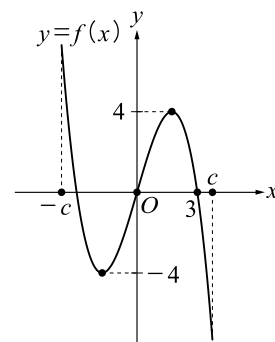
此時若某人從 A 站 (x) 搭乘一趟捷運到達 B 站 (y)，則此人共搭乘 $|x-y|$ 站。

已知小明的家在北門站，小美的家在景美站，今兩人決定下個周末分別從家裡搭乘捷運松山新店線到其中某一個站約會，不考慮轉乘其他捷運路線與公車，請選出正確的選項。

- (A) 小明從北門站搭乘一趟捷運到達景美站，共搭乘 8 站
- (B) 若小明從北門站搭乘一趟捷運到達約會地點，再從約會地點搭乘一趟捷運到景美站送小美回家，兩趟捷運總共搭乘 12 站，則兩人選擇的約會地點必在七張站
- (C) 若小明從北門站搭乘一趟捷運到達約會地點所搭乘的站數，與小美從景美站搭乘一趟捷運到達約會地點所搭乘的站數相同，則兩人選擇的約會地點必在古亭站
- (D) 若小明從北門站搭乘一趟捷運到達約會地點所搭乘的站數不超過 6 站，且小美從景美站搭乘一趟捷運到達約會地點所搭乘的站數不超過 3 站，則兩人可選擇的約會地點共有 3 站
- (E) 若小明從北門站搭乘一趟捷運到達約會地點所搭乘的站數，比小美從景美站搭乘一趟捷運到達約會地點所搭乘的站數多 2 站，則兩人選擇的約會地點必在台電大樓站

9. 已知原點 $O(0, 0)$ 與點 $A(0, 3)$ ，且坐標平面上的點 P 滿足 $\overline{PA} = 2\overline{PO}$ ，若滿足所有條件的點 P 會形成圖形 Γ ，請選出正確的選項。
- (A) 點 $(0, 1)$ 在 Γ 上
 (B) 點 $(0, -3)$ 在 Γ 上
 (C) Γ 是一條直線
 (D) Γ 是一個圓
 (E) 所有的點 P 與點 $(0, -1)$ 的距離相同
10. 已知實係數三次多項式函數 $f(x) = (x-1)^3 + 4(x-1) - 5$ ，請選出正確的選項。
- (A) $y = x^3 + 4x$ 的圖形可以經由平移後與 $y = f(x)$ 的圖形重合
 (B) 若點 (r, s) 在 $y = f(x)$ 的圖形上，則點 $(r+2, s-10)$ 也在 $y = f(x)$ 的圖形上
 (C) $y = f(x)$ 的圖形在 $x=1$ 附近的近似直線為 $y = 4(x-1) - 5$
 (D) $y = f(x)$ 的圖形與 x 軸恰交於一點 $(2, 0)$
 (E) $y = f(x)$ 的圖形與 $y = x^3 + 4x$ 的圖形有交點
11. 已知實係數二次多項式函數 $y = f(x)$ 的圖形與 x 軸交於 $(1, 0)$ 、 $(2, 0)$ 兩點；實係數二次多項式函數 $y = g(x)$ 的圖形與 x 軸交於 $(1, 0)$ 、 $(3, 0)$ 兩點，則不等式 $f(x) + g(x) \geq 0$ 的解可能為下列哪些選項？
- (A) $x = 1$
 (B) $x \leq 1$
 (C) $x \leq 0$ 或 $x \geq 4$
 (D) $x \leq 1$ 或 $x \geq 3$
 (E) x 為任意實數
12. 已知 a 為正實數，且圓 $C: x^2 - 2ax + y^2 - \frac{4}{a}y = 0$ 的圓心為點 P ，當實數 $a = t_0$ 時，圓心 P 與原點 $O(0, 0)$ 的距離最小值為 m ，請選出正確的選項。
- (A) 圓心 P 的坐標為 $\left(a, \frac{2}{a}\right)$
 (B) 圓 C 半徑的最大值為 2
 (C) $t_0 = \sqrt{2}$
 (D) $m = 2$
 (E) $a = t_0$ 時，圓 C 上的點與直線 $x + y + 4 = 0$ 距離的最大值為 $4 + \sqrt{2}$

13. 如右圖，已知實係數三次多項式函數 $f(x)$ 在 $-c \leq x \leq c$ 時，圖形對稱於原點 $O(0, 0)$ ，令 $g(x) = af(x) + b$ (其中 $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$)，請選出正確的選項。



- (A) 若 $a < 0$ ，則函數 $g(x)$ 的圖形對稱於原點
 (B) 若 $a = -1$ ， $-4 < b < 0$ ，且 $g(x)$ 的圖形與 x 軸正向的交點坐標為 $(t, 0)$ ，則 $t > 3$
 (C) 若 $0 < a < 1$ ， $b = 4$ ，則函數 $g(x)$ 的圖形在 $-c \leq x \leq c$ 時與 x 軸有兩個相異交點
 (D) 若 $a \geq 1$ ， $0 < b < 4$ ，則函數 $g(x)$ 的圖形在 $-c \leq x \leq c$ 時與 x 軸有三個相異交點
 (E) 若 $-1 < a < 0$ ， $b > 4$ ，則函數 $g(x)$ 的圖形在 $-c \leq x \leq c$ 時與 x 軸必有交點

三、選填題 (占 20 分)

說明：第 14 題至第 17 題，每題 5 分。

14. 已知整係數多項式 $f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為 9，除以 $x-2$ 的餘式為 8，則 $xf(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)$ 的餘式為 ① x +②。

15. 設 $v(k)$ 為離地高度 k 公尺時的最大風速(單位：km/hr)，已知離地高度分別為 z_1 公尺與 z_2 公尺時，最大風速之間的關係為

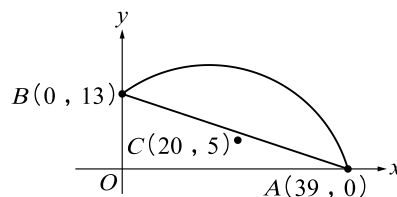
$$v(z_2) = v(z_1) \cdot \frac{\log(z_2) + k}{\log(z_1) + k}, \text{ 其中 } k \text{ 為常數。}$$

- 一電力公司為評估某陸域風力發電之效益，在離地高度 2 公尺與離地高度 10 公尺處分別設置兩風速計，測得最大風速分別為 12 km/hr 與 16 km/hr，若在此處規劃設置塔架高度為 100 公尺的風力發電機，則風扇中心的最大風速為 ①② km/hr。
(四捨五入到整數位)



16. 已知 x 為正實數，且 x 的小數部分為 $\frac{x^2}{5}$ ，則正實數 x 為 ① $-\sqrt{2}$ ③。(化為最簡根式)

17. 鐵路局將某地地圖建立平面坐標系，圖上兩火車站 $A(39, 0)$ 與 $B(0, 13)$ 之間有一直線軌道，因為監測到山坡在 $C(20, 5)$ 可能發生大規模的邊坡滑動，當下決定在地圖上的第一象限中，於 A 、 B 兩站之間規劃一條圓心在第四象限且半徑為 25 單位的圓弧形軌道避開該山坡，如右圖所示，則圖中 C 點到此圓弧形軌道距離的最小值為 ①② 單位。



第貳部分：混合題（占 15 分）

說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。

第 18 至 19 題為題組

18. 多項式 $x^3 + 3x^2 - 16x + 6$ 除以 $x^2 - 2x$ 的商式為下列哪一個選項？(單選題，3 分)

- (A) $x + 1$
- (B) $x + 2$
- (C) $x + 3$
- (D) $x + 4$
- (E) $x + 5$

版權所有
翻印必究

19. 已知 a 是無理數且 $a > 0$ ，若 $P = a^3 + 3a^2 - 16a + 6$ ， $Q = a^2 - 2a$ ，且 P, Q 皆為有理數，試求 a 的值為 ① + √②。(化為最簡根式，12 分)

參考公式及可能用到的數值

1. 一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的公式解： $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
2. 平面上兩點 $P_1(x_1, y_1)$ ， $P_2(x_2, y_2)$ 間的距離為 $\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
3. 通過 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 的直線斜率 $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ ， $x_1 \neq x_2$
4. 點 (x_0, y_0) 到直線 $ax+by+c=0$ 的距離為 $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$
5. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$
6. 對數值： $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ， $\log 7 \approx 0.8451$

版權所有
翻印必究