臺北區 108 學年度第一學期
第一次學科能力測驗模擬考試

數學考科

—作答注意事項—

考試範圍：第一～二冊全

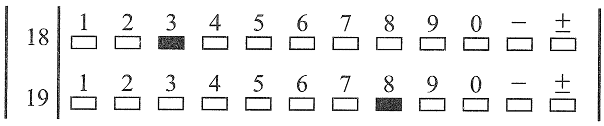
考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 5 題，多選題 7 題，選填題第 A 至 H 題共 8 題

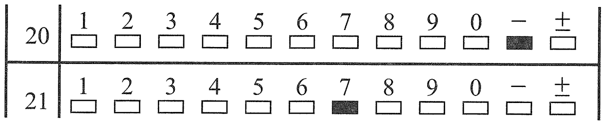
作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記，請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\dfrac{⑱}{⑲}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\overset{3}{\square}$ 與第 19 列的 $\overset{8}{\square}$ 畫記，如：



例：若第 C 題的答案格式是 $\dfrac{⑳㉑}{50}$ ，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\overset{-}{\square}$ 與第 21 列的 $\overset{7}{\square}$ 畫記，如：



祝考試順利

99363103-28

第壹部分：選擇題（占 60 分）

一、單選題（占 25 分）

說明：第 1 題至第 5 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 若方程式 $x^2+5x+3=0$ 的兩根為 α 與 β，則 $\alpha^3+\beta^3$ 之值為何？
(1) 110
(2) 80
(3) -50
(4) -80
(5) -110

2. 若一上市公司從 2015 年至 2018 年發放的現金股利依序為 4 元、2 元、4 元、8 元，則該公司從 2016 年至 2018 年現金股利的平均成長率最接近下列哪一個選項？
$\left(\text{註：2016 年現金股利的成長率}=\dfrac{\text{2016 年現金股利}-\text{2015 年現金股利}}{\text{2015 年現金股利}}\right)$
(1) 20 %
(2) 26 %
(3) 30 %
(4) 35 %
(5) 50 %

3. 試問下列各選項中，哪個事件發生的機率最小？
(1)投擲一枚公正的硬幣一次，出現正面的機率
(2)投擲一枚公正的硬幣兩次，第一次出現正面的機率
(3)投擲一枚公正的硬幣四次，前兩次均出現正面的機率
(4)同時投擲兩枚公正的硬幣一次，恰有一枚硬幣出現正面的機率
(5)同時投擲四枚公正的硬幣一次，恰有兩枚硬幣出現正面的機率

4. 狗狗胖白被獸醫警告體重過重，因此飼主決定從今天開始實施一個為期 10 天的減重方案，每天偷偷減少胖白前一天全部吃的狗飼料量 5 %，以達到控制體重的目的。若飼主原本每天都固定幫胖白準備 500 公克的狗飼料，且胖白都會全部吃光，則這 10 天胖白少吃的狗飼料總重量最接近多少公克？
(1) 1200 (2) 1500 (3) 2500 (4) 3500 (5) 3800

5. 下表為一個 10x10 的方格，若方格內的數字均為完全平方數且有規律地排列，則方格內所有數字的總和為何？

1^2	2^2	3^2	$\cdots$	9^2	10^2
2^2	3^2	4^2	$\cdots$	10^2	11^2
3^2	4^2	5^2	$\cdots$	11^2	12^2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
9^2	10^2	11^2	$\cdots$	17^2	18^2
10^2	11^2	12^2	$\cdots$	18^2	19^2

(1) 5077　(2) 6050　(3) 11025　(4) 11400　(5) 11650

二、多選題（占 35 分）

說明：第 6 題至第 12 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

6. 坐標平面上，在函數 $y=3^{-x}$ 的圖形上標示 A、B、C、D 四個點，其 x 坐標分別為 -1、0、1、2。試選出正確的選項。
(1)點 B 落在直線 AC 上方
(2)點 A 與點 C 對稱於直線 $y=x+1$
(3)函數 $y=3^{-x}$ 與 $y=\left|\log_3 x\right|$ 的圖形僅交於一點
(4)在直線 AB、直線 BC、直線 CD 中，以直線 CD 的斜率最大
(5)在直線 AB、直線 BC、直線 CD 中，直線的斜率依序成等比數列

7. 所謂孿生質數——是指「兩個相鄰的質數，且之間相差 2」，譬如「11 和 13」、「17 和 19」、「41 和 43」這三對均為孿生質數。若 a，b 為孿生質數，且 $a>b$，試選出正確的選項。
(1)小於 100 的自然數中有 9 對孿生質數
(2) $(a-b)^{100}$ 展開後的個位數字為 8
(3)方程式 $x^2-(a+b)x+ab=0$ 的判別式為 4
(4) $ab+1$ 必為完全平方數
(5) a^3-b^3 必為偶數

8. 設 $A(a)$、$B(a+1)$、$C(2a+1)$ 均為數線上的點。試選出正確的選項。

(1)僅當 $a=1$ 時，A、B、C 三點的坐標其數值依序成等差

(2)僅當 $a=-1$ 時，A、B、C 恰為相異兩點

(3)當 $a>1$ 時，B 點在 $\overline{AC}$ 中點的右方

(4)當 $a>1$ 時，以 $\overline{AC}$ 為直徑作一圓，自 B 點沿垂直數線方向作鉛直線交上半圓於 D 點；再以 B 點為圓心，$\overline{BD}$ 為半徑畫弧，交數線於 E 點，則 E 點必在 C 點的左方

(5)若 A 點在原點左方且 B 點在原點右方，則 C 點必在原點的右方

9. 亮亮到時代電信公司新辦一個門號。時代電信公司告知：中途解約時，違約金的計算方式如下：

(設備補貼款＋已享月租費折扣總金額)×(合約未到期日數÷合約日數)

亮亮的合約日數為 900 天，設備補貼款為 6000 元，月租費折扣為每日 10 元。例如：亮亮使用 120 天後解約，則違約金的計算方式如下：$(6000+10\times120)\times\dfrac{900-120}{900}=6240$ (元)

若亮亮使用 x 天後解約的違約金為 $f(x)$ (x 為正整數，$1\le x\le 900$)。試選出正確的選項。

(1)若使用 300 天後解約，則需付違約金 6000 元

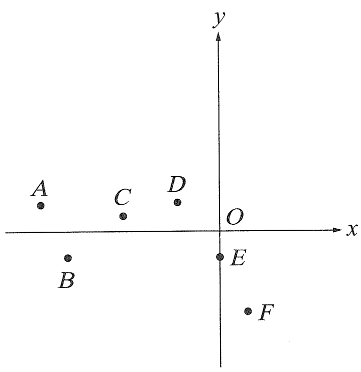
(2)違約金 $f(x)=-\dfrac{1}{90}x^2+\dfrac{10}{9}x+6000$

(3)當 $x=150$ 天時，違約金 $f(x)$ 會達到最大值

(4)違約金 $f(x)$ 的最大值為 6300 元

(5)使用 87 天後解約需付的違約金高於使用 213 天後解約需付的違約金

10. 已知 $f(x)=x^4+px^3+qx^2+rx+s$ 為一整係數四次多項式，宏爺為了想了解這個多項式，試圖在坐標平面上描點畫出 $y=f(x)$ 的圖形，如右圖所示。若點 $A(a_1, a_2)$、$B(b_1, b_2)$、$C(c_1, c_2)$、$D(d_1, d_2)$、$E(e_1, e_2)$、$F(f_1, f_2)$ 皆在 $y=f(x)$ 的圖形上，則下列敘述何者正確？



(1) $s>0$

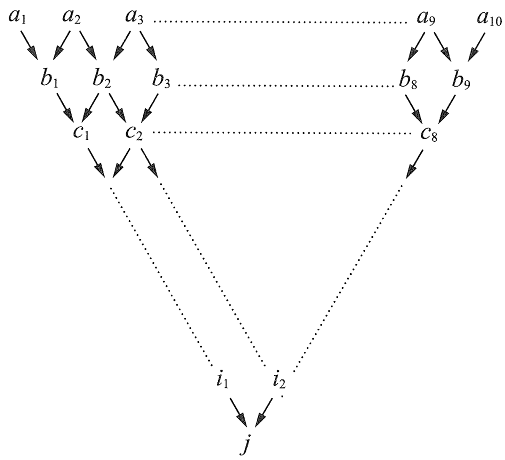
(2)由圖知 $f(a_1)\cdot f(e_1)<0$，且方程式 $f(x)=0$ 在 a_1 到 e_1 之間內恰有一實根

(3)由圖知 $f(c_1)\cdot f(d_1)>0$，且方程式 $f(x)=0$ 在 c_1 到 d_1 之間可能有實根

(4)方程式 $f(x)=0$ 有正實數根

(5)方程式 $f(x)=0$ 沒有虛數根

11. 下圖為一個倒立三角形所形成的數列，第一層有 10 個數，分別是 a_1，a_2，a_3，……，a_{10}。接著，相鄰兩層中，下層的每一項均為上層的相鄰兩項相加得到，例如第二層有 9 個數，分別是 b_1，b_2，b_3，……，b_9，且滿足 $b_n=a_n+a_{n+1}$，$n=1$，2，3，……，9。最後一層(即第十層)僅有一個數 j，且滿足 $j=i_1+i_2$。試選出正確的選項。



(1)若數列〈 a_n 〉為等差數列，則數列〈 b_n 〉亦為等差數列

(2)若 $a_n=n$，$n=1$，2，3，……，10，則 $\sum_{n=1}^{9} b_n=100$

(3)若 $a_n=1$，$n=1$，2，3，……，10，則 $j=512$

(4)若 $a_n=1$，$n=1$，2，3，……，10，則圖中所有數字和為 2046

(5)若 $a_n \in \{0，1\}$，$n=1$，2，3，……，10 且 $\sum_{n=1}^{10} a_n=1$，則 j 最大值為 126

12. 某高中想要探討「整潔、秩序與學業成績之間的關係」，於是將高一 16 個班一個學期下來的整潔秩序平均成績及學業平均成績紀錄下來並製作成散佈圖，若 X 表示整潔秩序平均成績，評分範圍為 0 至 50 分，Y 表示學業平均成績，評分範圍為 0 至 100 分，且以最小平方法求得 Y 對 X 的迴歸直線 L，其方程式為 $y=0.9x+50$，試選出正確的選項。

(1) X 和 Y 的相關係數為 0.9

(2)「整潔秩序平均成績」的標準差 σ_X 小於「學業平均成績」的標準差 σ_Y

(3)為了讓兩個成績的評分範圍更接近，我們將各筆「整潔秩序平均成績」乘上 1.5 倍再加 25，記為 $Z=1.5X+25$，則 Z 和 Y 的相關係數等於 X 和 Y 的相關係數

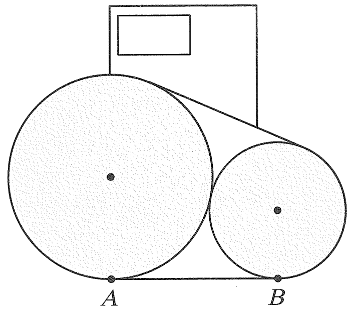
(4)承(3)，若以最小平方法求得 Y 對 Z 的迴歸直線方程式為 $y=az+b$，則 $a<0.9$

(5)若 X 和 Y 的相關係數為 1，則表示「若提高整潔秩序平均成績，則學業平均成績也會提高」

第貳部分：選填題（占 40 分）

說明：1.第 A 至 H 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(13－32)。
2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 阿呆想要製作一臺工程車模型，同側的兩個輪子相切並用履帶包覆，其側面示意圖如右。若這兩個輪子的面積和為 50π 平方公分，則接觸地面之履帶(即 $\overline{AB}$)長度的最大值為 ⑬⑭ 公分。



B. 在工業上，我們常利用凱氏定氮法來測定物質的氮含量以推測其蛋白質含量。已知蛋白質的含氮量為 16 %、氮化物 α 的含氮量為 35 %。若某物質的組成成分中含有 50 %的蛋白質、40 %的氮化物 α 以及 10 %不含氮的雜質，則當我們測定到氮原子時，它是來自於蛋白質的機率為 $\dfrac{⑮}{⑯⑰}$ 。(化為最簡分數)

C. 若整係數多項式 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+10$ 滿足 $f(1)=0$、$f(-3)\cdot f(-2)<0$，且方程式 $f(x)=0$ 的三根均為有理數，則 $b-a=$ ⑱⑲⑳ 。

D. 不等式 $\log_{\frac{1}{3}}(2x-5)>-1+\log_{\frac{1}{9}}(x+2)$ 的所有整數解之總和為 ㉑㉒ 。

E. 好吃水餃店有賣三種水餃：高麗菜水餃、韭菜水餃、干貝水餃。若筱曉想要依據下列兩原則點 20 顆水餃：

㈠一定要點干貝水餃，其他兩種可點可不點。

㈡任一種水餃有點的話，最少點 5 顆。

則筱曉共有 ㉓㉔ 種點餐方式。

F. 一包雷根糖中有數種不同口味的糖果(如榴槤味、嘔吐味、臭雞蛋味……)各一顆，包裝袋上寫著：「同時吃下不同種類的糖都是一種全新感受，總共可以產生 2000 多種驚奇口味喔！」(例如：榴槤味加嘔吐味、嘔吐味加臭雞蛋味、榴槤味加臭雞蛋味、榴槤味加嘔吐味加臭雞蛋味……等)，則一包雷根糖中有 ㉕㉖ 種不同口味的糖果。

G. 某百貨研究六位成年人每週逛街時數 X(小時)與購物消費 Y(萬元)之間的相關性，統計的過程中，有些數據不小心被墨汁滴到，如下表所示。已知戊的購物消費大於己的購物消費。調查結果得知 X 與 Y 之間的相關係數為 r，且 Y 對 X 的迴歸直線(最適合直線)斜率為 m，則數對 $(r, m) =$ $\left(\frac{㉗}{㉘}, \frac{㉙}{㉚}\right)$ 。(化為最簡分數)

成年人代號	甲	乙	丙	丁	戊	己	平均數	變異數
逛街時數 X (小時)	15	9	10	●	12	6	10	●
購物消費 Y (萬元)	12	10	7	7	●	●	8	$\frac{16}{3}$

H. 欣亞動物醫院有院長、小欣和小亞共三位獸醫師，每天至少有一位獸醫師值班看診，每位獸醫師在一週內均要上班五天、休假兩天，且休假日中恰有一天為週末(即週六或週日)，則小欣和小亞兩位獸醫師不在同一天休假的機率為 $\frac{㉛}{㉜}$ 。(化為最簡分數)

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{n(2a+(n-1)d)}{2}$

   首項為 a，公比為 $r\,(r\neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 級數求和公式：(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$

   (2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   (3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

3. 一維數據 X：x_1，x_2，……，x_n

   算術平均數 $\mu_X=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i$

   標準差 $\sigma_X=\sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\left(\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)-n\mu_X^2\right)}$

4. 二維數據 (X,Y)：(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，……，(x_n,y_n)

   相關係數 $r_{X,Y}=\dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

   迴歸直線 (最適合直線)方程式為 $y-\mu_Y=r_{X,Y}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$

5. 參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414$，$\sqrt{3}\approx 1.732$，$\sqrt{5}\approx 2.236$，$\sqrt{6}\approx 2.449$，$\pi\approx 3.142$
6. 對數值：$\log_{10}2\approx 0.3010$，$\log_{10}3\approx 0.4771$，$\log_{10}5\approx 0.6990$，$\log_{10}7\approx 0.8451$
7.

常用對數表 $y=\log_{10}x$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
⋮										
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
⋮										
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863

數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
答案	(4)	(2)	(3)	(1)	(5)	(4)(5)	(3)(4)(5)	(1)(4)	(1)(3)
題號	10.	11.	12.						
答案	(4)(5)	(1)(3)(5)	(3)(4)						

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (4)

難易度：易

出處：第一冊第一章〈數與式〉、第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：運用乘法公式與根與係數的關係求解

解析：由根與係數的關係可知 $\alpha+\beta=-5$、$\alpha\beta=3$，可求出 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-5)^2-6=19$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=(-5)(19-3)=(-5)\times16=-80$

故選(4)。

2. (2)

難易度：易

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：理解平均成長率的意義，並利用幾何平均數來計算

解析：令 2016 年至 2018 年現金股利的平均成長率為 r，則 $4(1+r)^3=8 \Rightarrow (1+r)^3=2$

(1) $(1+20\%)^3=1.2^3=1.728$；(2) $(1+26\%)^3=1.26^3=2.000376$；(3) $(1+30\%)^3=1.3^3=2.197$

計算至第三個選項，即可知道 r 最接近 26 %

故選(2)。

3. (3)

難易度：易

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：能寫出一試驗樣本空間及某特定事件的樣本點個數，並利用古典機率的定義計算出事件發生的機率

解析：(1)機率為 $\frac{1}{2}$

(2)第一次出現正面的可能情況有(正 , 正)，(正 , 反)共兩種，機率為 $\frac{2}{2^2}=\frac{1}{2}$

(3)前兩次出現正面的可能情況有(正 , 正 , 正 , 正)，(正 , 正 , 正 , 反)，(正 , 正 , 反 , 正)，(正 , 正 , 反 , 反)共四種，機率為 $\frac{4}{2^4}=\frac{1}{4}$

(4)恰出現一個正面的可能情況有(正 , 反)，(反 , 正)共兩種，機率為 $\frac{2}{2^2}=\frac{1}{2}$

(5)從四枚裡面挑出兩枚要擲出正面的方法數，可用(正 , 正 , 反 , 反)去排列共 $C^4_2=6$ 種，機率為 $\frac{6}{2^4}=\frac{3}{8}$

故選(3)。

4. (1)

難易度：中

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉、第二冊第一章〈數列與級數〉

目標：運用等比級數求和公式、查表及反查表、首數尾數來求值

解析：胖白這十天共少吃了 $500\times10-\dfrac{500\times0.95\times(1-0.95^{10})}{1-0.95}=5000-9500\times(1-0.95^{10})$ 公克的狗食

利用對數估算 0.95^{10}：

$\log(0.95^{10})=10\log0.95=10(\log9.5-1)\approx10(0.9777-1)\approx-0.223\approx-1+0.777\approx\log(5.985\times10^{-1})$

故 $0.95^{10}\approx0.5985\approx0.6$

因此胖白共少吃了 $5000-9500\times(1-0.95^{10})\approx5000-9500\times0.4\approx5000-3800=1200$ 公克的狗食

故選(1)。

5. (5)

難易度：難

出處：第二冊第一章〈數列與級數〉

目標：洞察數字規律及級數和公式的應用

解析：

1^2	2^2	3^2	$\cdots$	9^2	10^2
2^2	3^2	4^2	$\cdots$	10^2	11^2
3^2	4^2	5^2	$\cdots$	11^2	12^2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
9^2	10^2	11^2	$\cdots$	17^2	18^2
10^2	11^2	12^2	$\cdots$	18^2	19^2

由右上到左下加總得所求為

$1\times1^2+2\times2^2+3\times3^2+\cdots\cdots+9\times9^2+10\times10^2+9\times11^2+8\times12^2+7\times13^2+\cdots\cdots+1\times19^2$

$=1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+9^3+10^3+\sum_{k=1}^{9}k(20-k)^2$

$=\left(\sum_{k=1}^{10}k^3\right)+\left(400\times\sum_{k=1}^{9}k\right)-\left(40\times\sum_{k=1}^{9}k^2\right)+\left(\sum_{k=1}^{9}k^3\right)$

$=\left(\frac{10\times11}{2}\right)^2+400\times\left(\frac{9\times10}{2}\right)-40\times\left(\frac{9\times10\times19}{6}\right)+\left(\frac{9\times10}{2}\right)^2$

$=55^2+400\times45-40\times285+45^2$

$=3025+18000-11400+2025$

$=11650$

故選(5)。

二、多選題

6. (4)(5)

難易度：易

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉、第一冊第二章〈多項式函數〉

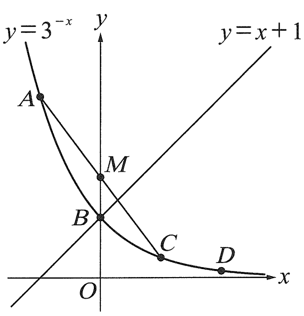
目標：利用繪出指數函數的圖形判別圖形的凹向性、對稱性等

解析：$A(-1,3)$、$B(0,1)$、$C\left(1,\frac{1}{3}\right)$、$D\left(2,\frac{1}{9}\right)$

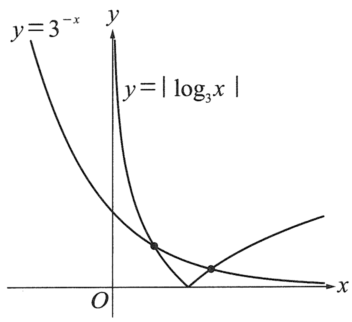
(1) ╳：如圖(一)所示，點 B 落在直線 AC 下方

(2) ╳：如圖(一)所示，若 A 與 C 對稱於某直線，則 $\overline{AC}$ 的中點 $M\left(0,\frac{5}{3}\right)$ 會落在該直線上，但 $M\left(0,\frac{5}{3}\right)$ 不在 $y=x+1$ 上

(3) ╳：如圖(二)所示，函數 $y=3^{-x}$ 與 $y=|\log_3 x|$ 的圖形交於兩點



圖(一)



圖(二)

(4) ○：$m_{AB}=\frac{3-1}{(-1)-0}=-2$，$m_{BC}=\frac{1-\frac{1}{3}}{0-1}=\frac{-2}{3}$，$m_{CD}=\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{9}}{1-2}=\frac{-2}{9}$　$\therefore m_{AB}<m_{BC}<m_{CD}$

(5) ○：承(4)，-2，$\frac{-2}{3}$，$\frac{-2}{9}$ 三數依序為公比 $r=\frac{1}{3}$ 的等比數列

故選(4)(5)。

7. (3)(4)(5)

難易度：易

出處：第一冊第一章〈數與式〉

目標：基本的數與式化簡

解析：(1)╳：「3 和 5」、「5 和 7」、「11 和 13」、「17 和 19」、「29 和 31」、「41 和 43」、「59 和 61」、「71 和 73」，共 8 對

(2)╳：$\because a-b=2$，又 2^1 個位數字為 2，2^2 個位數字為 4，2^3 個位數字為 8，2^4 個位數字為 6，2^5 個位數字為 2，……，週期為 4 個一循環，故 $(a-b)^{100}$ 展開後的個位數字為 6

(3)○：$D=[-(a+b)]^2-4\times1\times(ab)=(a-b)^2=2^2=4\quad \therefore D=4$

(4)○：$\because a-b=2\quad \therefore ab+1=(b+2)b+1=b^2+2b+1=(b+1)^2$ 為完全平方數

(5)○：$\because a-b$ 為 2 的倍數　$\therefore a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ 為 2 的倍數　$\therefore a^3-b^3$ 必為偶數

故選(3)(4)(5)。

8. (1)(4)

難易度：易

出處：第一冊第一章〈數與式〉

目標：根據題意判別數線上的幾何關係

解析：(1)○：$\because$ 三數成等差　$\therefore 2(a+1)=a+(2a+1)$，得 $a=1$

(2)╳：依題意可知，A、B、C 恰兩點坐標相同，因 A、B 兩點相異，故僅可能 $A=C$ 或 $B=C$，得 $a=-1$ 或 0

(3)╳：$\overline{AC}$ 中點坐標為 $\dfrac{3a+1}{2}$，當 $a>1$ 時，$(a+1)-\dfrac{3a+1}{2}=\dfrac{-a+1}{2}<0\quad \therefore B$ 點在 $\overline{AC}$ 中點的左方

(4)○：如右圖，$\overline{AB}=1$，$\overline{BC}=a$，

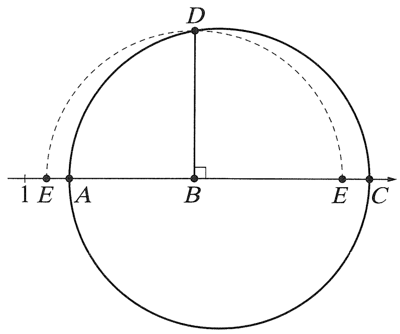
利用相似性質可知 $\overline{BD}=\sqrt{a}$，

$\because$ 當 $a>1$ 時，$\sqrt{a}$ 恆小於 a，即 $\overline{BD}<\overline{BC}$

$\therefore \overline{BE}<\overline{BC}$

因此以 B 點為圓心，$\overline{BD}$ 為半徑畫弧交數線於 E 點時

$\because \overline{BE}<\overline{BC}\quad \therefore E$ 點必在 C 點之左方



(5)╳：依題意 $-1<a<0$，得 $-1<2a+1<1$

故選(1)(4)。

9. (1)(3)

難易度：易

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：運用二次多項式求極值

解析：(1)○：$(6000+10\times300)\times\dfrac{900-300}{900}=6000$

(2)╳：$f(x)=(6000+10\times x)\times\dfrac{900-x}{900}=-\dfrac{1}{90}x^2+\dfrac{10}{3}x+6000=-\dfrac{1}{90}(x^2-300x)+6000$

$=-\dfrac{1}{90}(x-150)^2+6250$

(3)○：由 $f(x)=-\dfrac{1}{90}(x-150)^2+6250$ 得知，當 $x=150$ 天時，$f(x)$ 有最大值

(4)╳：承(3)，當 $x=150$ 天時，違約金 $f(x)$ 會達到最大值 6250 元

(5)╳：由對稱性知 $f(150-63)=f(150+63)$，即 $f(87)=f(213)$

故使用 87 天後解約需付的違約金與使用 213 天後解約需付的違約金相同

故選(1)(3)。

10. (4)(5)

難易度：易

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：能利用描點來看出圖形的走勢，並利用勘根定理及虛根成對定理來判別選項是否正確

解析：(1)╳：由 $y=f(x)$ 的圖形與 y 軸相交於 E 點(原點下方)可知，當 $x=0$ 時，$f(0)=s<0$

(2)╳：因 $f(a_1)\times f(e_1)<0$，由勘根定理可知，$f(x)=0$ 在 a_1 到 e_1 之間內至少有一實根或有奇數個根，由圖形可知，$f(x)=0$ 在 a_1 到 b_1 之間、b_1 到 c_1 之間、d_1 到 e_1 之間會與 x 軸相交，故 $f(x)=0$ 在 a_1 到 e_1 之間內恰有三個根

(3)╳：由圖形可知，$f(x)=0$ 在 c_1 到 d_1 之間不得與 x 軸相交(否則會與 x 軸相交超過四點)，故 $f(x)=0$ 在 c_1 到 d_1 之間不可能有實根

(4)○：因 $f(x)$ 的最高次項係數為正，故圖形在 F 點以右會往上拉升，且與 x 軸正向交於一點，故 $f(x)=0$ 有一個正實數根

(5)○：因 $f(x)$ 為一整係數四次多項式，且 $y=f(x)$ 與 x 軸相交於四點，根據虛根成對定理可知，此方程式為四實根，且無虛數根

故選(4)(5)。

11. (1)(3)(5)

難易度：難

出處：第二冊第一章〈數列與級數〉、第二章〈排列、組合〉

目標：基本的等差數列與級數符號理解，洞察和巴斯卡定理的關係

解析：(1)○：若數列〈a_n〉為等差數列，設數列〈a_n〉的首項為 a，公差為 d，則 $a_n=a+(n-1)d$

可得 $b_{n+1}-b_n=(a_{n+1}+a_{n+2})-(a_n+a_{n+1})=a_{n+2}-a_n=a+(n+1)d-[a+(n-1)d]=2d$ 為一定值

因此數列〈b_n〉亦為等差數列

(2)╳：承(1)，若 $a_n=n$，$n=1$，2，3，……，10，即數列〈a_n〉為等差數列，因此數列〈b_n〉亦為等差數列，且 $b_n=n+(n+1)=2n+1$，$n=1$，2，3，……，9

$\therefore \sum_{n=1}^{9} b_n=\sum_{n=1}^{9}(2n+1)=\dfrac{9(3+19)}{2}=99$

(3)○：若 $a_n=1$，$n=1$，2，3，……，10 即第一列每一項均為 1，按題意推得第二列每一項均為 2，第三列每一項均為 $4=2^2$，……，以此類推，第 n 列每一項均為 2^{n-1}

$\therefore$第十層 $j=2^9=512$

(4)╳：承(3)若 $a_n=1$，$n=1$，2，3，……，10

則圖中所有數字和為 $10\times1+9\times2+8\times2^2+\cdots\cdots+1\times2^9=2036$

(5)○：若 $a_n\in\{0，1\}$，$n=1$，2，3，……，10 且 $\sum_{n=1}^{10}a_n=1$，則表第一列僅有一個數為 1，其他的數均為 0

若 $a_n=1$，則 $j=C_{n-1}^{9}$，因此 j 最大值為 $C_4^9=C_5^9=126$

故選(1)(3)(5)。

12. (3)(4)

難易度：難

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：迴歸直線的解讀、分析

解析：(1)╳：迴歸直線方程式 $y-\mu_Y=r\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$ 的斜率為 $r\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}$，

又 L：$y=0.9x+50$ 的斜率為 0.9，因此 $r\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}=0.9\Rightarrow r=0.9\times\dfrac{\sigma_X}{\sigma_Y}$ 不一定為 0.9

(2)╳：承(1)，$r\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}=0.9\Rightarrow\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}=\dfrac{0.9}{r}$，

當 $0.9\leq r\leq 1$ 時，$\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}\leq 1\Rightarrow\sigma_Y\leq\sigma_X$；當 $0<r<0.9$ 時，$\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}>1\Rightarrow\sigma_Y>\sigma_X$

(3)○：設 X 和 Y 的相關係數為 $r_{X,Y}$，若令 $X'=pX+q$，$Y'=sY+t$

則 $r_{X',Y'}=\begin{cases} r_{X,Y}\text{，當 } ps>0 \text{ 時(即 } p\text{，}s \text{ 同號時)} \\ -r_{X,Y}\text{，當 } ps<0 \text{ 時(即 } p\text{，}s \text{ 異號時)} \end{cases}$，因此 $r_{Z,Y}=r_{X,Y}$

(4)○：Y 對 Z 之迴歸直線方程式 $y-\mu_Y=r_{Z,Y}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_Z}(z-\mu_Z)$ 為 $y=az+b$，

其斜率為 $r_{Z,Y}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_Z}$，又 $Z=1.5X+25\Rightarrow\sigma_Z=|1.5|\sigma_X=1.5\sigma_X$

因此 $a=r_{Z,Y}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_Z}=r_{X,Y}\dfrac{\sigma_Y}{1.5\sigma_X}=\dfrac{1}{1.5}\times r\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}=\dfrac{1}{1.5}\times0.9=\dfrac{3}{5}=0.6<0.9$

(5)╳：迴歸直線為使用最小平方法所得之殘差最小時的直線，除了相關係數為 1 或 -1 的情形之外，並不能保證原始數據點落在直線上，因此無法如此推論

故選(3)(4)。

第貳部分：選填題

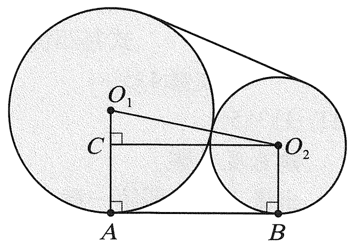
A. 10

難易度：易

出處：第一冊第一章〈數與式〉

目標：算幾不等式的應用

解析：如右圖，設大圓半徑為 r_1，小圓半徑為 r_2，其中 $r_1>0$，$r_2>0$



則 $r_1^2\pi+r_2^2\pi=50\pi$，即 $r_1^2+r_2^2=50$，又 $\overline{O_1O_2}=r_1+r_2$，$\overline{O_1C}=r_1-r_2$

$\Rightarrow \overline{AB}=\overline{CO_2}=\sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2}=\sqrt{4r_1r_2}=2\sqrt{r_1r_2}$

由算幾不等式，$\dfrac{r_1^2+r_2^2}{2}\geq\sqrt{r_1^2\cdot r_2^2}\Rightarrow r_1\times r_2\leq 25$

$\Rightarrow\sqrt{r_1\times r_2}\leq 5\Rightarrow\overline{AB}=2\sqrt{r_1\times r_2}\leq 10$

因此，接觸地面之履帶(即 $\overline{AB}$)長度的最大值為 10 公分。

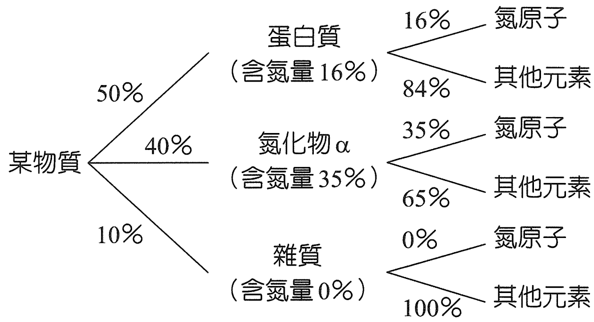
B. $\dfrac{4}{11}$

難易度：易

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：貝氏定理的應用

解析：$P(\text{來自蛋白質}\mid\text{氮原子})=\dfrac{P(\text{蛋白質的氮原子})}{P(\text{氮原子})}$



$=\dfrac{P(\text{蛋白質的氮原子})}{P(\text{蛋白質的氮原子})+P(\text{氮化物}\,\alpha\,\text{的氮原子})}$

$=\dfrac{50\%\times16\%}{50\%\times16\%+40\%\times35\%}=\dfrac{0.08}{0.08+0.14}=\dfrac{0.08}{0.22}$

$=\dfrac{8}{22}=\dfrac{4}{11}$。

C. -10

難易度：中

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：因式定理、牛頓定理、勘根定理的應用

解析：(1)$\because f(1)=0$　$\therefore f(x)$ 有一次因式 $x-1$

(2)根據牛頓定理，若 $px+q$ 為 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+10$ 的整係數一次因式，且 p、q 互質

$\Rightarrow\begin{cases}p=\pm1,\pm2\\ q=\pm1,\pm2,\pm5,\pm10\end{cases}$　$\therefore f(x)$ 可能的一次因式為 $x\pm1$、$x\pm2$、$x\pm5$、$x\pm10$、$2x\pm1$、$2x\pm5$

又 $f(-3)f(-2)<0$，根據勘根定理，$f(x)=0$ 在 -3 到 -2 之間必有一根，故 $2x+5$ 為 $f(x)$ 的一次因式

(3)承(1)(2)，$f(x)=(x-1)(2x+5)(mx+n)$，利用 $f(x)$ 的最高次項係數為 2 可得 $m-1$

利用 $f(x)$ 的常數項為 10 可得 $n=-2$，即 $f(x)=(x-1)(2x+5)(x-2)=2x^3-x^2-11x+10$

得 $a=-1$，$b=-11$，故 $b-a=(-11)-(-1)=-10$。

D. 18

難易度：中

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：對數式有意義的條件、及對數不等式的運算

解析：(1)對數式有意義的條件為「底數不為 1 的正實數」及「真數大於 0」

$$\Rightarrow\begin{cases}2x-5>0\\ x+2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>\dfrac{5}{2}\\ x>-2\end{cases}\Rightarrow x>\dfrac{5}{2}$$

(2)解對數不等式 $\log_{\frac{1}{3}}(2x-5)>-1+\log_{\frac{1}{9}}(x+2)$，首先將底數都先化成 $\dfrac{1}{9}$

$$\Rightarrow\log_{\frac{1}{9}}(2x-5)^2>\log_{\frac{1}{9}}\left(\frac{1}{9}\right)^{-1}+\log_{\frac{1}{9}}(x+2)\Rightarrow\log_{\frac{1}{9}}(4x^2-20x+25)>\log_{\frac{1}{9}}9(x+2)$$

$$\Rightarrow 4x^2-20x+25<9x+18\Rightarrow 4x^2-29x+7<0\Rightarrow(4x-1)(x-7)<0\Rightarrow\frac{1}{4}<x<7$$

由(1)、(2)可得 $\dfrac{5}{2}<x<7$，此不等式之整數解 $x=3$，4，5，6，故所求為 $3+4+5+6=18$。

E. 44

難易度：中

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：窮舉法、重複組合

解析：假設筱曉點了 x 顆高麗菜水餃、y 顆韭菜水餃、z 顆干貝水餃，$x+y+z=20$，x，y，z 為非負整數

從㈠、㈡兩條件，可將點餐情形分為四種：

(a)只有點干貝水餃 (x，$y=0$，$z\geq 5$)：此時 $(x , y , z)=(0 , 0 , 20)$

(b)只有點高麗菜、干貝水餃 ($x\geq 5$，$y=0$，$z\geq 5$)：

即 $x+z=20$，$x\geq 5$，$z\geq 5$，此方程式有 $C_1^{10+1}=11$ 個非負整數解

(c)只有點韭菜、干貝水餃 ($x=0$，y，$z\geq 5$)：

即 $y+z=20$，$y\geq 5$，$z\geq 5$，此方程式有 $C_1^{10+1}=11$ 個非負整數解

(d)三種水餃都有點 (x，y，$z\geq 5$)：

即 $x+y+z=20$，$x\geq 5$，$y\geq 5$，$z\geq 5$，此方程式有 $C_2^{5+2}=21$ 個非負整數解

由以上討論，共有 $1+11+11+21=44$ 種點餐方式。

F. 11

難易度：中

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：二項式定理的應用

解析：假設一包雷根糖中有 n 種不同口味的糖果，n 為正整數，則：

一次吃 1 顆有 C_1^n 種口味

一次吃 2 顆有 C_2^n 種口味

一次吃 3 顆有 C_3^n 種口味

⋮

一次吃 n 顆有 C_n^n 種口味，共有 $C_1^n+C_2^n+C_3^n+\cdots\cdots+C_n^n$ 種口味

令多項式 $f(x)-(1+x)^n$，由二項式定理得 $f(x)-(1+x)^n-C_0^n+C_1^n x+C_2^n x^2+\cdots\cdots+C_n^n x^n$

當 $x=1$ 時，$f(1)=(1+1)^n=C_0^n+C_1^n\times 1+C_2^n\times 1^2+\cdots\cdots+C_n^n\times 1^n$

即 $2^n=C_0^n+C_1^n+C_2^n+\cdots\cdots+C_n^n\Rightarrow C_1^n+C_2^n+\cdots\cdots C_n^n=2^n-C_0^n=2^n-1$

又總共有 2000 多種口味，因此 $2000<2^n-1<3000\Rightarrow 2001<2^n<3001$

當 $n=10$ 時，$2^{10}=1024$

當 $n=11$ 時，$2001<2^{11}=2048<3001$

當 $n=12$ 時，$2^{12}=4096$，因此一包雷根糖中共有 11 種不同口味的糖果。

G. $\left(\dfrac{3}{4} , \dfrac{3}{5}\right)$

難易度：中

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：能根據表格的資訊求出相關係數及迴歸直線

解析：設被墨汁滴到數字如下表所示：

成年人代號	甲	乙	丙	丁	戊	己	平均數	變異數
逛街時數 X	15	9	10	A	12	6	10	B
購物消費 Y	12	10	7	7	C	D	8	$\dfrac{16}{3}$

$10=\dfrac{1}{6}(15+9+10+A+12+6)=\dfrac{1}{6}(52+A)\quad\therefore A=8$

逛街時數 X 的變異數 $B=\dfrac{1}{6}\left[(15-10)^2+(9-10)^2+(10-10)^2+(8-10)^2+(12-10)^2+(6-10)^2\right]=\dfrac{25}{3}$

購物消費 Y 的平均數 $8=\dfrac{1}{6}(12+10+7+7+C+D)=\dfrac{1}{6}(36+C+D)$，所以 $C+D=12$

購物消費 Y 的變異數 $\dfrac{16}{3}=\dfrac{1}{6}\left[(12-8)^2+(10-8)^2+(7-8)^2+(7-8)^2+(C-8)^2+(D-8)^2\right]$

$\therefore(C-8)^2+(D-8)^2=10$

由 $C=12-D$ 帶入，得 $(4-D)^2+(D-8)^2=10\Rightarrow D=7$ 或 $5\quad\because C>D\quad\therefore C=7$，$D=5$

成年人代號	X	Y	$X-\overline{X}$	$(X-\overline{X})^2$	$Y-\overline{Y}$	$(Y-\overline{Y})^2$	$(X-\overline{X})(Y-\overline{Y})$
甲	15	12	5	25	4	16	20
乙	9	10	-1	1	2	4	-2
丙	10	7	0	0	-1	1	0
丁	8	7	-2	4	-1	1	2
戊	12	7	2	4	-1	1	-2
己	6	5	-4	16	-3	9	12
總和	60	48		50		32	30

相關係數 $r=\dfrac{30}{\sqrt{50}\sqrt{32}}=\dfrac{3}{4}$；$Y$ 對 X 的迴歸直線(最適合直線)斜率 $m=\dfrac{30}{50}=\dfrac{3}{5}$，

故數對 $(r, m)=\left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{3}{5}\right)$

H. $\dfrac{5}{9}$

難易度：難

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：透過分類討論，利用加法與乘法原理計算事件發生的機率

解析：令 A 表院長，B 表小欣，C 表小亞

ABC 三位獸醫一週內上班五日，休假兩日，且休假恰有一天為週末

ABC 三人在週末值班的情形共 $2^3-2=6$ 種

ABC 三人在週一至週五值班的情形共 $(C_4^5)^3-C_1^5=120$ 種

總情形共 120x6＝720 種

BC 至少同一天休假：

$(C_1^5\times C_3^4 \text{x}6)+(C_1^2\times 120)-(C_1^5\times C_3^4\times C_1^2)=120+240-40=320$

BC 不在同一天休假的機率為 $1-\dfrac{320}{720}=\dfrac{400}{720}=\dfrac{5}{9}$。

〈另解〉

每位獸醫師恰在週末休假一天，週一到週五休假一天且每天至少有一位獸醫師值班看診，週末(即週六或週日)排假有 6 種狀況，其中小欣和小亞不在同一天休假有 4 種狀況。

週六	週日
小欣，小亞	院長
小亞，院長	小欣
院長，小欣	小亞
院長	小欣，小亞
小欣	小亞，院長
小亞	院長，小欣

週一到周五每位醫師各有一天休假且三人不得在同一天休假，

排假共有 $5^3-5=120$ 種狀況

其中小欣和小亞不在同一天休假有 5x4x5＝100 種狀況

則小欣和小亞兩位獸醫師不在同一天休假的機率為 $\dfrac{4\times 100}{6\times 120}=\dfrac{5}{9}$