110 學年度全國高級中學

學科能力測驗模擬考試

數學A考科參考答案暨詳解

翰林出版事業股份有限公司

99362414-30

110-E4

數學 A 考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(3)	(2)	(5)	(1)	(4)	(5)	(2)
8.	9.	10.	11.	12.	13.	
(1)(3)(4)(5)	(1)(2)(5)	(1)(4)	(1)(2)(4)	(2)(3)(5)	(1)(3)(5)	

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (3)

出處：第一冊〈指數、對數〉

目標：評量指數律的操作與常用對數值的應用

解析：可知將船身直立起的高度為

$10^{2.602}=10^2\times10^{0.602}=10^2\times(10^{0.301})^2\approx10^2\times(10^{\log2})^2$

$=10^2\times2^2=400$ (公尺)

故選(3)。

2. (2)

出處：第一冊〈數與式〉、第三冊〈三角函數〉

目標：評量扇形面積的計算與雙重根式的化簡

解析：依題意可得扇形空地面積為 $\frac{1}{2}\times r^2\times\frac{\pi}{2}=(102-20\sqrt{2})\pi$

$\Rightarrow r^2=408-80\sqrt{2}$

$\Rightarrow r=\sqrt{408-80\sqrt{2}}=\sqrt{408-2\sqrt{3200}}$

$=\sqrt{(\sqrt{400}-\sqrt{8})^2}=20-\sqrt{8}\approx20-3=17$

故選(2)。

3. (5)

出處：第三冊〈指數與對數函數〉

目標：評量應用指數與對數函數來解決生活中問題的能力

解析：設該角色人物原先的戰鬥力為 A，且至少需通過 n 關才能使戰鬥力超過原先的 4 倍

可得 $A(1+0.2)^n>4A\Rightarrow(1.2)^n>4\Rightarrow\log(1.2)^n>\log4$

$\Rightarrow n(2\log2+\log3-\log10)>2\log2$

$\Rightarrow n>\dfrac{2\log2}{2\log2+\log3-1}\approx\dfrac{2\times0.3010}{2\times0.3010+0.4771-1}\approx7.6$

$\Rightarrow n=8$

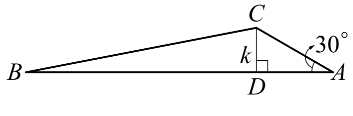
故選(5)。

4. (1)

出處：第二冊〈三角比〉

目標：評量銳角三角比的認知能力及餘弦定理的應用

解析：設 $\overline{CD}=k$，作圖如下



可知 $\overline{AC}=\dfrac{k}{\sin30^\circ}=2k$，$\overline{AD}=\dfrac{k}{\tan30^\circ}=\sqrt{3}k$，

因為 $\overline{AB}:\overline{CD}=4\sqrt{3}:1$，所以 $\overline{AB}=4\sqrt{3}k$

$\Rightarrow\overline{BD}=\overline{AB}-\overline{AD}=3\sqrt{3}k$

$\Rightarrow\overline{BC}=\sqrt{\overline{CD}^2+\overline{BD}^2}=\sqrt{k^2+(3\sqrt{3}k)^2}=2\sqrt{7}k$

在△ABC 中，由餘弦定理可得 $\cos\angle ACB=$

$\dfrac{(2k)^2+(2\sqrt{7}k)^2-(4\sqrt{3}k)^2}{2\times2k\times2\sqrt{7}k}=\dfrac{-16}{8\sqrt{7}}=\dfrac{-2\sqrt{7}}{7}$

故選(1)。

5. (4)

出處：第四冊〈空間中的平面與直線〉

目標：評量應用空間中直線的比例式與平面方程式的能力

解析：設 $A(1,-a,0)$、$B(b,13,3)$ 兩點分別位於 L_1、L_2 上，

且 $\overrightarrow{\ell_1}=(1,-2,-1)$、$\overrightarrow{\ell_2}=(-1,6,2)$ 分別為 L_1、L_2 的一組方向向量

可知

$$\overrightarrow{\ell_1}\times\overrightarrow{\ell_2}=\left(\begin{vmatrix}-2&-1\\6&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1&1\\2&-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&-2\\-1&6\end{vmatrix}\right)$$

$=(2,-1,4)$

因為 L_1，L_2 均位於平面 E 上，所以 $\overrightarrow{n}=(2,-1,4)$ 為平面 E 的一組法向量

又平面 E 通過點 $P(0,-3,0)$，因此由點法式可得

$E：2(x-0)-(y-(-3))+4(z-0)=0$

$\Rightarrow E：2x-y+4z=3$

因為 $A(1,-a,0)$，$B(b,13,3)$ 亦位於平面 E 上，所以可得

$\begin{cases}2+a+0=3\\2b-13+12=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}\Rightarrow a+b=1+2=3$，故選(4)。

6. (5)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：評量三次函數圖形的認知能力

解析：設 $y=ax^3+bx^2+cx+d=a(x-h)^3+p(x-h)+k$，其中點 $A(h,k)$ 為圖形的對稱中心

由圖形可知 $a<0$，$ap>0\Rightarrow p<0$，又點 $A(h,k)$ 位於第一象限，所以 $h>0$，$k>0$

(1)╳：$a=1>0$ (不合)

(2)╳：$a=1>0$ (不合)

(3)╳：$y=-x^3-3x+5$ 的對稱中心為 $(0,5)$ (不合)

(4)╳：$y=-x^3+6x^2-9x+7$

$\Rightarrow h=-\dfrac{b}{3a}=-\dfrac{6}{3\times(-1)}=2$

利用連續綜合除法

$$\begin{array}{rrrr|l}
-1 & +6 & -9 & +7 & 2\\
 & -2 & +8 & -2 & \\
\hline
-1 & +4 & -1 & +5 & \\
 & -2 & +4 & & \\
\hline
-1 & +2 & +3 & & \\
 & -2 & & & \\
\hline
-1 & +0 & & &
\end{array}$$

可得 $y=-x^3+6x^2-9x+7$

$=-(x-2)^3+3(x-2)+5\Rightarrow p=3>0$(不合)

(5)○：$y=-x^3+6x^2-15x+19$

$\Rightarrow h=-\dfrac{b}{3a}=-\dfrac{6}{3\times(-1)}=2$

利用連續綜合除法

$$\begin{array}{rrrr|l}
-1 & +6 & -15 & +19 & 2\\
 & -2 & +8 & -14 & \\
\hline
-1 & +4 & -7 & +5 & \\
 & -2 & +4 & & \\
\hline
-1 & +2 & -3 & & \\
 & -2 & & & \\
\hline
-1 & +0 & & &
\end{array}$$

可得 $y=-x^3+6x^2-15x+19$

$=-(x-2)^3-3(x-2)+5$

故選(5)。

7. (2)

出處：第四冊〈機率〉

目標：評量學生是否能讀懂題意，並依照題述求出條件機率

解析：討論如下：

(i) 擲出 1 點、2 點，則選擇甲袋：若獎金超過 5 萬元，則萬位數字為 6 號、7 號、8 號、9 號

(ii) 擲出 3 點、4 點、5 點、6 點，則選擇乙袋：若獎金超過 5 萬元，則萬位數字為 5 號、6 號、8 號

所以 P(擲出 6 點｜獎金超過 5 萬元)$=\dfrac{\frac{1}{6}\times\frac{3}{5}}{\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}+\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}}$

$=\dfrac{3}{20}$，故選(2)。

二、多選題

8. (1)(3)(4)(5)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：評量學生是否能正確解讀數據，並能發現數據間的相關性

解析：(1) ○：由表格資料可知從 103 年至 109 年，機動車輛數逐年遞增

(2) ╳：由表格資料可知 106 年比 105 年的道路交通事故肇事件數還少

(3) ○：102 年與 109 年的道路交通事故肇事件數分別為 278388，362393

因為 $362393-278388=84005<90000$，所以增加不到九萬件

(4) ○：109 年每萬輛機動車的道路交通事故平均肇事件數為 $\dfrac{362393}{2229.7}\approx\dfrac{362393}{2230}\approx 163>150$

(5) ○：由表格資料可知當機動車輛數增加時，道路交通事故肇事件數也有增加的趨勢，所以兩者為正相關

故選(1)(3)(4)(5)。

9. (1)(2)(5)

出處：第四冊〈空間向量〉、第四冊〈矩陣〉

目標：評量矩陣乘法的運算及空間向量的內積運算性質

解析：可知 $AB=\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3 \\ x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3 \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

(1) ○：$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}=x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3=2$

(2) ○：$(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}$

$=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}$

$=(x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3)+(x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3)$

$=2+(-2)=0$

(3) ╳：反例：$\overrightarrow{a}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{b}=(-2,1,-2)$，

$\overrightarrow{c}=(1,2,1)\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}=0+2+0=2\\ \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=-2+2-2=-2\end{cases}$

但 $\overrightarrow{a}\neq-\overrightarrow{b}$

(4) ╳：承(3)反例可知 $|\overrightarrow{a}|\neq|\overrightarrow{b}|$

(5) ○：若 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 同向，則 $\overrightarrow{a}=k\overrightarrow{b}$，其中 $k>0$

$\Rightarrow\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}=(k\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}=k(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c})$

$=-2k=2$

$\Rightarrow k=-1$ (矛盾)

所以 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 不同向，又 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 皆為非零向量，因此由三角不等式可知

$|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|>|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|$

故選(1)(2)(5)。

10. (1)(4)

出處：第三冊〈平面向量〉

目標：評量平面向量的線性組合與內積的運算

解析：設正方形的邊長為 k，且 $A(0,0)$，$B(k,4k)$，$C(2k,3k)$，$D(4k,k)$

可知 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=(k,4k)\cdot(4k,k)=4k^2+4k^2=8k^2=32$

$\Rightarrow k=2$

$\Rightarrow B(2,8)$，$C(4,6)$，$D(8,2)$

(1) ○：$\overrightarrow{AB}=(2,8)\Rightarrow|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+8^2}=2\sqrt{17}$

(2) ╳：由圖形可知 $\overline{CB}:\overline{CD}=1:2$，所以

$\left|\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right|=|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13}$

〔另解〕

$\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}(2,8)+\frac{1}{3}(8,2)=(4,6)$

$\Rightarrow\left|\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13}$

(3) ╳：由圖形可知 $\overline{AB}=\overline{AD}$，

$0^\circ<\angle BAC<\angle DAC<90^\circ$

$\Rightarrow\cos\angle BAC>\cos\angle DAC>0$

因為 $\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\overline{AC}\times\overline{AB}\times\cos\angle BAC\\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overline{AC}\times\overline{AD}\times\cos\angle DAC\end{cases}$

所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}>\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$

〔另解〕

$\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=(4,6)\cdot(2,8)=8+48=56\\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=(4,6)\cdot(8,2)=32+12=44\end{cases}$

$\Rightarrow\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}>\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$

(4) ○：$\cos\angle BAD=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|}=\dfrac{32}{2\sqrt{17}\times2\sqrt{17}}=\dfrac{8}{17}$

(5) ╳：承(4)可得 $\sin\angle BAD=\sqrt{1-\left(\frac{8}{17}\right)^2}=\dfrac{15}{17}$，所以

$\triangle ABD$ 面積$=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AD}\times\sin\angle BAD$

$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{17}\times2\sqrt{17}\times\frac{15}{17}=30$

〔另解〕

因為 $\overrightarrow{AB}=(2,8)$，$\overrightarrow{AD}=(8,2)$，所以△$ABD$

的面積$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\times 60=30$

故選(1)(4)。

11. (1)(2)(4)

出處：第四冊〈矩陣〉

目標：評量矩陣在平面上線性變換的應用

解析：(1) ○：$B=\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{3} \\ -\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$$

代表坐標平面的一個旋轉變換

(2) ○：$A+B=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3) ╳：$A^3=\begin{bmatrix} \cos\left(3\times\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(3\times\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(3\times\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(3\times\frac{\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(4) ○：$AB=\begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{3}+\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{3}+\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}+\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) & \cos\left(\frac{\pi}{3}+\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix} \cos\left(\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以 $AB=BA$

(5) ╳：可知 $B^2=\begin{bmatrix} \cos\left(2\times\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) & -\sin\left(2\times\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ \sin\left(2\times\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) & \cos\left(2\times\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

又承(4)可得 $AB=BA=I$

$$\Rightarrow B^{-1}=A=\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

所以 $B^{-1}\neq B^2$

故選(1)(2)(4)。

12. (2)(3)(5)

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：評量學生是否能讀懂題意及等差數列的基本性質

解析：設 a_n 表示座號 n 號報出的數，依題意可知

$a_n=1+4(n-1)=4n-3$，$n=1$，2，……，40

(1) ╳：$a_n=4n-3=67\Rightarrow n=\frac{35}{2}$ (不合)，所以沒有同學報出的數為 67

(2) ○：$a_{24}=4\times 24-3=93$ 為 3 的倍數，所以 24 號同學必須舉手

(3) ○：當 n 為 3 的倍數時，$a_n=4n-3$ 必為 3 的倍數，所以 $n=3$，6，9，……，39 時，a_n 為 3 的倍數，即共有 13 位同學舉手

(4) ╳：承(3)可知舉手同學的座號為 3，6，9，……，39，形成一等差數列

(5) ○：承(4)可知正確

故選(2)(3)(5)。

13. (1)(3)(5)

出處：第二冊〈三角比〉、第四冊〈空間向量〉

目標：評量空間概念、空間向量外積的運算及餘弦定理的應用

解析：(1) ○：因為直線 AD 與直線 BC 不共平面且不相交，所以直線 AD 與直線 BC 歪斜

(2) ╳：$\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{EF}$ 不平行

(3) ○：$\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{CG}-\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{AD}\,//\,\overrightarrow{EG}$

(4) ╳：承(3)同理可知 $\overrightarrow{GF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$，所以

$\overline{GE}=\frac{1}{2}\overline{AD}=\frac{3}{2}$，$\overline{GF}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{5}{2}$，

$\angle EGF=\theta$

在△EGF 中，由餘弦定理可得

$$\cos\theta=\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2-(\sqrt{6})^2}{2\times\frac{3}{2}\times\frac{5}{2}}=\frac{1}{3}<\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$$

$\Rightarrow \theta>\frac{\pi}{3}$

(5) ○：承(4)可得 $\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{CB}|=|\overrightarrow{DA}||\overrightarrow{CB}|\sin\theta=3\times 5\times\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$=10\sqrt{2}$$

故選(1)(3)(5)。

三、選填題

14. 99

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：評量多項式的除法原理及餘式定理

解析：由除法原理可知 $f(x)=(x+3)\,q(x)+1$，其中

$q(x)=(x-1)(x-4)\,h(x)+3x+2$

$\Rightarrow f(x)=(x+3)\,[\,(x-1)(x-4)\,h(x)+3x+2\,]+1$

由餘式定理可知 $f(x)$ 除以 $x-4$ 的餘式為

$f(4)=(4+3)(0+3\times4+2)+1=99$。

15. 500

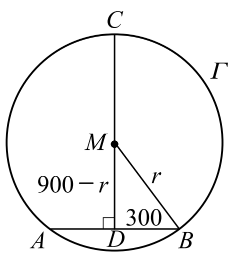
出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：評量學生是否能讀懂題意，及圓的基本認知能力

解析：設東石、泰煥、日錫、元泰分別位於 A、B、C、D 四點，可知 $\overline{MD}\perp\overline{AB}$，$\overline{BD}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\dfrac{1}{2}\times600=300$

$\overline{CD}=900$，$\overline{MC}=\overline{MB}=r\Rightarrow\overline{MD}=900-r$

作圖如下



所以 $r^2=(900-r)^2+300^2$

$\Rightarrow 1800r=810000+90000=900000$

$\Rightarrow r=500$。

16. $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{-2}{3}\right)$

出處：第三冊〈指數與對數函數〉、第三冊〈平面向量〉

目標：評量指數函數圖形的認知，對數律的應用及平面向量的線性組合

解析：可知 $C(0,1)$，解 $\begin{cases}y=3^x\\y=2\end{cases}$

$\Rightarrow 3^x=2\Rightarrow x=\log_3 2\Rightarrow A(\log_3 2,2)$

同理可得 $B(\log_3 8,8)\Rightarrow\overrightarrow{OA}=(\log_3 2,2)$，

$\overrightarrow{OB}=(\log_3 8,8)=\left(\dfrac{\log 8}{\log 3},8\right)$

$=\left(\dfrac{3\log 2}{\log 3},8\right)$

$=(3\log_3 2,8)$

$\overrightarrow{OC}=(0,1)$，因為 $\overrightarrow{OA}=m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OC}$，所以可得

$(\log_3 2,2)=m(3\log_3 2,8)+n(0,1)=(3m\log_3 2,8m+n)$

$\Rightarrow\begin{cases}3m\log_3 2=\log_3 2\\8m+n=2\end{cases}\Rightarrow m=\dfrac{1}{3}$，$n=\dfrac{-2}{3}$，

故數對 $(m,n)=\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{-2}{3}\right)$。

17. $\dfrac{5}{6}$

出處：第三冊〈三角函數〉

目標：評量正餘弦函數的疊合

解析：可知 $A(k,\sin k)$，$B(k,\sqrt{3}\cos k)$

$\Rightarrow\overline{AB}=|\sin k-\sqrt{3}\cos k|$

$=\left|2\left(\sin k\cdot\dfrac{1}{2}-\cos k\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right|$

$=\left|2\left(\sin k\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}-\cos k\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\right|$

$=\left|2\sin\left(k-\dfrac{\pi}{3}\right)\right|$

因為 $0\le k<\dfrac{3\pi}{2}$，所以 $-\dfrac{\pi}{3}\le k-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{7\pi}{6}$

$\Rightarrow\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\le\sin\left(k-\dfrac{\pi}{3}\right)\le\sin\dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\le\sin\left(k-\dfrac{\pi}{3}\right)\le1$

$\Rightarrow\overline{AB}=\left|2\sin\left(k-\dfrac{\pi}{3}\right)\right|\le2$，

其中當 $k-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$ 時，等號成立

即 $k=\dfrac{5}{6}\pi$ 時，$\overline{AB}$ 有最大值。

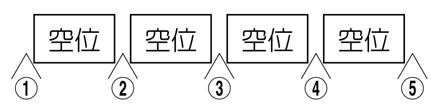
第貳部分、混合題或非選擇題

18. (4)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：評量有限制條件的直線排列

解析：依題意可知會有 4 個空位，將 4 個空位排成一列會有 5 個間隔，再從這 5 個間隔中選出 4 個排入四位面試同學的座位，在此 4 個座位中，兩側的座位為史考特與瓊麗，而中間兩座位為傑森與大衛，說明如下：



若選出①，③，④，⑤這 4 個間隔，則間隔①，⑤需排入史考特與瓊麗的座位

間隔③，④需排入傑森與大衛的座位

所以四位同學的坐法數為 $C^5_4\times2!\times2!=20$，

故選(4)。

19. $\dfrac{805}{3}$ 元

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：評量學生能否讀懂題意，並求出其機率與期望值

解析：討論如下

每顆骰子皆為 1 點

(i) P(較大點數為 1 點)$=\dfrac{1^2}{6^2}=\dfrac{1}{36}$

每顆骰子可能為 1～2 點　每顆骰子皆為 1 點

(ii) P(較大點數為 2 點)$=\dfrac{2^2-1^2}{6^2}=\dfrac{3}{36}$

每顆骰子可能為 1～3 點　每顆骰子可能為 1～2 點

(iii) P(較大點數為 3 點)$=\dfrac{3^2-2^2}{6^2}=\dfrac{5}{36}$

每顆骰子可能為 1～4 點　每顆骰子可能為 1～3 點

(iv) P(較大點數為 4 點)$=\dfrac{4^2-3^2}{6^2}=\dfrac{7}{36}$

每顆骰子可能為 1～5 點　每顆骰子可能為 1～4 點

(v) P(較大點數為 5 點)$=\dfrac{5^2-4^2}{6^2}=\dfrac{9}{36}$

每顆骰子可能為 1～6 點　每顆骰子可能為 1～5 點

(vi) P(較大點數為 6 點)$=\dfrac{6^2-5^2}{6^2}=\dfrac{11}{36}$

故可獲得文具禮券的期望值為

$(60\times1)\times\dfrac{1}{36}+(60\times2)\times\dfrac{3}{36}+(60\times3)\times\dfrac{5}{36}+(60\times4)\times\dfrac{7}{36}$

$+(60\times5)\times\dfrac{9}{36}+(60\times6)\times\dfrac{11}{36}$

$=60\times\dfrac{1+6+15+28+45+66}{36}$

$=\dfrac{805}{3}$ (元)。

◎評分原則

討論如下

每顆骰子皆為 1 點

(i) P(較大點數為 1 點)$=\dfrac{1^2}{6^2}=\dfrac{1}{36}$　(1 分)

每顆骰子可能為 1～2 點　每顆骰子皆為 1 點

(ii) P(較大點數為 2 點)$=\dfrac{2^2-1^2}{6^2}=\dfrac{3}{36}$　(1 分)

每顆骰子可能為 1～3 點　每顆骰子可能為 1～2 點

(iii) P(較大點數為 3 點)$=\dfrac{3^2-2^2}{6^2}=\dfrac{5}{36}$　(1 分)

每顆骰子可能為 1～4 點　每顆骰子可能為 1～3 點

(iv) P(較大點數為 4 點)$=\dfrac{4^2-3^2}{6^2}=\dfrac{7}{36}$　(1 分)

每顆骰子可能為 1～5 點　每顆骰子可能為 1～4 點

(v) P(較大點數為 5 點)$=\dfrac{5^2-4^2}{6^2}=\dfrac{9}{36}$　(1 分)

每顆骰子可能為 1～6 點　每顆骰子可能為 1～5 點

(vi) P(較大點數為 6 點)$=\dfrac{6^2-5^2}{6^2}=\dfrac{11}{36}$　(1 分)

故可獲得文具禮券的期望值為

$(60\times1)\times\dfrac{1}{36}+(60\times2)\times\dfrac{3}{36}+(60\times3)\times\dfrac{5}{36}+(60\times4)\times\dfrac{7}{36}$

$+(60\times5)\times\dfrac{9}{36}+(60\times6)\times\dfrac{11}{36}$　(2 分)

$=60\times\dfrac{1+6+15+28+45+66}{36}=\dfrac{805}{3}$ (元)。　(2 分)