臺北區 108 學年度第一學期
第二次學科能力測驗模擬考試

數學考科

—作答注意事項—

考試範圍：第一～四冊全

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 6 題，多選題 6 題，選填題第 A 至 H 題共 8 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記，請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\dfrac{⑱}{⑲}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\overset{3}{\square}$ 與第 19 列的 $\overset{8}{\square}$ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
18	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□
19	□	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□

例：若第 C 題的答案格式是 $\dfrac{⑳㉑}{50}$ ，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\overset{-}{\square}$ 與第 21 列的 $\overset{7}{\square}$ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
20	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	□
21	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□	□

※試題後附有參考公式及可能用到的數值

祝考試順利

第壹部分：選擇題（占 60 分）

一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 在 2019 年 8 月 23 日網路上出現一則訊息：今日是 2019 年 8 月 23 日，一個看似平常的日子，但是卻是難得一見的"質數日"，這種現象十分罕見，下次要再遇到質數日將是 11 年後。所謂質數日就是說從 20190823 這個數開始，每次去除首位數字所得到的新數也是質數。列舉如下：20190823、0190823 (即 190823)、90823、0823 (即 823)、23、3 都是質數。
若令 $a=\log 20190823$，則 a 的近似值範圍為下列哪個選項？
(1) $6<a<6.5$
(2) $6.5<a<7$
(3) $7<a<7.5$
(4) $7.5<a<8$
(5) $8<a<8.5$

2. 菌藻共生是一種自然生態的養殖方式，除了可以提高水產(如魚、蝦、貝類等)的養殖密度和存活率之外，也可以做為水產的食物，進而降低飼料用量並維持水質穩定及減少用水量。現今科學家發現一種行裂殖方式增長的菌藻，並在嚴格控管所有變因的實驗中觀察歸納出此菌藻的分裂模型如下：「每 1 單位的菌藻要經過兩天的時間才會分裂成 2 單位」。現在某水產養殖場買進此種菌藻 50 單位，假設養殖場裡的水產每一天約固定吃掉 10 單位的菌藻。請問養殖員應倒入多少單位的菌藻才能在每兩天的例行檢測中，檢測出相同數量的菌藻以維持池中的生態平衡？(註：菌藻及水產無其它原因如生病、被售出、繁殖等，導致其數量有所增減)
(1) 30 單位
(2) 35 單位
(3) 40 單位
(4) 45 單位
(5) 50 單位

3. 設 n 為正整數，若 $(x+1)^2+(x+3)^2+(x+5)^2+\cdots\cdots+[x+(2n-1)]^2=ax^2+bx+c$，則 b 為下列何者？

(1) $\dfrac{n(n-1)}{2}$

(2) $\dfrac{n(n+1)}{2}$

(3) n^2

(4) $2n^2$

(5) $4n^2$

4. 高一、高二、高三的學生人數分別占全校學生人數的 30 %、30 %、40 %。某次月考，高一、高二、高三的數學成績及格學生人數分別占全校學生人數的 10 %、15 %、15 %。若已知某位學生數學成績及格的條件下，則此學生為高一學生的機率為何？

(1) $\dfrac{1}{10}$

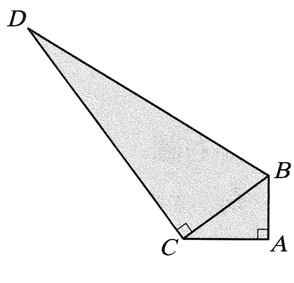
(2) $\dfrac{3}{100}$

(3) $\dfrac{2}{9}$

(4) $\dfrac{1}{4}$

(5) $\dfrac{1}{3}$

5. 如右圖，$\triangle ABC$ 與 $\triangle BCD$ 皆為直角三角形，其中 $\angle A=\angle BCD=90^\circ$，$\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=4$，$\overline{CD}=12$，若 $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，試求數對 $(x\,,y)$。



(1) $\left(\dfrac{13}{5}\,,\dfrac{17}{5}\right)$

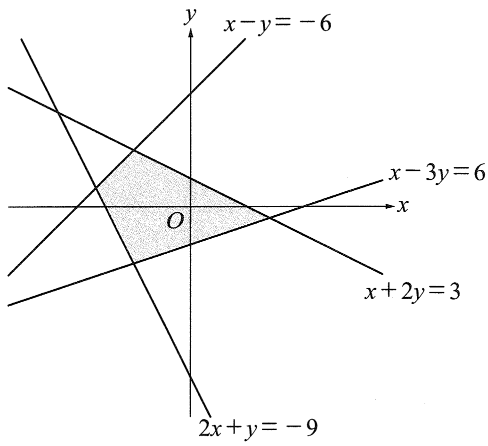
(2) $\left(\dfrac{14}{5}\,,\dfrac{16}{5}\right)$

(3) $(3\,,3)$

(4) $\left(\dfrac{16}{5}\,,\dfrac{14}{5}\right)$

(5) $\left(\dfrac{17}{5}\,,\dfrac{13}{5}\right)$

6. 如右圖，(x, y) 為陰影內(含邊線)一點，若 $kx+y$ 在 $(-3, 3)$ 有唯一最大值，則 k 之值可能為何？
(1) 0
(2) 1
(3) 2
(4) -1
(5) -2

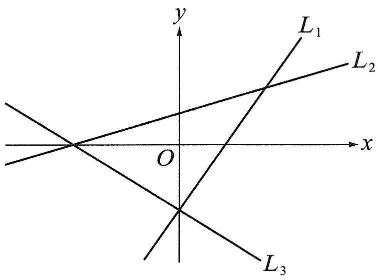


二、多選題（占 30 分）

說明：第 7 題至第 12 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7. 已知 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 為實係數三次多項式，其中 $a>0$，$f(0)<0$，$f(6)=17$，複數 $2+i$ 為方程式 $f(x)=0$ 的一根，請選出正確的選項。($i=\sqrt{-1}$)
(1) $f(-2+i)=0$
(2)方程式 $f(x)=0$ 恰有一個正實根
(3) $y=f(x)$ 的圖形與 $y=2019x+108$ 的圖形必有交點
(4)方程式 $f(x^2)=(x-1)(x-2)$ 有 6 個根
(5)若 $a=\dfrac{1}{2}$，則 $d=-20$

8. 如右圖，三直線 L_1、L_2、L_3 之方程式分別為 L_1：$x+ay+b=0$，L_2：$x+cy+d=0$，L_3：$ex+y+f=0$，其中 L_1 與 L_3 垂直且 L_1 與 L_3 的交點在 y 軸上，請選出正確的選項。
(1) $ab>0$
(2) $cd>0$
(3) $c>a$
(4) $b=af$
(5) $a+e=0$



9. 設 $O(0,0)$，$A(3,-4)$，$B(3,0)$ 為平面上三點，圓 C：$(x-4)^2+(y-3)^2=9$，且 $P(x,y)$ 為圓 C 上的動點，請選出正確的選項。

(1)當 P 點的坐標為 $(4,6)$ 時，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=10\sqrt{13}$

(2)當 P 點的坐標為 $(4,6)$ 時，若 $\overrightarrow{OP}$ 與 $\overrightarrow{OA}$ 的夾角為 θ，則 $\cos\theta=\dfrac{6}{5\sqrt{13}}$

(3) $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}$ 的最小值為 -15

(4)在圓 C 上可找到 2 個 P 點，使得 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}=5$

(5) $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}$ 的最大值為 24

10. 已知 $A(4,-4,2)$，$B(3,0,3)$，$C(0,0,0)$ 為空間中某一個正八面體的三頂點，也是某一個正方形的三頂點，試問下列哪些點也是此正八面體的頂點？

(1) $(2,-1,2)$

(2) $(2,-2,1)$

(3) $(1,-4,-1)$

(4) $(0,-3,3)$

(5) $(4,-1,-1)$

11. 設 Γ：$\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 為平面上某圖形，下列何者和 Γ 有相同的焦點？

(1) $\dfrac{x^2}{5-\sqrt{31}}+\dfrac{y^2}{3-\sqrt{31}}=1$

(2) $\dfrac{x^2}{5-\sqrt{17}}+\dfrac{y^2}{3-\sqrt{17}}=1$

(3) $\dfrac{x^2}{5+\sqrt{3}}+\dfrac{y^2}{3+\sqrt{3}}=1$

(4) $\dfrac{y^2}{5-\sqrt{15}}+\dfrac{x^2}{3-\sqrt{15}}=1$

(5) $\dfrac{y^2}{5+\sqrt{5}}+\dfrac{x^2}{3+\sqrt{5}}=1$

12. 關於空間中平面與直線的敘述，下列何者正確？

(1)直線 L：$\begin{cases} x+2y-z=3 \\ x+y+z=-1 \end{cases}$ 落在平面 E：$4x+5y+2z=0$ 上

(2)直線 L_1：$\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$ 和直線 L_2：$\dfrac{x-3}{-3}=\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z-2}{1}$ 交於一點

(3)直線 L_1：$\dfrac{3x-3}{1}=\dfrac{-6y+12}{-2}=\dfrac{4z-24}{2}$ 和直線 L_2：$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{3}$ 平行

(4) x 軸和直線 L：$\begin{cases} x=1 \\ z=1 \end{cases}$ 歪斜

(5)直線 L_1：$\begin{cases} x=2-t \\ y=2t \\ z=1+t \end{cases}$，$t\in R$ 和直線 L_2：$\begin{cases} x=-2s+3 \\ y=4s-2 \\ z=2s \end{cases}$，$s\in R$ 重合

第貳部分：選填題（占 40 分）

說明：1.第 A 至 H 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(13－30)。
2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 設 $f(x)=x^5+6x^4+52x^2+ax+20$，已知 $f(-7)=-1$，則 $a=$ ⑬⑭ 。

B. 坐標平面上，直線 $y=4$ 分別與 $y=\log_2 x$，$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 的圖形相交於 P，Q 兩點；直線 $x=\dfrac{1}{2}$ 分別與 $y=\log_2 x$，$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 的圖形相交於 R，S 兩點；按照 P-R-Q-S 的順序將此四點連成一凹四邊形 $PRQS$(鏢形)，則此凹四邊形的面積為 ⑮⑯ 平方單位。(四捨五入到整數位)

C. 若某高中的段考數學成績如右，而小強與小美分別為社會組及自然組學生，他們在考試前打賭，將數學成績化為標準化分數(四捨五入至整數位)，輸多少就請對方吃幾天的早餐。已知小美的標準化分數為 3，並且小強必須請小美吃 1 天的早餐，則小強該次段考數學成績最低可為 ⑰⑱ 分。(註：社會組與自然組為不同試卷)

	平均分數(分)	標準差(分)
社會組	72	8
自然組	65	5

D. 已知在△ ABC 中，$\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=5$，$\overline{BC}=7$，若 D 為 $\overline{BC}$ 上一點使得 $\angle CAD=3\angle BAD$，則 $\overline{CD}=$ $\dfrac{⑲⑳}{㉑㉒}$ 。(化為最簡分數)

E. 西元 2020 年大西洋東岸某島國即將舉行該國的總統大選，國內各個政黨都考慮利用電話民調進行黨內初選，然而各黨的候選人對於手機與傳統市話的抽樣比例產生爭論而僵持不下。針對此一問題，實際上可利用數學方式計算出純手機與純傳統市話使用者之比例，進而獲得更多有用的資訊，讓抽樣比例更有科學依據，更切合各個政黨的需求。

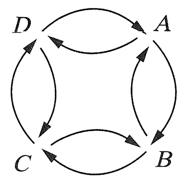
請利用下面的資訊，試計算出同時使用傳統市話及手機的人口比例 $Y=$ ㉓㉔ ％。

(1)根據電信公司公布的資料，在使用傳統市話的選民中，有 93.75 ％也有使用手機。

(2)根據手機業者公布的資料，在使用手機的選民中，有 62.5 ％也有使用傳統市話。

(3)假設 X 是只有使用傳統市話的人口比例，Y 是有使用傳統市話也有使用手機的人口比例，Z 是只有使用手機的人口比例，則 $X+Y+Z=1$。

F. 如右圖，A、B、C、D 分別各有磚塊 31、20、18、27 塊，每次只能搬動 1 塊磚塊到相鄰處(例如不可由 A 直接搬到 C 或不可由 B 直接搬到 D)。則至少要搬動 ㉕㉖ 次才能使 A、B、C、D 的磚塊數相同。



G. 已知拋物線的一種定義為平面上所有到某一個固定點(稱為焦點)與到某一條固定直線(稱為準線)距離相等的所有點 (x, y) 所形成的集合。若按此定義，

Γ：$\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=\dfrac{|x-2y+5|}{\sqrt{5}}$ 的圖形為一個拋物線，則此拋物線 Γ 的頂點坐標為 (㉗ , ㉘) 。

H. 一箱中有 4 個紅球和 2 個白球，箱外有 1 個白球，現在做如下的操作：每次自箱中取出一球，再把箱外另一球放入箱中，且每球被取出的機率相等。重複此種操作多次後會達成"穩定狀態"，此時自箱中取出紅球的機率應為 $\dfrac{㉙}{㉚}$ 。(化為最簡分數)

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a，公差為 d 的等差數列前 n 項之和 $S_n=\dfrac{n(2a+(n-1)d)}{2}$

   首項為 a ，公比為 $r\ (r\neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和 $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 三角函數的和角公式與差角公式：$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

   $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$

   $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

   $\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$

   $$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$

   $$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$$

3. $\triangle ABC$ 的正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ (R 為$\triangle ABC$ 外接圓半徑)

   $\triangle ABC$ 的餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

4. 一維數據 X：x_1，x_2，……，x_n，算術平均數 $\mu_X=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i$

   標準差 $\sigma_X=\sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\left(\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)-n\mu_X^{\ 2}\right)}$

5. 二維數據 (X,Y)：(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，……，(x_n,y_n)，相關係數 $r_{XY}=\dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

   迴歸直線(最適合直線)方程式為 $y-\mu_Y=r_{XY}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$

6. x_i 的標準化分數(z 分數)$=\dfrac{x_i-\mu_x}{\sigma_x}$

7. 參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414$，$\sqrt{3}\approx 1.732$，$\sqrt{5}\approx 2.236$，$\sqrt{6}\approx 2.449$，$\sqrt{7}\approx 2.646$

8. 對數值：$\log_{10}2\approx 0.3010$，$\log_{10}3\approx 0.4771$，$\log_{10}5\approx 0.6990$，$\log_{10}7\approx 0.8451$，

   $\log_{10}11\approx 1.0414$

數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
答案	(3)	(3)	(4)	(4)	(4)	(1)	(2)(3)(4)	(1)(4)(5)	(3)(4)
題號	10.	11.	12.						
答案	(3)(4)(5)	(2)(3)	(1)(2)(3)(4)(5)						

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (3)

難易度：易

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：科學記號與對數的運算

解析：$a=\log 20190823$

$=\log 2.0190823\times 10^7$

$=\log 2.0190823+\log 10^7$

$=\log 2.0190823+7$

$\log 2<\log 2.0190823<\log 3 \Rightarrow 0.3010<\log 2.0190823<0.4771$

$\Rightarrow 7.3010<a<7.4771$

故選(3)。

2. (3)

難易度：易

出處：第二冊第一章〈數列與級數〉

目標：數列的規律

解析：設倒入 x 單位的菌藻

每 2 天菌藻數為 $(x-20)\times 2$

若要維持平衡則 $(x-20)\times 2=x$

$\Rightarrow x=40$ (單位)

故選(3)。

3. (4)

難易度：易

出處：第二冊第一章〈數列與級數〉

目標：級數和的公式

解析：b 為 x 項係數

$b=2\cdot 1+2\cdot 3+2\cdot 5+\cdots\cdots+2(2n-1)$，$n\in N$

$$b=2\times\frac{[1+(2n-1)]\times n}{2}=2n^2$$

故選(4)。

4. (4)

難易度：易

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：能分辨條件機率和貝氏定理的關係

解析：P(高一學生｜數學成績及格)

$$=\frac{P(\text{數學成績及格}\cap\text{高一學生})}{P(\text{數學成績及格})}$$

$$=\frac{10\%}{10\%+15\%+15\%}=\frac{1}{4}$$

故選(4)。

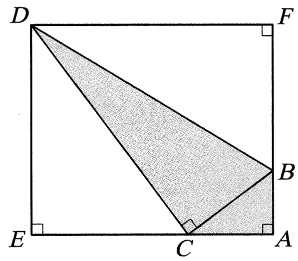
5. (4)

難易度：難

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：向量的線性組合

解析：$\because$ $\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=4$ 且 $\angle A=90^\circ$，由畢氏定理知 $\overline{BC}=5$



過 D 點對 $\overrightarrow{AC}$ 的延長線作垂線，垂足為 E；過 D 點對 $\overrightarrow{AB}$ 的延長線作垂線，垂足為 F

$\therefore$ 由線性組合的意義知，$x=\dfrac{\overline{AF}}{\overline{AB}}$，$y=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$

$\because$ $\angle ABC+\angle ACB=90^\circ=\angle ACB+\angle DCE$，又 $\angle A=\angle DEC=90^\circ$

$\therefore \triangle ABC\sim\triangle ECD$($AA$ 相似)

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EC}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{DC}}\Rightarrow\frac{3}{\overline{EC}}=\frac{4}{\overline{DE}}=\frac{5}{12}\Rightarrow\overline{EC}=\frac{36}{5}，\overline{DE}=\frac{48}{5}$$

可得 $x=\dfrac{\overline{AF}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{DE}}{\overline{AB}}=\dfrac{\frac{48}{5}}{3}=\dfrac{16}{5}$

$$y=\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AC}+\overline{CE}}{\overline{AC}}=\frac{4+\frac{36}{5}}{4}=\frac{14}{5}$$

數對 $(x,y)=\left(\dfrac{16}{5},\dfrac{14}{5}\right)$

故選(4)。

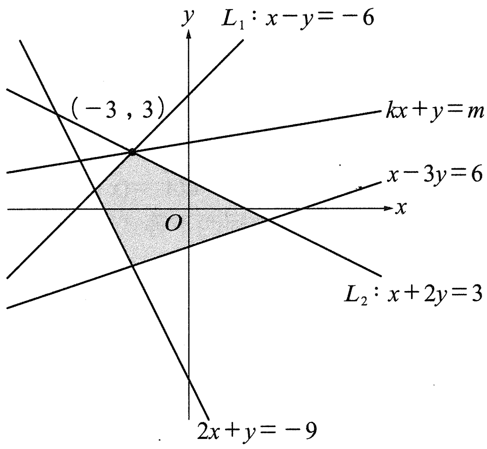
6. (1)

難易度：難

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：能使用幾何意義求取最大值

解析：設 $kx+y=m$，表斜率為 $-k$ 的直線，由於 y 係數為正且直線在 $(-3,3)$ 有唯一最大值，故直線斜率 $-k$ 在 L_1 與 L_2 的斜率之間



$-\dfrac{1}{2}<-k<1$

$\therefore -1<k<\dfrac{1}{2}$

故選(1)。

二、多選題

7. (2)(3)(4)

難易度：中

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：虛根成對，勘根定理

解析：(1) ╳：由虛根成對定理可得另一根為 $2-i$

(2) ○：$f(0)<0$，$f(6)>0$，又已經有兩複數根　$\therefore$ 區間 $(0,6)$ 內恰有 1 個正實根

(3) ○：$ax^3+bx^2+cx+d=2019x+108$ 為實係數三次方程式，必有實數根　$\therefore$ 兩圖形必有交點

(4) ○：$f(x^2)=(x-1)(x-2)$ 為實係數六次方程式，恰有 6 個根

(5) ╳：令正實根為 r，則 $f(x)=\dfrac{1}{2}[x-(2+i)][x-(2-i)](x-r)$

$$=\frac{1}{2}(x^2-4x+5)(x-r)$$

$\because f(6)=\dfrac{1}{2}[36-24+5](6-r)=17$　$\therefore r=4$

利用 $f(0)=d$ 或展開 $f(x)$ 或利用三根積都可得到 $d=-10$

故選(2)(3)(4)。

8. (1)(4)(5)

難易度：中

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：直線的斜率與截距

解析：由三直線 L_1、L_2、L_3 之方程式知 L_1 的斜率 $-\dfrac{1}{a}$，L_2 的斜率 $-\dfrac{1}{c}$，L_3 的斜率 $-e$

(1) ○：令 $x=0$，由 L_1 與 y 軸的交點知 $y=-\dfrac{b}{a}<0 \Rightarrow ab>0$

(2) ╳：令 $x=0$，由 L_2 與 y 軸的交點知 $y=-\dfrac{d}{c}>0 \Rightarrow cd<0$

(3) ╳：由 L_1、L_2 的傾斜程度知 $-\dfrac{1}{a}>-\dfrac{1}{c}>0 \Rightarrow a>c$

(4) ○：由 L_1、L_3 的方程式知，L_1 與 y 軸的交點為 $\left(0\ ,-\dfrac{b}{a}\right)$，$L_3$ 與 y 軸的交點為 $(0\ ,-f)$

因此 $-\dfrac{b}{a}=-f \Rightarrow b=af$

(5) ○：由於 L_1 與 L_3 垂直，L_1 與 L_3 的斜率相乘等於 $-1 \Rightarrow -\dfrac{1}{a}\cdot(-e)=-1 \Rightarrow a+e=0$

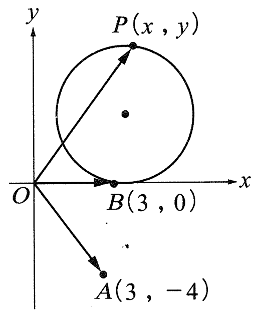
故選(1)(4)(5)。

9. (3)(4)

難易度：中

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：平面向量的內積



解析：(1) ╳：$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=(4\ ,6)\cdot(3\ ,-4)=-12$

(2) ╳：$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13}$，$|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OP}|\,|\overrightarrow{OA}|}=\frac{-12}{2\sqrt{13}\cdot 5}=\frac{-6}{5\sqrt{13}}$$

(3) ○：$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=(x\ ,y)\cdot(3\ ,-4)=3x-4y$

由柯西不等式知 $[(x-4)^2+(y-3)^2](3^2+(-4)^2)$

$\geq[3(x-4)-4(y-3)]^2$

$\Rightarrow 9\cdot 25\geq(3x-4y)^2$

$\Rightarrow 15\geq 3x-4y\geq -15$

(4) ○：$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}=(x\ ,y)\cdot(3\ ,0)=5 \Rightarrow 3x=5 \Rightarrow x=\dfrac{5}{3}$

代入圓 C：$(x-4)^2+(y-3)^2=9$，得 $y=3\pm\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

故 P 有兩解 $\left(\dfrac{5}{3}\ ,\ 3\pm\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\right)$

(5) ╳：$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}=(x\ ,y)\cdot(3\ ,0)=3x$，因此最大值發生在圓 $(x-4)^2+(y-3)^2=9$ 上 x 坐標最大的點由方程式知即為 $(7\ ,3)$，故 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}$ 的最大值為 $3\cdot 7=21$

故選(3)(4)。

10. (3)(4)(5)

難易度：中

出處：第四冊第一章〈空間向量〉

目標：能利用長度和法向量標定點的關係及坐標

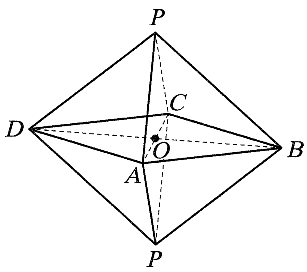
解析：設 P 為頂點

$\overline{AB}=\sqrt{(3-4)^2+(0+4)^2+(3-2)^2}=3\sqrt{2}=\overline{AP}$

$\overline{AC}=\sqrt{4^2+(-4)^2+2^2}=6$

$\overline{BC}=\sqrt{3^2+0^2+3^2}=3\sqrt{2}$

作圖如右



A，B，C 的位置如右圖

O 為 A，C 中點，亦為 B，D 中點

得 $O(2,-2,1)$，$D(1,-4,-1)$

又 $\overline{OP}=\sqrt{\overline{AP}^2-\overline{AO}^2}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2-3^2}=3=|\overrightarrow{OP}|$

$\overrightarrow{OP}\,//\,\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$，又 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left(\begin{vmatrix}4 & 1\\ 4 & -2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & -1\\ -2 & -4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1 & 4\\ -4 & 4\end{vmatrix}\right)=-6(2,1,-2)$

取 $\overrightarrow{OP}=\pm(2,1,-2)$

得 P 點坐標為 $(0,-3,3)$ 或 $(4,-1,-1)$

故選(3)(4)(5)。

11. (2)(3)

難易度：中

出處：第四冊第四章〈二次曲線〉

目標：能判讀基本方程式的圖形和 a，b，c 的關係

解析：$\because$有相同的焦點　$\therefore$方向要相同，中心要相同，c 值要一樣

$\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 為左右型的橢圓，中心為 $(0,0)$，$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5-3}=\sqrt{2}$

(1) ╳：沒有圖形

(2) ○：$\dfrac{x^2}{5-\sqrt{17}}-\dfrac{y^2}{\sqrt{17}-3}=1$ 為左右型的雙曲線，中心為 $(0,0)$，$c=\sqrt{(5-\sqrt{17})+(\sqrt{17}-3)}=\sqrt{2}$

(3) ○：左右型的橢圓，中心為 $(0,0)$，$c=\sqrt{(5+\sqrt{3})-(3+\sqrt{3})}=\sqrt{2}$

(4) ╳：$\dfrac{y^2}{5-\sqrt{15}}-\dfrac{x^2}{\sqrt{15}-3}=1$ 為上下型的雙曲線

(5) ╳：$\dfrac{y^2}{5+\sqrt{5}}+\dfrac{x^2}{3+\sqrt{5}}=1$ 為上下型的橢圓

故選(2)(3)。

12. (1)(2)(3)(4)(5)

難易度：中

出處：第四冊第二章〈空間中的平面與直線〉

目標：能由方程式判斷平面和直線間的關係

解析：(1) ○：$\because L$ 的方向向量 $//\,(1,2,-1)\times(1,1,1)=(3,-2,-1)$

取 L 的方向向量為 $(3,-2,-1)$，又平面法向量為 $(4,5,2)$

方向向量和法向量垂直，故直線和平面平行或直線包含於平面

自找任一點 $A(1,0,-2)\in L$，$A(1,0,-2)$ 代入 $4x+5y+2z=0$ (合)

A 亦在平面上故 L 包含於平面

(2) ○：L_1：$\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$，$L_2$：$\dfrac{x-3}{-3}=\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z-2}{1}$

$\because L_1$ 的方向向量$(-2,2,-1)$ ∦ L_2 的方向向量 $(-3,4,1)$

$\therefore L_1$ ∦ L_2

L_1 和 L_2 皆通過點 $(3,-3,2)$

故 L_1 和 L_2 交於一點 $(3,-3,2)$

(3) ○：L_1：$\dfrac{x-1}{\frac{1}{3}}=\dfrac{y-2}{\frac{1}{3}}=\dfrac{z-6}{\frac{1}{2}}$

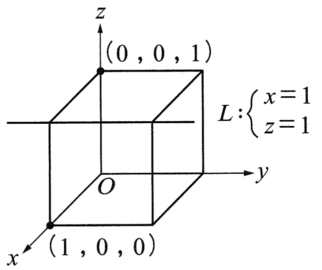
L_1 的方向向量 $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$ // L_2 的方向向量 $(2,2,3)$

即 $L_1 // L_2$

L_1 通過點 $(1,2,6)$ 但點 $(1,2,6)$ 不在 L_2 上

$\therefore L_1$ 和 L_2 平行不重合

(4) ○：直接作圖



(5) ○：L_1 的方向向量 $(-1,2,1)$ // L_2 的方向向量 $(-2,4,2)$

$\therefore L_1 // L_2$

又 L_1 過點 $(2,0,1)$

代入 L_2 得 $s=\frac{1}{2}$ 表 $(2,0,1)$ 亦在 L_2 上

故 L_1 和 L_2 重合

故選(1)(2)(3)(4)(5)。

第貳部分：選填題

A. 24

難易度：易

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：利用綜合除法求餘數

解析：

$$\begin{array}{ccccccccccc|c} 1 & + & 6 & + & 0 & + & 52 & + & a & + & 20 & -7 \\ & - & 7 & + & 7 & - & 49 & - & 21 & + & (-7a+147) & \\ \hline 1 & - & 1 & + & 7 & + & 3 & + & (a-21) & + & (167-7a) & \end{array}$$

$\therefore 167-7a=-1 \Rightarrow 7a=168 \Rightarrow a=24$。

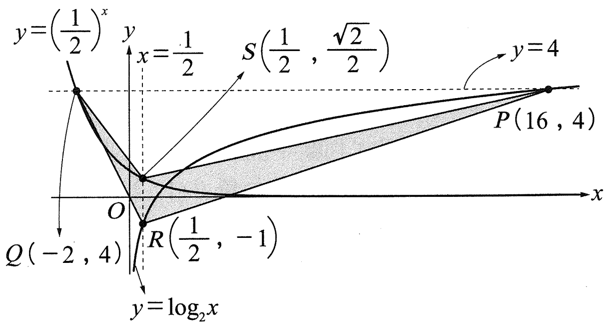
B. 15

難易度：中

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：指對數的圖形

解析：作圖如右



可得 $P(16,4)$，$Q(-2,4)$，$R\left(\frac{1}{2},-1\right)$，

$S\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

四邊形 $PRQS$ 面積

$=\triangle PRQ-\triangle PSQ$

$=\frac{1}{2}\times18\times5-\frac{1}{2}\times18\times\left(4-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=9\times\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\approx 9\times1.707=15.363\approx 15$ 平方單位。

C. 84

難易度：易

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：標準化數據

解析：由題意知小強的標準化整數分數輸小美 1 分

$\therefore$ 小強標準化整數分數為 $3-1=2$，得未四捨五入前的標準化分數 $y \Rightarrow 1.5 \leq y < 2.5$

令小強段考成績為 x 分，$y=\dfrac{x-72}{8}$

則 $1.5 \leq \dfrac{x-72}{8} < 2.5 \Rightarrow 84 \leq x < 92$

故小強該次段考數學成績最低為 84 分。

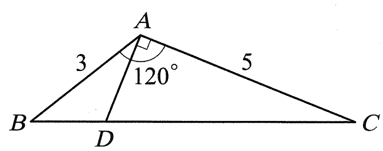
D. $\dfrac{70}{13}$

難易度：中

出處：第三冊第一章〈三角〉

目標：三角形的面積公式、餘弦定理

解析：由餘弦定理 $\cos A=\dfrac{3^2+5^2-7^2}{2\cdot3\cdot5}=-\dfrac{1}{2}$，



故得 $\angle BAC=120^\circ$，又 $\angle CAD=3\angle BAD$

$\therefore \angle CAD=90^\circ$ 且 $\angle BAD=30^\circ$，作圖如右

又 $\triangle ABC$ 的面積 $=\triangle ABD$ 的面積 $+\triangle ACD$ 的面積

利用面積公式得 $\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot5\cdot\sin120^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot\overline{AD}\cdot\sin30^\circ+\dfrac{1}{2}\cdot\overline{AD}\cdot5\cdot\sin90^\circ \Rightarrow \overline{AD}=\dfrac{15\sqrt{3}}{13}$

由畢氏定理知 $\overline{CD}=\sqrt{5^2+\left(\dfrac{15\sqrt{3}}{13}\right)^2}=\dfrac{70}{13}$。

E. 60

難易度：中

出處：第四冊第二章〈空間中的直線與平面〉

目標：三元一次聯立方程式

解析：由資訊(1)列式得 $\dfrac{Y}{X+Y}=0.9375$，由資訊(2)列式得 $\dfrac{Y}{Y+Z}=0.625$，再加上 $X+Y+Z=1$ 解聯立

$$\Rightarrow \begin{cases} Y=0.9375(X+Y) \\ Y=0.625(Y+Z) \\ X+Y+Z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X=0.04=4\ \% \\ Y=0.6=60\ \% \\ Z=0.36=36\ \% \end{cases}$$

故使用傳統市話也有使用手機的人口比例 $Y=60\ \%$。

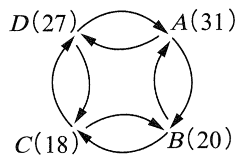
F. 13

難易度：中

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉、第一冊第一章〈數與式〉

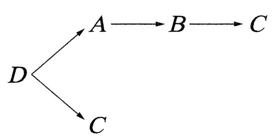
目標：用樹狀圖計數或求絕對值的極值

解析：平均每處有 $\dfrac{31+27+18+20}{4}=24$ 個



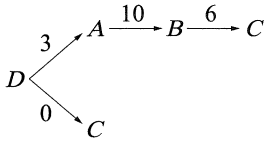
$\because$ 要求搬動次數最少　$\therefore$ 應該從多餘處先搬運

(1)



各法分別搬動 19，17，15，13 次

例如：



上圖共搬 $3+10+6=19$ 次

(2) $\begin{tikzcd} & B \arrow[r] & C \\ A \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & D \arrow[r] & C \end{tikzcd}$ 各法皆搬動 13 次

故至少搬動 13 次

〈另解〉

設先從 A 搬 x 塊到 B 共搬 $|x|$ 次 (x 若為負，則表方向相反)

再從 B 搬 $(20+x)-24$ 塊到 C 共搬 $|(20+x)-24|=|x-4|$ 次

再從 C 搬 $18+(x-4)-24$ 塊到 D 共搬 $|x-10|$ 次

再從 D 搬 $27+(x-10)-24$ 塊到 A 共搬 $|x-7|$ 次

搬動次數 $=|x|+|x-4|+|x-7|+|x-10|$

當 $4\le x\le 7$ 時最小值為 $4+0+3+6=13$

故至少搬動 13 次。

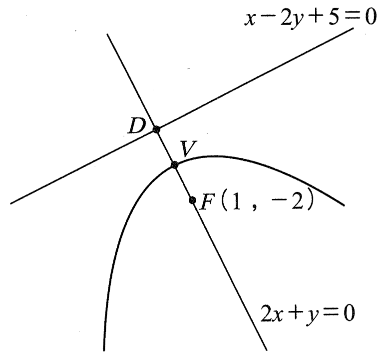
G. $(0\ ,0)$

難易度：中

出處：第四冊第四章〈二次曲線〉

目標：能知拋物線的定義

解析：作圖如右



由定義知準線：$x-2y+5=0$

$\because$ 對稱軸垂直準線，且過焦點 $F(1\ ,-2)$

$\therefore$ 對稱軸為 $2x+y=0$

對稱軸和準線交於 D

由 $\begin{cases} x-2y+5=0 \\ 2x+y=0 \end{cases}$ 得 $D(-1\ ,2)$

頂點 V 為 $F(1\ ,-2)$ 和 $D(-1\ ,2)$ 的中點

得 $V(0\ ,0)$。

H. $\dfrac{4}{7}$

難易度：中

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：能用轉移矩陣求重複試驗的穩定狀態

解析：設穩定狀態抽中紅球機率為 x，則抽中白球機率為 $1-x$

又紅球白球的轉移矩陣為 $\begin{array}{cl} \begin{matrix} \text{紅球} & \text{白球} \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} & \begin{matrix} \text{紅球} \\ \text{白球} \end{matrix} \end{array}$

$\because$ 達成穩定狀態，可得

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{2}{3}(1-x)=x \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}(1-x)=1-x \end{cases} \Rightarrow x=\frac{4}{7}$$

故穩定狀態時取出紅球機率為 $\dfrac{4}{7}$。