# 數學B考科詳解

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (3) | (3) | (4) | (4) | (2) | (3) | (1) |
| 8. | 9. | 10. | 11. | 12. | 13. | |
| (3) | (1)(2) | (1)(3) | (1)(4) | (3)(5) | (1)(3)(4) | |

## 第壹部分、選擇（填）題

### 一、單選題

1. (3)

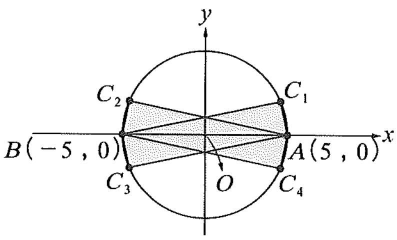
出處：第二冊〈三角比〉

目標：廣義角

解析：$(5\cos\theta, 5\sin\theta)$ 在圓心 $(0, 0)$，半徑為 5 的圓上

且需滿足 $|5\sin\theta|=2$

如下圖可看出滿足條件的三角形有 4 個，即$\triangle ABC_1$，$\triangle ABC_2$，$\triangle ABC_3$，$\triangle ABC_4$




故選(3)。

2. (3)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉、第四冊〈矩陣與資料表〉

目標：反矩陣的運算、方程組解的情形

解析：若聯立方程式恰有一組解，則

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ -2 & b \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow ab \neq -2 \Rightarrow (a, b) \neq (-1, 2)$ 及 $(2, -1)$

則滿足條件的數對 $(a, b)$ 共 $4 \cdot 4 - 2 = 14$ 組

故選(3)。

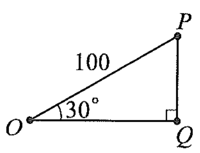
3. (4)

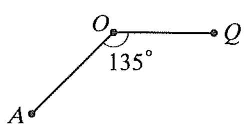
出處：第四冊〈空間概念與空間坐標系〉

目標：空間坐標系

解析：設 $P$ 點坐標為 $(a, b, c)$，$Q$ 點為 $P$ 點在 $xy$ 平面上的投影點，則 $Q$ 點坐標為 $(a, b, 0)$

且 $\angle POQ=30^\circ$，$\angle AOQ=135^\circ$




所以

$c=\overline{PQ}=100\times\sin 30^\circ=50$，且 $\overline{OQ}=100\times\cos 30^\circ=50\sqrt{3}$

$a=\overline{OQ}\times\cos 135^\circ$

$=50\sqrt{3}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-25\sqrt{6}$

$b=\overline{OQ}\times\sin 135^\circ$

$=50\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=25\sqrt{6}$

故 $P$ 點坐標為 $(-25\sqrt{6}, 25\sqrt{6}, 50)$

故選(4)。

4. (4)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：概念性知識

解析：由算術平均數為 10 知 $a+b=19$

$$\frac{7^2+(a-10)^2+1^2+(b-10)^2+9^2}{5}=\frac{144}{5}$$

$\Rightarrow (a-10)^2+(b-10)^2=13$

又 $a=19-b$，代入得$(9-b)^2+(b-10)^2=13$

$\Rightarrow 2b^2-38b+168=0$

$\Rightarrow b^2-19b+84=0$

$\Rightarrow (b-12)(b-7)=0$

$\Rightarrow b=7$ 或 $12$

$\because a<b \quad \therefore a=7$，$b=12$

故選(4)。

5. (2)

出處：第三冊〈按比例成長模型〉

目標：對數概念性知識及推理論證能力

解析：$\log(f(1))+\log(f(2))+\log(f(3))+\log(f(4))+\log(f(5))+\log(f(6))$

$=\log(f(1)\times f(2)\times\cdots\cdots\times f(6))$

$=\log\left(\frac{\log 3}{\log 2}\times\frac{\log 4}{\log 3}\times\cdots\cdots\times\frac{\log 8}{\log 7}\right)$

$=\log\left(\frac{\log 8}{\log 2}\right)=\log\left(\frac{3\log 2}{\log 2}\right)$

$=\log 3$

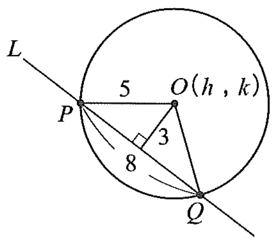
故選(2)。

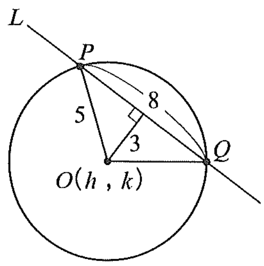
6. (3)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：圓與直線的關係

解析：圓 $\Gamma$ 與直線 $L$ 相交有兩種情形，如下圖，圓 $\Gamma$ 的圓心為 $(h, k)$，半徑為 5




又圓 $\Gamma$ 與直線 $L$ 交兩點形成的弦長為 8 單位，則圓心到直線 $L$ 的距離

$$d=\frac{|3h+4k-10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$$

$\Rightarrow |3h+4k-10|=15$

$\Rightarrow 3h+4k-10=15$ 或 $3h+4k-10=-15$

$\Rightarrow 3h+4k=25$ 或 $3h+4k=-5$

直線 $L'$：$3(x-1)+4(y+2)-10=0$

則圓心到直線 $L'$ 的距離

$$d'=\frac{|3(h-1)+4(k+2)-10|}{\sqrt{3^2+4^2}}$$
$$=\frac{|3h+4k-5|}{5}$$
$$=\frac{|25-5|}{5}\text{或}\frac{|-5-5|}{5}$$
$$=4\text{ 或 }2$$

因為 $d'<5$，所以圓 $\Gamma$ 與直線 $L'$ 交兩點

故選(3)。

7. (1)

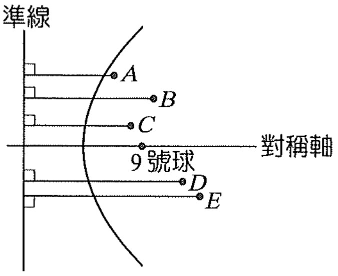
出處：第四冊〈圓錐曲線的認識與應用〉

目標：拋物線的焦點性質

解析：依照拋物線的光學性質，要擊中 9 號球需以平行拋物線對稱軸的方向往球檯邊緣擊出，擊中 9 號球所移動的路徑為每個點至準線之距離

如下圖

$A$ 點至準線之距離最小




故選(1)。

8. (3)

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：等比數列概念與解題技巧

解析：$a_1+a_4+a_6=a_5+a_7$

$\Rightarrow a_1+a_4=a_5-a_6+a_7$

$\Rightarrow a_1(1+r^3)=a_5(1-r+r^2)$

$\Rightarrow 1+r=r^4$

$\Rightarrow r^4-r-1=0$

原式 $=(a_{14}-a_{11}-a_{10})+(a_{13}-a_{10}-a_9)+(a_{12}-a_9-a_8)$

$=a_{10}(r^4-r-1)+a_9(r^4-r-1)+a_8(r^4-r-1)$

$=0$

故選(3)。

## 二、多選題

9. (1)(2)

出處：第三冊〈按比例成長模型〉

目標：了解指數與對數關係、認識指數函數圖形及推理論證能力

解析：$y=2a^x=a^{\log_a 2}\cdot a^x=a^{x+\log_a 2}$ 為 $y=a^x$ 沿 $x$ 軸方向平移的結果

$a>1$，則 $\log_a 2>0$ 代表左移

$0<a<1$，則 $\log_a 2<0$ 代表右移

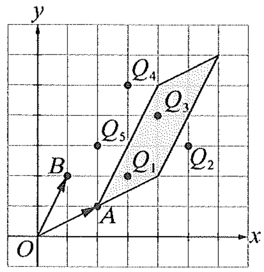
故選(1)(2)。

10. (1)(3)

出處：第三冊〈平面向量與應用〉

目標：向量的線性組合

解析：所有 $P$ 點所形成的區域如下圖，$Q_1$ 和 $Q_3$ 落於區域內




故選(1)(3)。

11. (1)(4)

出處：第四冊〈矩陣與資料表〉

目標：矩陣的性質與運算

解析：由 $\begin{cases} A+B=\begin{bmatrix}4 & -3\\ 5 & -4\end{bmatrix} \\ A-B=\begin{bmatrix}2 & -7\\ 3 & -10\end{bmatrix}\end{cases}$，可得 $A=\begin{bmatrix}3 & -5\\ 4 & -7\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$

(1) ○：$B-A=-(A-B)=\begin{bmatrix}-2 & 7\\ -3 & 10\end{bmatrix}$

(2) ╳：$\because AB=\begin{bmatrix}-2 & -9\\ -3 & -13\end{bmatrix}$，$BA=\begin{bmatrix}11 & -19\\ 15 & -26\end{bmatrix}$

$\therefore AB\neq BA$

(3) ╳：$\because \begin{vmatrix}3 & -5\\ 4 & -7\end{vmatrix}=3(-7)-(-5)4=-1\neq 0$

$\therefore C=A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}-7 & 5\\ -4 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & -5\\ 4 & -3\end{bmatrix}$

(4) ○：承(3)

$\because A^{-1}$ 存在 $\therefore C=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

(5) ╳：$A^2-B^2=\begin{bmatrix}-11 & 20\\ -16 & 29\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 8\\ 4 & 11\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-14 & 12\\ -20 & 18\end{bmatrix}$

故選(1)(4)。

12. (3)(5)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉、第四冊〈機率〉

目標：概念性知識

解析：(1) ╳：不一定

(2)(3)萬華區的確診比例為 $\frac{299}{181044}\approx 0.0016<0.002$

文山區的確診比例為 $\frac{35}{266439}$

大同區的確診比例為 $\frac{28}{123334}=\frac{56}{246668}$

$>\frac{35}{266439}$

(4) ╳

(5) ○：$\frac{35}{534}>\frac{35}{700}=5\%$

故選(3)(5)。

13. (1)(3)(4)

出處：第一冊〈多項式函數〉、第三冊〈正弦函數與週期性現象〉、第三冊〈按比例成長模型〉

目標：函數圖形的平移

解析：(1) ○：$y=x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

$y=x^2-100x+100=(x-50)^2-2400$

開口方向、大小相同，故經平移後會重疊

(2) ╳：$y=x^3+3x^2+2x+2=(x+1)^3-(x+1)+2$

平移後不會和 $y=x^3+x$ 重疊

(3) ○：$y=\frac{1}{4}\cdot 2^x=2^{x-2}$ 經平移後會和 $y=2^x$ 重疊

(4) ○：$y=\log(100x)=\log x+2$ 經平移後會和 $y=\log x$ 重疊

(5) ╳：$y=\sin(2x)-3$ 的週期為 $\pi$，$y=\sin x$ 的週期為 $2\pi$，故平移後不會重疊

故選(1)(3)(4)。

三、選填題

14. $-1$

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：餘式定理

解析：已知 $f(1)=0$ 且 $f(x)=g(x)\cdot(x+2)+(x^2+x+1)$

所求 $g(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為 $g(1)$，代入上式得

$g(1)=-1$

故餘式為 $-1$。

15. $2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$

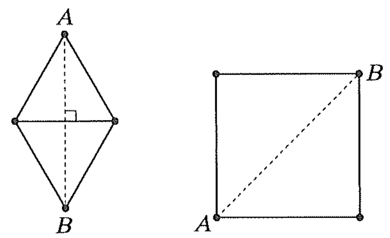
出處：第四冊〈空間概念與空間坐標系〉

目標：空間概念

解析：螞蟻移動的最短路徑距離為正三角形的高的兩倍 $=2\sqrt{3}$

蜜蜂移動的最短路徑距離為正方形的對角線 $=2\sqrt{2}$

所以螞蟻要比蜜蜂多移動 $2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$ 的距離。




16. $\frac{19}{10}$

出處：第一冊〈數與式〉

目標：正整數概念性知識及推理論證能力

解析：令 $n=10a+b$ ($a\neq 0$ 且 $b$ 為 0～9 的正整數)，則

$$\frac{n}{f(n)}=\frac{10a+b}{a+b}=\frac{9a}{a+b}+1$$

$$\geq \underbrace{\frac{9a}{a+9}}_{(b=9)}+1=\frac{-81}{a+9}+10$$

$$\geq \underbrace{\frac{-81}{10}}_{(a=1)}+10=\frac{19}{10}$$

故當 $n=19$ 時，所求最小值為 $\frac{19}{10}$。

17. 18

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：推理論證及解決問題能力

解析：將各座位位置標示如下表

| | | |
|---|---|---|
| $A$ | ╳ | 甲 |
| $B$ | $C$ | ╳ |
| $D$ | $E$ | $F$ |

則乙、丙的入座方式如下

| | | |
|---|---|---|
| 乙入座 $A$ | 丙入座 $CDEF$ | 4 |
| 乙入座 $B$ | 丙入座 $EF$ | 2 |
| 乙入座 $C$ | 丙入座 $ADF$ | 3 |
| 乙入座 $D$ | 丙入座 $ACF$ | 3 |
| 乙入座 $E$ | 丙入座 $AB$ | 2 |
| 乙入座 $F$ | 丙入座 $ABCD$ | 4 |
| 合計 | | 18 |

故乙、丙的入座方式共 18 種。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. (3)

出處：第三冊〈平面向量與應用〉

目標：兩點間的距離

解析：設 $C(0,k)$

因為 $\overline{O_1C}=\sqrt{[0-(-4)]^2+[k-(-1)]^2}=5$

則 $(k+1)^2=9$

可以解出 $k=2$ 或 $-4$ (不合)

所以 $C(0,2)$，則尖點 $C$ 至尖拱底部 $\overline{AB}$ 的距離為 2

故選(3)。

19. $\frac{7}{25}$

出處：第三冊〈平面向量與應用〉

目標：平面向量的內積

解析：方法一：

因為 $\overrightarrow{CO_2}=(4,-3)$，$\overrightarrow{CO_1}=(-4,-3)$

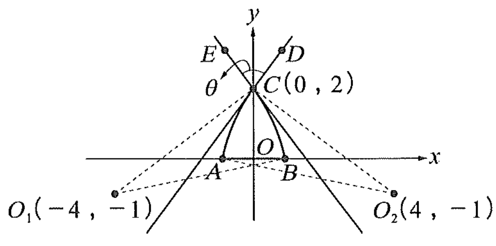
切線上的向量需與 $\overrightarrow{CO_2}$ 和 $\overrightarrow{CO_1}$ 的內積為 0

可以取與 $\overrightarrow{CO_2}$ 垂直之切線上的 $D$ 點及與 $\overrightarrow{CO_1}$ 垂直之切線上的 $E$ 點

滿足 $\overrightarrow{CD}=(3,4)$，$\overrightarrow{CE}=(-3,4)$

若尖拱的頂角為 $\theta$，

則 $\cos\theta=\frac{(3,4)\cdot(-3,4)}{\sqrt{3^2+4^2}\sqrt{(-3)^2+4^2}}=\frac{7}{25}$。




方法二：

因為 $m_{CO_1}=\frac{3}{4}$，$m_{CO_2}=-\frac{3}{4}$

切線的斜率需與 $\overleftrightarrow{CO_1}$ 和 $\overleftrightarrow{CO_2}$ 的斜率相乘為 $-1$

可以取與 $\overleftrightarrow{CO_2}$ 垂直之切線上的 $D$ 點及與 $\overleftrightarrow{CO_1}$ 垂直之切線上的 $E$ 點，

滿足 $m_{CD}=\frac{4}{3}$，$m_{CE}=-\frac{4}{3}$

若尖拱的頂角為 $\theta$，

則 $\tan\theta=\dfrac{-\frac{4}{3}-\frac{4}{3}}{1+\left(-\frac{4}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right)}=\dfrac{24}{7}$

故 $\cos\theta=\dfrac{7}{25}$ 。

◎評分原則

方法一：

因為 $\overrightarrow{CO_2}=(4,-3)$，$\overrightarrow{CO_1}=(-4,-3)$

(兩切線的法向量共 3 分)

切線上的向量需與 $\overrightarrow{CO_2}$ 和 $\overrightarrow{CO_1}$ 的內積為 0

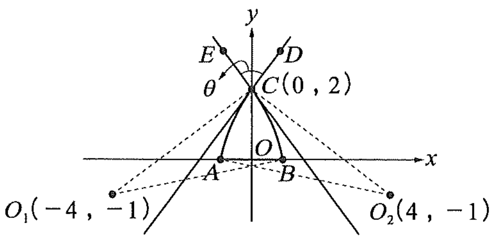
可以取與 $\overrightarrow{CO_2}$ 垂直之切線上的 $D$ 點及與 $\overrightarrow{CO_1}$ 垂直之切線上的 $E$ 點

滿足 $\overrightarrow{CD}=(3,4)$，$\overrightarrow{CE}=(-3,4)$

(兩切線的方向向量共 3 分)

若尖拱的頂角為 $\theta$，則 $\cos\theta=\dfrac{(3,4)\cdot(-3,4)}{\sqrt{3^2+4^2}\sqrt{(-3)^2+4^2}}=\dfrac{7}{25}$ 。

(4 分，若無計算正確方向的切線向量，則應說明為何取正數)




方法二：

因為 $m_{CO_1}=\dfrac{3}{4}$，$m_{CO_2}=-\dfrac{3}{4}$ (兩切線的斜率共 3 分)

切線的斜率需與 $\overleftrightarrow{CO_1}$ 和 $\overleftrightarrow{CO_2}$ 的斜率相乘為 $-1$

可以取與 $\overleftrightarrow{CO_2}$ 垂直之切線上的 $D$ 點及與 $\overleftrightarrow{CO_1}$ 垂直之切線上的 $E$ 點，

滿足 $m_{CD}=\dfrac{4}{3}$，$m_{CE}=-\dfrac{4}{3}$ (兩切線的斜率共 3 分)

若尖拱的頂角為 $\theta$，

則 $\tan\theta=\dfrac{-\frac{4}{3}-\frac{4}{3}}{1+\left(-\frac{4}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right)}=\dfrac{24}{7}$ (2 分)

故 $\cos\theta=\dfrac{7}{25}$ 。(2 分)(若 $\tan\theta$ 算出來為負數，則應說明為何取正數)