

臺北區 110 學年度第一學期 第一次學科能力測驗模擬考試

數學考科

—作答注意事項—

考試範圍：第一～二冊全

考試時間：100 分鐘

作答方式：

- 選擇題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 考生須依上述規定畫記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響考生成績並傷及權益。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若答案格式是 $\frac{\textcircled{18-1}}{\textcircled{18-2}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生必須分別在答案卡上的第 18-1

列的 \square 與第 18-2 列的 \square 畫記，如：

18-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
18-2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±

例：若答案格式是 $\frac{\textcircled{19-1} \textcircled{19-2}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 19-1 列的 \square 與第

19-2 列的 \square 畫記，如：

19-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
19-2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±

選擇(填)題計分方式：

- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。
 - 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\frac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
 - 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。
- ※試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及可能用到的數值。

祝考試順利



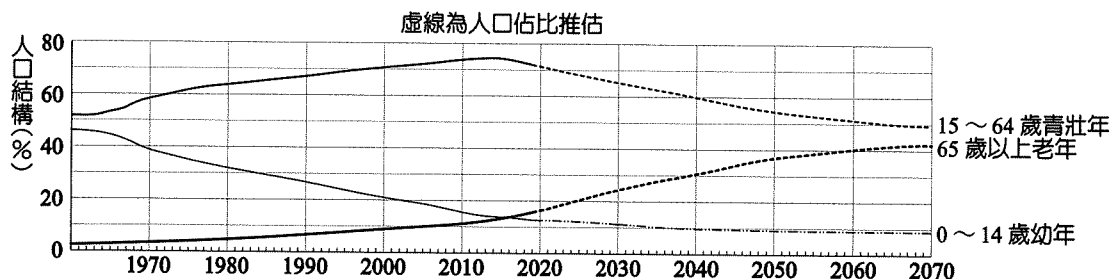
版權所有 · 翻印必究

第壹部分、選擇題（占 85 分）

一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題 5 分。

1. 下列圖表為國家發展委員會於 2020 年 8 月公告對三階段 (0~14 歲幼年、15~64 歲青壯年、65 歲以上老年) 在 2020 至 2070 年的人口佔比推估。



國際上將 65 歲以上人口佔總人口比率達到 7 %、14 % 及 20 %，分別稱為高齡化社會、高齡社會及超高齡社會。依據上表，推估臺灣何時會進入超高齡社會？

- (1) 2020 年
(2) 2025 年
(3) 2030 年
(4) 2035 年
(5) 2040 年
2. 已知 $2^{2x}=3$ ，則 $\frac{2^{3x}+2^{-3x}}{2^x-2^{-x}}$ 之值為何？
- (1) $\frac{13}{3}$
(2) $\frac{14}{3}$
(3) $\frac{7}{3}$
(4) 3
(5) 5
3. 已知圓 $C: x^2+y^2+4x-5=0$ 與兩直線 $L_1: x-y+1=0$ 、 $L_2: x-y+5=0$ 分別交於點 A 、 B 與點 C 、 D ，則此四個點所形成的凸四邊形為下列何種形狀？
- (1) 平行四邊形
(2) 長方形
(3) 梯形
(4) 菱形
(5) 正方形

4. 由 1, 2, 3, 4, 5, 5 等 6 個數字所形成的六位數中，數字 1 出現在 2 之前，且數字 3 出現在數字 5 之前的六位數有多少個？(例如 135245, 134525)
- (1) 60 個
(2) 120 個
(3) 180 個
(4) 240 個
(5) 720 個
5. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足前 n 項和 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = f(n-1)$ ，其中 $f(n)$ 為 n 的二次多項式。已知 $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, $a_3 = 10$ ，則 $f(n) = ?$
- (1) $n^2 + n + 3$
(2) $n^2 + 2n$
(3) $n^2 + 2$
(4) $n^2 + 5n + 3$
(5) $2n^2 + 4n + 3$

6. 在疫情期間，臺灣某產險公司推出一年期防疫保單，其內容針對法定傳染病，消費者花費 500 元保險費用，只要發生居家隔離、集中隔離、隔離治療等狀況其中一種，且收到政府寄發的隔離通知書者，就可以獲得理賠金額 10 萬元。

參考至 2021 年 2 月 19 日為止，其通報人數及占全臺灣人口比例如下表：

	居家隔離、集中隔離、隔離治療 (收到政府寄發的隔離通知書)	居家檢疫、集中檢疫 (收到政府寄發的檢疫通知書)	通報總人數
人數	約 2 萬人	約 15 萬人	約 17 萬人
比例	$\frac{2}{2300}$	$\frac{15}{2300}$	$\frac{17}{2300}$

發生居家隔離、集中隔離、隔離治療、居家檢疫、集中檢疫等狀況的通報數全臺累計約為 17 萬人(其中包含約 15 萬人居家檢疫與集中檢疫者)，若全臺灣約有 2300 萬人，並以上述數據資料做估計，假設保險公司賣出一百萬份保單，扣除業務行政等費用(占保險費用之 20%)後，則其獲利的期望值最接近多少元？

- (1) 2.5 億元
(2) 3 億元
(3) 3.5 億元
(4) 4 億元
(5) 4.5 億元

二、多選題 (占 30 分)

說明：第 7 題至第 12 題，每題 5 分。

7. 小明與朋友一起搭乘摩天輪，已知摩天輪等速率運轉，轉一圈需 18 分鐘，摩天輪的直徑為 80 公尺，小明 10:00 的時候從摩天輪最低點進入車廂開始搭乘，有關小明所在車廂的高度，試選出正確的選項。

- (1) 10:09 在最高點
- (2) 10:07 的高度比 10:12 的高度還高
- (3) 10:04 的高度與 10:14 的高度相同
- (4) 10:12 時的高度比 10:03 時的高度還高 $40\sqrt{3}$ 公尺
- (5) 10:00 到 10:04 之間上升的高度恰為 10:00 到 10:02 之間上升高度的兩倍

8. 設 a, b, c, d 為實數且滿足 $\log a = 2.1$ 、 $\log b = 4$ 、 $10^c = 3$ 、 $10^d = 7$ ，試選出正確的選項。

- (1) $a \times b = 10^{8.4}$
- (2) $\frac{a}{b} = 10^{-1.9}$
- (3) $c + d = \log 21$
- (4) $3a > \frac{b}{7}$
- (5) $b > a > d > c$

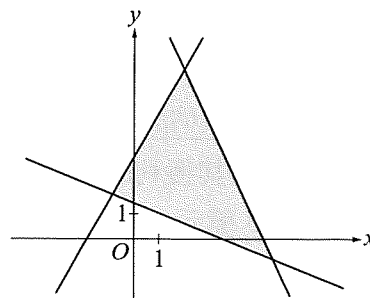
9. 在數線上有三點 $A(a)$ 、 $B(b)$ 、 $P(x)$ ，已知 $a < b$ 且 $\overline{PA} : \overline{PB} = 2 : 1$ ，試選出正確的選項。

- (1) $2|x - a| = |x - b|$
- (2) 若 $x = 5$ 且 $b = 7$ ，則 $a = 1$
- (3) $x > \frac{a+b}{2}$
- (4) 若 $c = \frac{2a+3b}{5}$ ，則 $c > x$
- (5) 若 $|x - a| - |a - b| = |x - b|$ ，則 $b = \frac{x+a}{2}$

10. 右圖為二元一次聯立不等式 $\begin{cases} x + ay + b \geq 0 \\ cx + y + d \geq 0 \\ x + ey + f \leq 0 \end{cases}$ 的解區域，試選出

正確的選項。

- (1) $a > 0$
- (2) $b > 0$
- (3) $c > 0$
- (4) $d > -1$
- (5) $e < 1$



11. 假設有 10 筆二維數據的資料 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{10}, y_{10})$ ，已知

$x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 50$ ， $y_1 + y_2 + \dots + y_{10} = 20$ ， X 與 Y 的相關係數為 0.8，且 y 對 x 的最

適合直線通過點 $(6, 5)$ 。令 $x_i' = \frac{x_i - 5}{\sigma_x}$ ， $y_i' = \frac{y_i - 2}{\sigma_y}$ ，其中 $i = 1, 2, \dots, 10$ 。

若 σ_x 、 σ_y 分別為 x 數據、 y 數據之標準差，試選出正確的選項。

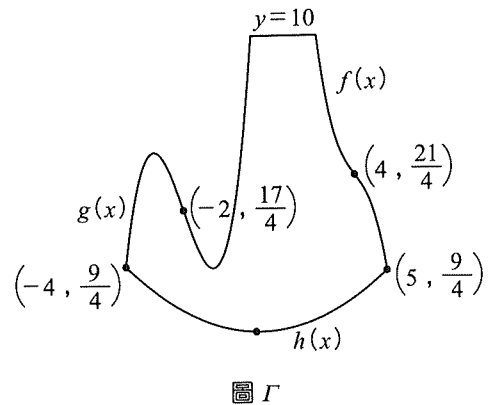
- (1) y 對 x 的最適合直線斜率為 3
- (2) 數據 (x_1, y_1) 必在直線 $y = 3x - 13$ 上
- (3) y' 對 x' 的最適合直線斜率為 0.8
- (4) $(x_1')^2 + (x_2')^2 + \dots + (x_{10}')^2 = 10$
- (5) x 數據的標準差大於 y 數據的標準差

12. 右圖為小華利用所學的多項式函數設計的酒瓶造型，已知他利用了 2 個三次函數 $y = g(x)$ 及 $y = f(x)$ ，1 個二次函數 $y = h(x)$ 與直線 $y = 10$ 的四個部分圖形結合而成圖

形 Γ ，其中 $(-2, \frac{17}{4})$ 與 $(4, \frac{21}{4})$ 分別為三次函數

$y = g(x)$ 及 $y = f(x)$ 的對稱中心，且 $(-4, \frac{9}{4})$ 與 $(5, \frac{9}{4})$

為二次函數 $y = h(x)$ 和三次函數 $y = g(x)$ 及 $y = f(x)$ 的交點，試選出正確的選項。



(1) 點 $(0, \frac{25}{4})$ 亦在圖形 Γ 上

(2) 已知圖形 Γ 的最低點在 x 軸上，則最低點坐標為 $(1, 0)$

(3) $f(x) - \frac{9}{4}$ 有因式 $x - 5$

(4) 若 $f(x)$ 的最高次項係數越小，則 $y = f(x)$ 的圖形會越接近鉛直線

(5) 已知 $g(x)$ 的最高次項係數為 1，則 $g(x) = (x + 2)^3 - 3(x + 2) + \frac{17}{4}$

三、選填題 (占 25 分)

說明：第 13 題至第 17 題，每題 5 分。

13. 已知在極坐標平面上， O 為極點(原點)， A 、 B 兩點的極坐標分別為 $A[2, 15^\circ]$ 、 $B[3, 135^\circ]$ ，

則 A 、 B 兩點的距離 $\overline{AB} = \sqrt{\textcircled{13-1}\textcircled{13-2}}$ 。(化為最簡根式)

14. 一袋中有編號 1~10 號的紅色球 10 顆與編號 1~5 號的藍色球 5 顆。假設每顆球被取出的機會均等，若從袋中一次取出 2 顆球，則取出顏色相異或號碼數乘積為奇數的機率為

$\frac{\textcircled{14-1}}{\textcircled{14-2}}$ 。(化為最簡分數)

15. 若實係數三次多項式不等式 $f(x) > 0$ ，其解的範圍為 $-5 < x < -2$ 或 $-2 < x$ 。已知 $f(x)$ 的最高次項係數為 1，若 $f(x)$ 除以 $x^2 + 4x + 3$ 的餘式為 $ax + b$ ，則數對 $(a, b) =$

$(\textcircled{15-1}, \textcircled{15-2})$ 。

16. 坐標平面上， $A(4, 3)$ ，動點 P 在 x 軸上，動點 Q 在直線 $y=x$ 上，則線段長度和

$\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QA}$ 的最小值為 $\sqrt{\textcircled{16-1}\textcircled{16-2}}$ 。(化為最簡根式)

17. 小明乘坐熱氣球飛到空中一點 D ，此時俯視水平地面上相異三點 A 、 B 、 C ，發現三點的俯角皆為 60° 。若已知 $\overline{AB} = \overline{AC} = 30$ 公尺， $\overline{BC} = 40$ 公尺，則熱氣球 D 點的高度為

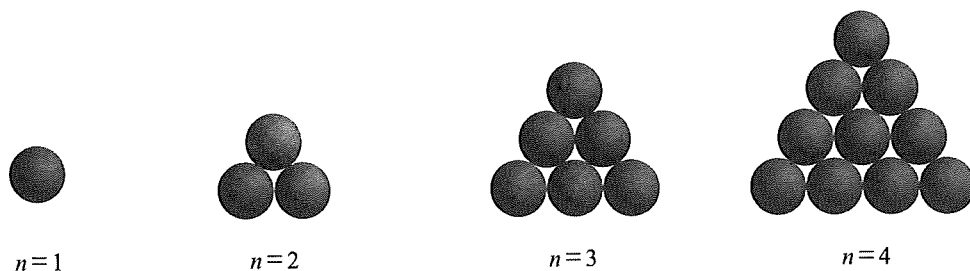
$\sqrt{\textcircled{17-1}\textcircled{17-2}\textcircled{17-3}}$ 公尺。(化為最簡根式)

第貳部分、混合題 (占 15 分)

說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。非選擇題請由左而右橫式書寫，必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

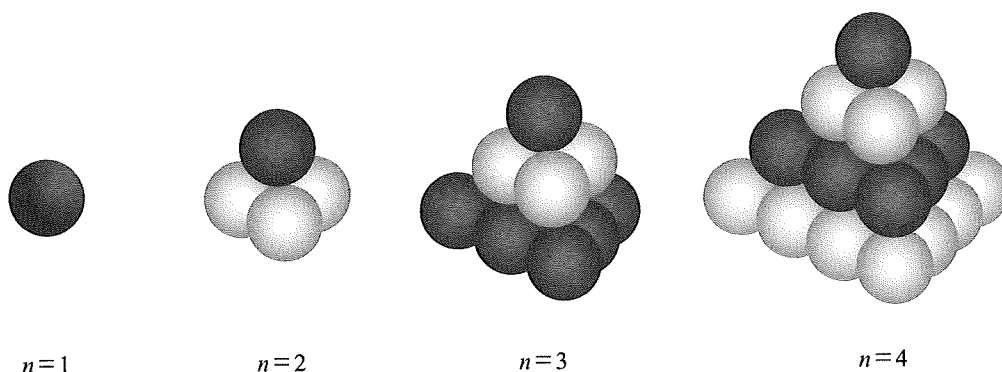
第 18. 至 19. 題為題組

正整數中有一些有趣的數列與幾何圖形有關，例如三角形數與四面體數。
如下圖所示：



若能將大小相同的球，排列成正三角形的形狀，則此時所需球的個數，稱為三角形數。

令 a_n 為排列成邊長為 n 顆球的正三角形所需球的個數，則 $a_1=1, a_2=3, a_3=6, a_4=10, \dots$ 。同理，如下圖所示，若能將大小相同的球，堆疊成正四面體的形狀，此時所需球的個數，稱為四面體數。



若要堆出邊長為 n 顆球的正四面體，方式為最底層先排成邊長為 n 顆球的正三角形，其上一層再排成邊長為 $n-1$ 顆球的正三角形，依此方式堆疊至最上層是 1 顆球。

令 b_n 為堆疊出邊長為 n 顆球的正四面體所需球的個數，則 $b_1=1, b_2=4, b_3=10, b_4=20, \dots$ 。請回答下列問題：

18. 有關三角形數所形成的數列 $\langle a_n \rangle$ 與四面體數所形成的數列 $\langle b_n \rangle$ ，試選出正確的選項。
(多選題，5 分)

(1) $a_5=15$

(2) $a_{n+1}-a_n=n$

(3) $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

(4) $b_5-b_4=10$

(5) $b_5=35$

19. 試求出數列 $\langle b_n \rangle$ 的一般項 b_n (以 n 的多項式表示) 並且說明之。(10 分)

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為 a ，公比為 r ($r \neq 1$) 的等比數列前 n 項之和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 級數和 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑)

$\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

4. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$

算術平均數 $\mu_x = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$

標準差 $\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1 - \mu_x)^2 + (x_2 - \mu_x)^2 + \dots + (x_n - \mu_x)^2]} = \sqrt{\frac{1}{n}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - n\mu_x^2}$

5. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，標準化後數據 $X': x_1', x_2', \dots, x_n'$ ，其中 $x_i' = \frac{x_i - \mu_x}{\sigma_x}$ ，

$i = 1, 2, \dots, n$ 。標準化後數據算術平均數 $\mu_{x'} = 0$ ；標準差 $\sigma_{x'} = 1$

6. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，

相關係數 $r_{X,Y} = \frac{(x_1 - \mu_x)(y_1 - \mu_y) + (x_2 - \mu_x)(y_2 - \mu_y) + \dots + (x_n - \mu_x)(y_n - \mu_y)}{n\sigma_x\sigma_y}$

迴歸直線(最適合直線)方程式 $y - \mu_y = r_{X,Y} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \mu_x)$

7. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\sqrt{7} \approx 2.646$ ， $\pi \approx 3.142$

8. 對數值： $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ， $\log 5 \approx 0.6990$ ， $\log 7 \approx 0.8451$