

第壹部分：選擇題（占 60 分）

一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 小販賣包子，小包子 5 個 112 元，大包子 3 個 140 元，且規定小包子需以 5 個為單位，大包子需以 3 個為單位購買。若某日營業額為 2100 元，則賣出的包子數有可能為下列何者？
 - (1) 70 個
 - (2) 71 個
 - (3) 72 個
 - (4) 73 個
 - (5) 74 個

2. 社團中有男社員 8 人，女社員 4 人，若將所有社員均分為三組，則每組必有女生的分法共有幾種？
 - (1) 1680 種
 - (2) 3360 種
 - (3) 6720 種
 - (4) 10080 種
 - (5) 20160 種

3. 若複數 $1+i$ 為實係數方程式 $x^4+2x^2+ax+8=0$ 的一個解，則 a 的值為何？
 - (1) -2
 - (2) 2
 - (3) -4
 - (4) 4
 - (5) -6

4. 給定三集合 $A = \{x \mid x \text{ 為實數且滿足 } x^3 - x \leq 0\}$ ， $B = \{x \mid x \text{ 為實數且滿足 } |x| + |x - 5| = 1\}$ ， $C = \{x \mid x \text{ 為實數且滿足 } |x - 2| - 3|x + 1| > 2x - 9\}$ ，則 A, B, C 三集合的關係為何？

- (1) $B \subset A \subset C$
- (2) $B \subset C \subset A$
- (3) $A \subset C \subset B$
- (4) $A \subset B \subset C$
- (5) $C \subset B \subset A$

5. 所謂「1.01 的勤勉法則」是指如果你每天都比前一天進步 0.01，一年以後你將具備有現在的 37.8 倍的能力，此結果是由 1.01^{365} 約等於 37.8 而得出。如果情況相反，你每天都比前一天退步 0.01，請利用對數表估算你 365 天之後，大約還有現在的多少倍能力？請選出最接近的選項。(log 9.9 \approx 0.9956)

- (1) 0.3
- (2) 0.2
- (3) 0.05
- (4) 0.02
- (5) 0.001

6. 設 10 個正數 x_1, x_2, \dots, x_{10} ，考慮下列三個條件：

- (A) $\sum_{i=1}^{10} x_i$ 之值
- (B) $\sum_{i=1}^{10} x_i^2$ 之值
- (C) $\sum_{i=1}^{10} \sqrt{x_i}$ 之值

令 x_1, x_2, \dots, x_{10} 的標準差為 σ ，請選出正確的選項。

- (1) 只需要條件(B)即可求出 σ
- (2) 只需要條件(A)與(B)即可求出 σ
- (3) 只需要條件(B)與(C)即可求出 σ
- (4) 只需要條件(A)與(C)即可求出 σ
- (5) 就算由條件(A)與(B)與(C)也無法求出 σ

二、多選題（占 30 分）

說明：第 7 題至第 12 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7. 已知整係數方程式 $3x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0$ 且 $a > 0$, $b > 0$, 則下列哪些選項可能為此方程式的有理根？
- (1) 1
 - (2) -1
 - (3) $\frac{1}{3}$
 - (4) $-\frac{1}{3}$
 - (5) $-\frac{2}{3}$
8. 設 a, b 為實數且 $a > b > 1$, 考慮函數 $f(x) = a^x$, $g(x) = \log_a x$, $h(x) = \log_b x$, 請選出正確的選項。
- (1) $y = f(x)$ 與 $y = g(x)$ 的圖形對稱於直線 $x = y$
 - (2) $y = f(x)$ 與 $y = g(x)$ 的圖形沒有交點
 - (3) $g(38) - g(19) = g(76) - g(38)$
 - (4) $\frac{f(38)}{f(19)} = \frac{f(76)}{f(38)}$
 - (5) 對於所有實數 $x > 0$, $g(x) < h(x)$ 必成立

9. 已知 $f(x)$ ， $g(x)$ 為實係數多項式：

$$f(x) = x + (1+x^2) + (1+x^2)^2 + (1+x^2)^3 + \dots + (1+x^2)^{10},$$

$$g(x) = 2047 \cdot \frac{x-(-1)}{1-(-1)} + 2045 \cdot \frac{x-1}{(-1)-1}。請選出正確的選項。$$

- (1) 在 $f(x)$ 的展開式中， x^4 項的係數為 120
- (2) $f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為 1023
- (3) $f(x)$ 除以 $(x-1)(x+1)$ 的餘式為 $g(x)$
- (4) $f(2)$ 的值為七位數
- (5) $f(2)$ 的最高位數字為 1

10. 實數數列 $\langle a_n \rangle$ ， $\langle b_n \rangle$ 滿足 $b_k = a_{k+1} - a_k$ ， $k=1, 2, \dots$ 。請選出正確的選項。

- (1) 若 $\langle b_n \rangle = \langle 2018 \rangle$ ，則 $\langle a_n \rangle$ 為等差數列
- (2) 若 $\langle b_n \rangle$ 為等差數列，則 $\langle a_n \rangle$ 為等比數列
- (3) 若 $\langle b_n \rangle$ 為等比數列且公比不為 1，則 $\langle a_n \rangle$ 為等比數列
- (4) 若 $\langle a_n \rangle$ 為等比數列且公比不為 1，則 $\langle b_n \rangle$ 為等比數列
- (5) 設 b_n 為等差數列，若 $a_1=1$ ， $a_2=2$ ， $a_3=5$ ，則 $a_{100}=9900$

11. 兩變數 X 與 Y 的 10 筆資料 (x_1, y_1) ， (x_2, y_2) ， \dots ， (x_{10}, y_{10}) 。令 μ_X 、 μ_Y 分別為 X 、 Y 的平均

數， σ_X 、 σ_Y 分別為 X 、 Y 的標準差。將資料標準化為 X' 和 Y' (即 $x_i' = \frac{x_i - \mu_X}{\sigma_X}$ ， $y_i' = \frac{y_i - \mu_Y}{\sigma_Y}$)，

已知 X' ， Y' 的相關係數為 r ，請選出正確的選項。

- (1) $\sum_{i=1}^{10} x_i' = 0$
- (2) x_i' ， $i=1, 2, \dots, 10$ 的標準差為 1
- (3) $\sum_{i=1}^{10} x_i' y_i' = 10$
- (4) Y' 對 X' 的最適合直線必過原點
- (5) Y' 對 X' 的最適合直線斜率不可能大於 1

12. 蔬果的農藥殘留一直是消費者關注的議題。某年，政府提出市售蔬果農藥殘留之監測計畫，由各縣市衛生局每月抽送蔬果檢體 6 件至藥物食品檢驗局的檢驗站、衛生局區域聯合分工檢驗體系之農藥殘留檢驗室。依據衛生福利部公告食品中殘留農藥檢驗方法—多重殘留分析方法以及二硫代胺基甲酸鹽類之檢驗予以檢測。另增加液相層析串聯質譜儀分析，農藥檢驗項目共 187 種。本次計畫共抽驗 1761 件檢體，檢驗之部分結果如下：

表 1：市售農產品農藥殘留依市場別分析統計表

市場別	抽驗件數	檢出農藥		不符規定	
		件數	%	件數	%
傳統市場	427	141	33.0	23	5.4
非傳統市場	1334	425	31.9	49	3.7
總計	1761	566	32.1	72	4.1

表 2：市售農產品中有機蔬果與非有機蔬果農藥殘留分析統計表

類別	抽驗件數	檢出農藥		不符規定	
		件數	%	件數	%
有機	121	3	2.5	0	0
非有機	1640	563	34.3	72	4.4
總計	1761	566	32.1	72	4.1

(資料來源：藥物食品檢驗局調查研究年報.26：第 225~255 頁，2008 年)

上列各表中，不符規定之檢體原因有兩類：一為檢驗出的殘留農藥超過殘留容許限量，二為檢驗出不得檢出之農藥。若已知抽驗檢體源自於傳統市場之有機蔬果檢出農藥者有 1 件，不符規定者為 0 件；抽驗檢體源自於非傳統市場之非有機蔬果檢出農藥者有 423 件，不符規定者有 49 件。請根據上述資料選出正確的選項。

- (1)在市售農產品之檢體中，非有機蔬果農藥殘留檢驗結果不符規定者約有 4.4 %
- (2)在市售農產品之檢體中，源自於傳統市場且檢出農藥者約有 33 %
- (3)在檢體源自於傳統市場的條件下，檢驗出農藥者約有 33 %
- (4)在檢體源自於傳統市場的條件下，有機蔬果檢驗出農藥者不超過 1 %
- (5)在檢體源自於非傳統市場的條件下，非有機蔬果檢驗出不符規定者不超過 2 %

第貳部分：選填題（占 40 分）

說明：1.第 A 至 H 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(13-33)。
2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 已知 $\log 10a$ 與 $\log 3$ 的首數相同， $\log 100a$ 與 $\log 56$ 的尾數相同，則實數 a 為 ⑬.⑭⑮。

B. 設 m 為實數，若對於每個實數 x ，不等式 $\frac{1}{4}x^2 - mx + (2m + 15) \leq 0$ 恆無解。在滿足此條件之 m 的範圍中，有三個相異整數 a, b, c 成等比數列，則 $a + c$ 的值为 ⑩。

C. 已知三實數 $\log_2 a, \log_4 b, \log_8 c$ 成等差數列，可得到 a, b, c 之關係式為 $b = a^x \cdot c^y$ ，則數對 $(x, y) = \left(\textcircled{17}, \frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}} \right)$ 。(化為最簡分數)

D. 將 $0, 0, 1, 1, 2, 3, 5$ 共七個數字排成一列，則共可排出 ⑳㉑㉒ 種相異的七位數。

E. 將 $1, 2, 3, 4$ 這四個數字隨意填入右圖四個方格中，每個方格填入一個數字，數字不得重複，試求填入的數字滿足 $A > B$ 且 $C > B$ 的機率為 $\frac{\textcircled{23}}{\textcircled{24}}$ 。
(化為最簡分數)

A	C
B	D

F. 請計算級數 $\frac{5}{1^2+2^2} + \frac{7}{1^2+2^2+3^2} + \dots + \frac{2k+3}{1^2+2^2+\dots+(k+1)^2} + \dots + \frac{43}{1^2+2^2+\dots+21^2}$ 的值为 $\frac{\textcircled{25}\textcircled{26}}{\textcircled{27}\textcircled{28}}$ 。(化為最簡分數)

G. 小明測量某物品的重量五次，得到五筆原始數據分別為 $1.98, 2.01, 2.02, 1.95, x$ 。小明把每個數據都乘以 100 ，再減去 200 後得到一組新數據。若已知新數據的平均為 -2 ，則五筆原始數據的標準差為 $\frac{\sqrt{\textcircled{29}\textcircled{30}}}{100}$ 。

H. 台彩公司推出「雙贏彩」，玩法為從 $01 \sim 24$ 的號碼中任選 12 個號碼進行投注。開獎時，開獎單位將隨機開出 12 個號碼，你的 12 個選號如果全部對中當期開出之 12 個號碼，或者全部未對中，均為中頭獎。恰中 11 個號碼或恰中 1 個號碼則得二獎。現有某公司模仿「雙贏彩」推出「小雙贏彩」，玩法為從 $01 \sim 12$ 的號碼中任選 6 個號碼進行投注。開獎時，開獎單位隨機從 $01 \sim 12$ 的號碼中開出 6 個號碼為獎號，你的 6 個選號如果全部對中獎號或者全部未對中，均為中頭獎。恰中 5 個號碼或恰中 1 個號碼則得二獎。請問投注一注小雙贏彩得二獎的機率為 $\frac{\textcircled{31}}{\textcircled{32}\textcircled{33}}$ 。(化為最簡分數)

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n[2a + (n-1)d]}{2}$

首項為 a ，公比為 r ($r \neq 1$) 的等比數列前 n 項之和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ ， $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$

3. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，算術平均數 $\mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

標準差 $\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2}$

4. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$

相關係數 $r_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

迴歸直線(最適合直線)方程式 $y - \mu_Y = r_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$

5. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$

6. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ， $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ ， $\log_{10} 7 \approx 0.8451$

7. 常用對數表 $y = \log_{10} x$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428

數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
答案	(2)	(2)	(3)	(1)	(4)	(2)	(2)(4)	(1)(3)	(3)(5)
題號	10.	11.	12.						
答案	(1)(4)	(1)(2)(4)(5)	(3)(4)						

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (2)

難易度：易

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：基本計數原理

解析：假設小包子 5 個一組，共賣出 x 組，大包子 3 個一組，共賣出 y 組

$$\text{得營業額為 } 112x + 140y = 2100 \Rightarrow 4x + 5y = 75$$

其整數解 $(x, y) = (0, 15), (5, 11), (10, 7), (15, 3)$ ，賣出的包子數分別為 45、58、71、84 個
故選(2)。

2. (2)

難易度：中

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：基本的分組問題

解析：滿足條件的分法：三組為一女三男、一女三男、兩女兩男

$$\text{分法共有 } C_1^4 \cdot C_1^3 \cdot \frac{1}{2!} \cdot C_3^8 \cdot C_3^5 = 3360(\text{種})$$

故選(2)。

3. (3)

難易度：易

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：基本方程式的解及除法運算

解析：令 $x = 1 + i$ ，得 $x^2 - 2x + 2 = 0$

$$\text{因 } x^2 - 2x + 2 \text{ 整除 } x^4 + 2x^2 + ax + 8, \text{ 經除法得 } a = -4$$

故選(3)。

4. (1)

難易度：中

出處：第一冊第一章〈數與式〉、第一冊第二章〈多項式函數〉、第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：絕對值的運算、不等式的運算及集合符號判讀

解析：A： $x^3 - x = x(x-1)(x+1) \leq 0$ 的解為 $x \leq -1$ 或 $0 \leq x \leq 1$

B：由三角不等式知 $|x| + |x-5| \geq 5$ ，故 $|x| + |x-5| = 1$ ，無實數解

C：當 $x \geq 2$ 時， $(x-2) - 3(x+1) > 2x-9 \Rightarrow x < 1$ ，無實數解

$$\text{當 } -1 \leq x < 2 \text{ 時， } (2-x) - 3(x+1) > 2x-9 \Rightarrow x < \frac{4}{3}, \text{ 解為 } -1 \leq x < \frac{4}{3}$$

$$\text{當 } x < -1 \text{ 時， } (2-x) - 3(-x-1) > 2x-9 \Rightarrow 14 > 0 \text{ 恆成立，解為 } x < -1$$

$$\text{由上述討論得 } |x-2| - 3|x+1| > 2x-9 \text{ 之解為 } x < \frac{4}{3}$$

因此 $B \subset A \subset C$

故選(1)。

5. (4)

難易度：中

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：對數運算及查表

解析：如果每天都比前一天退步 0.01，365 天之後，與今天的能力相比，大約還有 0.99^{365} 倍的能力。

$$\text{設 } x = 0.99^{365}, \log x = 365 \times \log 0.99 \approx 365 \times (0.9956 - 1) = -1.606 = -2 + 0.394$$

由查表可知， $\log 2.48 = 0.3945$ ，因此 $\log x = -2 + 0.394 \approx -2 + \log 2.48 = \log 0.0248$ ，則 $x \approx 0.02$
故選(4)。

6. (2)

難易度：中

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：基本標準差運算的理解

解析：設 x_1, x_2, \dots, x_{10} 的平均數為 $\mu = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10}$

則 x_1, x_2, \dots, x_{10} 的標準差 σ 為

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \mu)^2} &= \sqrt{\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i^2 - 2\mu x_i + \mu^2)} = \sqrt{\frac{1}{10} \left(\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 2\mu \sum_{i=1}^{10} x_i + \sum_{i=1}^{10} \mu^2 \right)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{10} \left(\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 2\mu(10\mu) + 10\mu^2 \right)} = \sqrt{\frac{1}{10} \left(\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 10\mu^2 \right)} = \sqrt{\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - \mu^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - \left(\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i \right)^2} \end{aligned}$$

所以只需要條件(A)與(B)即可求出標準差 σ
故選(2)。

二、多選題

7. (2)(4)

難易度：易

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：整係數一次因式檢驗法的判斷

解析：根據整係數一次因式檢驗法，若 $px - q$ 整除 $3x^3 + ax^2 + bx + 1$ 且 p, q 互質，則 p 整除 3， q 整除 1

故可能之有理根為 $1, -1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$

又因為 a, b 皆為正數，所以此方程式不會有正根

故選(2)(4)。

8. (1)(3)

難易度：中

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：指數與對數函數的性質及運算

解析：(1) ○：指對數函數圖形的對稱性

(2) ×：當 $a = 1.24$ 時，圖形會有交點，如右圖

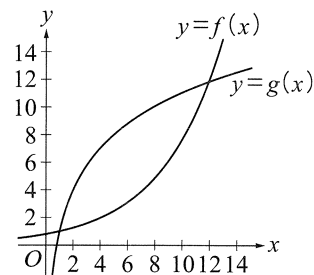
$$(3) \bigcirc : g(38) - g(19) = \log_a 38 - \log_a 19 = \log_a \frac{38}{19} = \log_a 2 ;$$

$$g(76) - g(38) = \log_a 76 - \log_a 38 = \log_a \frac{76}{38} = \log_a 2$$

$$(4) \times : \frac{f(38)}{f(19)} = a^{38-19} = a^{19} ; \frac{f(76)}{f(38)} = a^{76-38} = a^{38}$$

(5) ×：當 $0 < x < 1$ 時， $g(x) > h(x)$ ； $x > 1$ 時， $g(x) < h(x)$

故選(1)(3)。



9. (3)(5)

難易度：中

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉、第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：多項式及插值多項式的應用、等比級數的運算、首數與尾數的運算

解析：(1) \times : $f(x) = x + \frac{(1+x^2)[(1+x^2)^{10}-1]}{(1+x^2)-1} = x + \frac{(1+x^2)^{11}-(1+x^2)}{x^2}$

其展開式中 x^4 項的係數，即為 $(1+x^2)^{11}$ 展開式中 x^6 項的係數 $C_3^{11} = 165$

(2) \times : 所求為 $f(1) = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{10} = \frac{2^{11}-1}{2-1} = 2047$

(3) \circ : $f(-1) = (-1) + 2 + 2^2 + \dots + 2^{10} = (-1) + \frac{2 \cdot (2^{10}-1)}{2-1} = 2045$ ，又由(2)可知 $f(1) = 2047$

故 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x+1)$ 的餘式為平面上過點 $(1, 2047)$ ， $(-1, 2045)$ 的插值多項式，即為 $g(x)$ (或可令 $f(x) = (x-1)(x+1)Q(x) + ax + b$ ，解得 $a = 1$ ， $b = 2046$ 與 $g(x)$ 的展開整理相同)

(4)(5) : $f(2) = 2 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{10} = 2 + \frac{5 \cdot (5^{10}-1)}{5-1} = 2 + \frac{5^{11}-5}{4}$

$\therefore \log 5^{11} = 11 \times \log 5 = 11 \times 0.699 = 7.689 = 7 + 0.689 = 7 + \log 4. \dots$

$\Rightarrow 5^{11} = 4. \dots \times 10^7$

$\Rightarrow f(2) = 2 + \frac{4. \dots \times 10^7 - 5}{4} = 0.75 + 1. \dots \times 10^7$

故其位數為八位數，且最高位數字為 1 \therefore (4) \times ; (5) \circ

故選(3)(5)。

10. (1)(4)

難易度：中

出處：第二冊第一章〈數列與級數〉

目標：數列級數的判斷及運算

解析：(1) \circ : $a_{k+1} - a_k = 2018$ 為等差數列

(2) \times : 設 $b_n = 1, 2, 3, \dots$ 為等差數列且 $a_1 = 1$ ，則 $a_n = 1, 2, 4, 7, \dots$ 非等比數列

(3) \times : 設 $b_n = 1, 3, 3^2, 3^3, \dots$ 為等比數列且 $a_1 = 1$ ，則 $a_n = 1, 2, 5, 14, 41, \dots$ 非等比數列

(4) \circ : 設 $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ 且 $r \neq 1$

$b_n = a_{n+1} - a_n = a_1 \cdot r^n - a_1 \cdot r^{n-1} = (a_1 r - a_1) \cdot r^{n-1}$ 為等比數列

(5) \times : $b_1 = a_2 - a_1 = 1$ ， $b_2 = a_3 - a_2 = 3$ ，又 b_n 為等差數列，所以 $b_n = 2n - 1$

$a_{100} = b_{99} + a_{99} = b_{99} + b_{98} + a_{98} = \dots = b_{99} + b_{98} + \dots + b_1 + a_1$
 $= 1 + \sum_{k=1}^{99} (2k-1) = 1 + 2 \times \frac{99 \times 100}{2} - 99 = 9802$

故選(1)(4)。

11. (1)(2)(4)(5)

難易度：中

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：二維(標準化)數據的分析及相關係數的判斷

解析：(1) \circ : 標準化後的數據，平均數為 0。 $\mu_{X'} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i'}{10} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{10} x_i' = 0$

(2) \circ : 標準化後的數據，標準差為 1

(3) \times : $r = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i' y_i'}{10}$ ，因 r 未知，故 $\sum_{i=1}^{10} x_i' y_i'$ 未知

(4) \circ : Y' 對 X' 的最適合直線必過 $\mu_{X'}$ ， $\mu_{Y'}$ ，因標準化後的數據平均數為 0 故 Y' 對 X' 的最適合直線必過原點

(5) \circ : 因為 (x_i', y_i') 為標準化後的數據，所以 Y' 對 X' 的最適合直線的斜率為相關係數 r
 $\therefore -1 \leq r \leq 1$ \therefore 斜率不可能大於 1

故選(1)(2)(4)(5)。

12. (3)(4)

難易度：難

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：條件機率的應用

解析：(1) \times ： $\frac{72}{1761} \approx 0.0408$ ，約有 4.1 %

(2) \times ： $\frac{141}{1761} \approx 0.08$ ，約有 8 %

(3) \circ ：由表一可知約有 33 %

(4) \circ ： $\frac{1}{427} \approx 0.0023$ ，約有 0.23 %

(5) \times ： $\frac{49}{1334} \approx 0.0367$ ，約有 3.7 %

故選(3)(4)。

第貳部分：選填題

A. 0.56

難易度：中

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：首數與尾數的判斷

解析：由 $\log 10a$ 的首數為 0 得知 $\log a$ 的首數為 -1 ，即 $10^{-1} \leq a < 1$
又 $\log 100a$ 與 $\log 56$ 的尾數相同，得 $a = 0.56$ 。

B. 5

難易度：中偏易

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉、第二冊第一章〈數列與級數〉

目標：二次不等式及等比級數的運算

解析：所求 $m^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot (2m + 15) < 0$

$$\Rightarrow m^2 - 2m - 15 < 0$$

$$\Rightarrow (m+3)(m-5) < 0$$

$$\Rightarrow -3 < m < 5$$

在此範圍內的整數有 $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$

則滿足 a, b, c 三數成等比數列者有 $1, 2, 4$ 或 $1, -2, 4$ 兩組，故 $a+c=5$ 。

C. $\left(1, \frac{1}{3}\right)$

難易度：易

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉、第二冊第一章〈數列與級數〉

目標：基本等差級數的運算

解析： $2 \log_4 b = \log_2 a + \log_8 c \Rightarrow \log_2 b = \log_2 a + \log_2 c^{\frac{1}{3}} \Rightarrow b = a \cdot c^{\frac{1}{3}}$ ，故數對為 $\left(1, \frac{1}{3}\right)$ 。

D. 900

難易度：易

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：基本不盡相異物的排列

解析： $\frac{7!}{2!2!} - \frac{6!}{2!} = 900$ (種)。

E. $\frac{1}{3}$

難易度：易

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：基本機率的運算

解析： $\frac{C_3^4 \times 2!}{4!} = \frac{1}{3}$ 。

F. $\frac{30}{11}$

難易度：難

出處：第二冊第一章〈數列與級數〉

目標： Σ 與級數的應用

解析：所求為 $\sum_{k=1}^{20} \frac{2k+3}{1^2+2^2+\dots+(k+1)^2}$

$$= \sum_{k=1}^{20} \frac{2k+3}{(k+1)(k+2)(2k+3)} = \sum_{k=1}^{20} \frac{6}{(k+1)(k+2)}$$

$$= 6 \sum_{k=1}^{20} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) = 6 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{22} \right) = \frac{30}{11}。$$

G. $\frac{\sqrt{10}}{100}$

難易度：中偏易

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：資料平移伸縮的運算

解析：設新數據為 $-2, 1, 2, -5, k$ ，由新數據平均為 -2 ，得 $k = -6$

$$\text{新數據標準差為 } \sqrt{\frac{0^2+3^2+4^2+(-3)^2+(-4)^2}{5}} = \sqrt{10}$$

$$\text{因此五筆原始數據的標準差為 } \frac{\sqrt{10}}{100}。$$

H. $\frac{6}{77}$

難易度：中偏易

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：機率的運算

解析： $\frac{C_5^6 C_1^6 + C_1^6 C_5^6}{C_6^{12}} = \frac{6}{77}。$