臺北區 110 學年度第一學期
第二次學科能力測驗模擬考試

數學 A 考科

—作答注意事項—

考試範圍：第一～二冊、數學 A 第三～四冊

考試時間：100 分鐘

作答方式：

- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響成績並損及權益。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若答案格式是 $\dfrac{18\text{-}1}{18\text{-}2}$，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答題卷上的第 18-1 列的 $\overset{3}{\square}$ 與第 18-2 列的 $\overset{8}{\square}$ 劃記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
18-1	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□
18-2	□	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□

例：若答案格式是 $\dfrac{19\text{-}1\ 19\text{-}2}{50}$，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答題卷的第 19-1 列的 $\overset{-}{\square}$ 與第 19-2 列的 $\overset{7}{\square}$ 劃記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
19-1	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	□
19-2	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□	□

選擇(填)題計分方式：

- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\dfrac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

祝考試順利

99363203-30

第壹部分、選擇（填）題（占 85 分）

一、單選題（占 25 分）

說明：第 1 題至第 5 題，每題 5 分。

1. 為便於國際比較，指揮中心同時公布疫苗「接種人口涵蓋率」和「劑次人口比」數據，「接種人口涵蓋率」的算法是第一劑疫苗接種人數除以全國人口數；「劑次人口比」則是第一劑、第二劑疫苗接種人數加總後除以全國人口數，通用指標為「每 100 人接種劑數」。某地區目前人口數 2400 萬人，疫苗「接種人口涵蓋率」為 35 %，「劑次人口比」為每 100 人 40 劑。若想在 30 天內達成「接種人口涵蓋率」為 60 % 的目標，則平均每天第一劑疫苗接種之施打量為多少萬劑？
   (1) 24
   (2) 20
   (3) 16
   (4) 12
   (5) 8

2. 某百貨公司週年慶為吸引消費者，舉辦百元禮券大放送的活動。禮券發放規則為百貨業者準備 1 顆<u>不公正</u>的骰子，骰子出現 k 點的機率為 $\frac{k}{n}(k=1，2，3，4，5，6)$，每投擲一次，若出現 k 點可得 $7-k$ 張禮券，一位消費者可連投 3 次，試求消費者所得禮券張數的期望值為多少張？
   (1) 4 張
   (2) 6 張
   (3) 8 張
   (4) 10 張
   (5) 12 張

3. 在坐標平面上，已知 $|\overrightarrow{AB}|=3$，$|\overrightarrow{AC}|=5$，$\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 的夾角為 60°，則由 $2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$ 兩向量所張成的平行四邊形面積為何？
   (1) $\frac{15\sqrt{3}}{2}$
   (2) $75\sqrt{3}$
   (3) $105\sqrt{3}$
   (4) $\frac{105\sqrt{3}}{2}$
   (5) $\frac{105\sqrt{3}}{4}$

4. 已知方程組$\begin{cases} ax+by=3 \\ cx+dy=5 \end{cases}$的解 $(x, y)=(1, 7)$，若方程組$\begin{cases} ex+fy=1 \\ gx+hy=7 \end{cases}$的解 $(x, y)=(m, n)$，且 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$，則 $m-n$ 之值為下列何者？

(1) 44

(2) 11

(3) 6

(4) -3

(5) -22

5. 甲，乙，丙三位好友經常相約聚餐，每次的餐費都採取擲硬幣決定何人付費。付費規則為甲，乙，丙三人各擲一枚均勻的硬幣，若某人出現的正、反面與另外兩人不同時，則必須負責支付三人該次的餐費總額；若三人皆擲出相同面，則再各自擲一次硬幣，每次投擲結果互不影響；若連續 3 次仍無法決定何人付費，則該次餐費便採取各自付費。某次用餐，三人所點的餐皆為 320 元，請問該次聚餐甲無須付費的機率為何？

(1) $\frac{2}{3}$

(2) $\frac{11}{16}$

(3) $\frac{21}{32}$

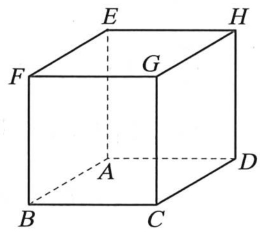
(4) $\frac{11}{32}$

(5) $\frac{21}{64}$

二、多選題（占 25 分）

說明：第 6 題至第 10 題，每題 5 分。

6. 坐標空間中一正立方體 $ABCD-EFGH$ 如右圖所示。已知 $t>0$，其中四個頂點的坐標為 $A(0, 0, 0)$、$B(t, 0, 0)$、$D(0, t, 0)$、$E(0, 0, t)$，$P(a, b, c)$ 為正立方體內一點。若 $\overline{PA}=\sqrt{2}$，$\overline{PB}=\overline{PD}=\sqrt{3}$，$\overline{PE}=1$，請選出正確的選項。



(1) P 點落在 $\overline{BD}$ 的垂直平分面上

(2) $c=2a$

(3) 正立方體的體積為 9

(4) $\cos\angle PAB=\frac{\sqrt{6}}{6}$

(5) P 點與直線 BD 的距離為 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

7. 若$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 12 & 74 & 212 \\ 36 & 212 & 656 \end{bmatrix}$，請選出正確的選項。

(1) a，b，c，d 的算術平均數為 $\frac{43}{2}$

(2) a，b，c，d 的標準差為 $\sqrt{\frac{77}{2}}$

(3) $a^3+b^3=468$

(4)若 $\overrightarrow{u}=(a\,,d)$，$\overrightarrow{v}=(c\,,b)$，則 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=656$

(5)若 $\overrightarrow{OA}=(a\,,b)$，$\overrightarrow{OB}=(-d\,,c)$，則$\triangle OAB$ 的面積為 212

8. 臺北市某紅茶店的店長隨機選了 5 天記錄當日最高氣溫(攝氏)和紅茶的銷售金額(千元)，如下表所示。

最高氣溫(攝氏 X 度)	32	29	35	36	33
銷售金額(臺幣 Y 千元)	86	74	100	109	81

店長為提供資料給想開加盟店的美國好友，將攝氏溫度(X 度)及臺幣(Y 千元)分別轉換成華氏溫度(U 度)及美元(V 千美元)，其中華氏溫度$=\frac{9}{5}$(攝氏溫度)$+32$；1 美元以 30 元臺幣計算。令 X，Y 兩者的相關係數為 r_1，Y 對 X 的最適直線斜率為 m_1。轉換後，U，V 兩者的相關係數為 r_2，V 對 U 的最適直線斜率為 m_2，請選出正確的選項。

(1) $r_1>0.6$

(2) $r_1=r_2$

(3) $m_1<m_2$

(4) Y 對 X 的最適直線通過點 $(33\,,81)$

(5) V 對 U 的最適直線通過點 $(91.4\,,3)$

9. 空間中有兩條直線 L_1：$\frac{x-7}{3}=\frac{y-3}{a}=\frac{z-8}{6}$，$L_2$：$\frac{x-6}{2}=\frac{y-4}{3}=\frac{z}{b}$，其方向向量分別為 $\overrightarrow{\ell_1}=(3\,,a\,,6)$，$\overrightarrow{\ell_2}=(2\,,3\,,b)$，請選出正確的選項。

(1)若 $L_1 // L_2$，則 $a=\frac{9}{2}$，$b=9$

(2)若 $L_1 // L_2$，則 L_1，L_2 兩直線距離為 $\sqrt{66}$

(3)若 $a=6$，$b=2$，則存在一平面同時包含 L_1，L_2

(4)若 $a=6$，$b=2$，則 L_1，L_2 兩直線距離為 4

(5)若有一正四面體的兩個不相交稜邊分別在 L_1，L_2 上，則 $|\overrightarrow{\ell_1}|^2+|\overrightarrow{\ell_2}|^2$ 的最小值為 $\frac{294}{5}$

10. 有一個玩牌拿獎金遊戲，其規則如下：莊家與玩家各拿一副分別寫有數字 1、2、3、4、5 的五張牌，然後莊家與玩家各自從自己的五張牌中隨機拿出一張牌出來，每張牌被取出的機會相等。若拿出來的兩張牌數字和為奇數，則玩家可獲得該數字和的 100 倍獎金，若數字和為偶數，則玩家須給莊家 600 元，請選出正確的選項。

(1)玩家玩一次能獲得獎金的機率為 $\frac{6}{25}$

(2)玩家玩一次的所得金額期望值為 24 元

(3)若玩家連續玩兩次，則最終結算金額大於 0 元的機率為 $\frac{12}{25}$

(4)若玩家連續玩兩次，則最終結算金額超過 1000 元的機率為 $\frac{72}{625}$

(5)若玩家連續玩兩次且最終結算金額大於 0 元，則其最終結算金額超過 1000 元的機率為 $\frac{6}{25}$

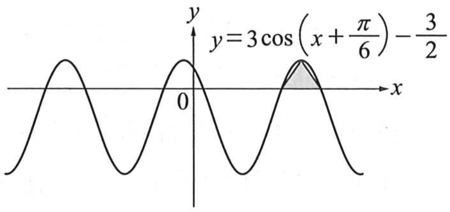
三、選填題（占 35 分）

說明：第 11 題至第 17 題，每題 5 分。

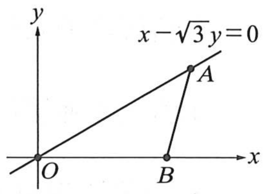
11. 已知一奈米為 10^{-9} 公尺，某病毒的直徑為 x 公尺，且 $\log x = -7.2219$，若此病毒的直徑為 y 奈米，則 y 最接近的整數為 ⑪-1⑪-2 。

12. $\triangle ABC$ 的重心為 P 點，過 P 點作一直線分別交 $\overline{AB}$ 、$\overline{AC}$ 於 Q、R 兩點，若 $\overrightarrow{AQ} = a\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AR} = \frac{3a}{2}\overrightarrow{AC}$，則 $a = \frac{⑫\text{-}1}{⑫\text{-}2}$ 。(化為最簡分數)

13. 若右圖為訊號產生器產出的波 $y=3\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{3}{2}$，則右圖中著色三角形的面積為 $\frac{⑬-1}{⑬-2}\pi$。(化為最簡分數)

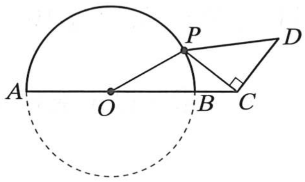


14. 在坐標平面上第一象限有一點 A 在直線 $x-\sqrt{3}y=0$ 上，另一點 B 在 x 軸的正向上，如右圖所示。已知 $\overline{AB}=4$，O 為原點，試求△OAB 面積的最大值為 $⑭-1+⑭-2\sqrt{⑭-3}$。(化為最簡根式)

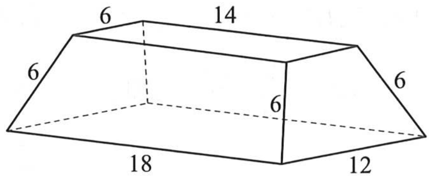


15. 農夫有一塊正方形的田地，已知該田地的四個邊界剛好各有一口水井，而且都不是在正方形的頂點上；若將該田地坐標化且選取一定點為原點後，則四口水井的坐標依順時針方向分別為 $(0,8)$、$(9,2)$、$(6,0)$、$(-5,4)$，試問滿足該四口水井位置的最大田地面積為 15-1 15-2 15-3 平方單位。

16. 如右圖，O 為圓心，圓的直徑 $\overline{AB}=4$，C 在 $\overrightarrow{AB}$ 射線上，$\overline{BC}=1$，P 為上半圓上的動點，△PCD 為等腰直角三角形，$\angle PCD=90^\circ$，O，D 在 $\overline{PC}$ 異側，試求四邊形 $OCDP$ 面積的最大值為 $⑯-1\sqrt{⑯-2}+\frac{⑯-3\ ⑯-4}{⑯-5}$。(化為最簡分數及最簡根式)



17. 有一個搭好的帳篷由上方一個長方形，側面四個梯形組成，其中四個梯形皆為等腰梯形，且對面的梯形全等。上方的長方形長 14 公分，寬 6 公分，側面的等腰梯形分別為上底 14 公分、下底 18 公分、腰長 6 公分，上底 6 公分、下底 12 公分、腰長 6 公分。設兩相鄰梯形所夾的兩面角為 θ，



試求 $|\cos\theta|=\frac{\sqrt{⑰-1}}{⑰-2\ ⑰-3}$。(化為最簡根式)

第貳部分、混合題或非選擇題（占 15 分）

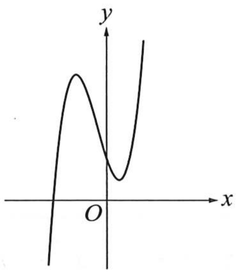
說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

18－20 題為題組

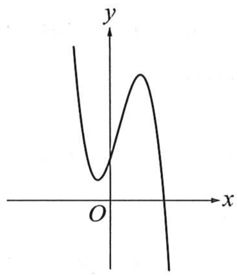
令 $f(x)=2x^3+ax^2-2ax+5$，試回答下列問題：

18. 下列哪個選項為 $y=f(x)$ 可能的圖形？(單選題，3 分)

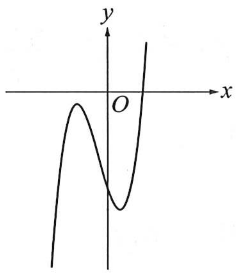
(1)



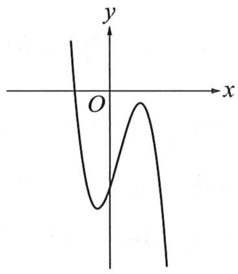
(2)



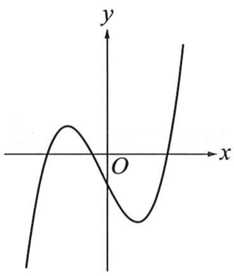
(3)



(4)



(5)



19. $f(x)$ 除以 $x(x-2)$ 的餘式為何？(非選擇題，6 分)

20. $y=f(x)$ 的圖形向左平移 1 單位，向下平移 1 單位後會通過原點，若 $y=f(x)$ 的圖形在點 $(1\ ,f(1))$ 附近的一次近似函數為 $g(x)$，則 $g(0.99)=$？(四捨五入至小數點後第一位)
(非選擇題，6 分)

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{n(2a+(n-1)d)}{2}$

   首項為 a，公比為 $r\,(r\neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 級數和 $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3. $\triangle ABC$ 的正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ (R 為$\triangle ABC$ 外接圓半徑)

   $\triangle ABC$ 的餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

4. 一維數據 X：x_1，x_2，……，x_n

   算術平均數 $\mu_X=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)$

   標準差 $\sigma_X=\sqrt{\dfrac{1}{n}[(x_1-\mu_X)^2+(x_2-\mu_X)^2+\cdots\cdots+(x_n-\mu_X)^2]}=\sqrt{\dfrac{1}{n}[(x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+\cdots\cdots+x_n^{\,2})-n\mu_X^{\,2}]}$

5. 一維數據 X：x_1，x_2，……，x_n，標準化後數據 X'：x_1'，x_2'，……，x_n'，其中 $x_i'=\dfrac{x_i-\mu_X}{\sigma_X}$，

   $i=1$，2，……，n。標準化後數據算術平均數 $\mu_{X'}=0$；標準差 $\sigma_{X'}=1$

6. 二維數據 (X,Y)：(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，……，(x_n,y_n)，

   相關係數 $r_{X,Y}=\dfrac{(x_1-\mu_X)(y_1-\mu_Y)+(x_2-\mu_X)(y_2-\mu_Y)+\cdots\cdots+(x_n-\mu_X)(y_n-\mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

   迴歸直線(最適直線)方程式 $y-\mu_Y=r_{X,Y}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$

7. 參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414$，$\sqrt{3}\approx 1.732$，$\sqrt{5}\approx 2.236$，$\sqrt{6}\approx 2.449$，$\sqrt{7}\approx 2.646$，$\pi\approx 3.142$

8. 對數值：$\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$，$\log 5\approx 0.6990$，$\log 7\approx 0.8451$