重點說明(一)

1.數列:有限數列與無限數列

 級數:有限級數 $S\_{n}=\sum\_{k=1}^{n}a\_{k}=a\_{1}+a\_{2}+…+a\_{n}$

 無限(無窮)級數 S $=\sum\_{k=1}^{\infty }a\_{k}=a\_{1}+a\_{2}+…$

符號介紹: ∑讀作sigma, 為連加符號

2.等差數列與級數

 公差d=後項-前項

 $a\_{n}=a\_{1}+\left(n-1\right)d$

 $S\_{n}=\sum\_{k=1}^{n}a\_{k}=a\_{1}+a\_{2}+…+a\_{n}=\frac{n}{2}(a\_{1}$+$a\_{n}$)=$ \frac{n}{2}[2a\_{1}$+$\left(n-1\right)d$]

**練習題**

例1:費氏數列是以兩個1開始，接下來各項均為前二項之和，例如:1,1,2,3,5,8,13…,試問在費氏數列各項中的個位數字，最後出現的阿拉伯數字為

例2：1＋11＋111＋……＋111111…1之和的最後4位數為

 2010位數

例3： a1,a2,……,an與b1,b2,……,bn為兩等差數列，其首n項和的比為
（7n＋2）：（n＋3），則這兩個數列第5項的比為

例4：不大於300的自然數中，能被3或5整除的共有 個，其總和為

例5： 請問有 種不相似的三角形，它們三內角是相異的正整數且成等差數列?

例6：甲第一日走1公里，第二日走2公里，如此每日增加1公里進行，甲出發後經5日，乙由同地同向每日走12公里。試問:

1. 幾日後兩人會相會? 日
2. 若二地相距135公里，則誰會先到?

例7：一等差數列共有150項，已知此級數前30項的和為120，第31項到60項的和為300，求此級數的和為

例8：若有限級數中，每項均為3位數且具有下列性質:每一項的十位數字與個位數字分別是下一項的百位數字與十位數字，最後一項的十位數字與個位數字是第一項的百位數字與十位數字，例如:247，475，756，…，824，就是此種數列。用S表示這種數列各項的和，請問下列哪個數字是一定可以整除S的最大質數?

(A) 3 (B) 7 (C)13 (D)37 (E)43

例9：已知甲、乙二等差數列的項數均為6，甲、乙的公差相等，且甲級數的和與乙級數的和相差1.5，比較甲與乙的首項，較小的首項為1，請問較大的首項為

例10: 計算$1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+…+\frac{1}{1+2+3+4+...+100}$ =

重點說明(二)

等比數列與級數

1. 公比r=後項/前項

2. $a\_{n}=a\_{1}r^{n-1}$

3. $S\_{n}=\sum\_{k=1}^{n}a\_{k}=a\_{1}+a\_{2}+…+a\_{n}=\left\{\begin{array}{c}n·a\_{1 } 若r=1\\\frac{a\_{1}(1-r^{n})}{1-r} 若r<1\\\frac{a\_{1}(r^{n}-1)}{r-1} 若r>1\end{array}\right.$

4. 無窮等比級數 (r≠0，a、r$\in R$)

 S $=\sum\_{k=1}^{\infty }a\_{k}$=$a\_{1}+a\_{1}r+a\_{1}r^{2}+…=a\_{1}\sum\_{k=1}^{\infty }r^{k}=\left\{\begin{array}{c}當\left|r\right|<1，收斂為S=\frac{a\_{1}}{1-r}\\當\left|r\right|\geq 1，發散為S=\pm \infty \end{array}\right.$

5. 若a、G、b三數成等比數列，則等比中項G=$\pm \sqrt{ab}$ ($G^{2}=ab$)

例如: 1、3、9、27、81....為一個r=3的等比數列，S =$+\infty $

例如: 1、-$ \frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$、$-\frac{1}{8}$、$\frac{1}{16}$....為一個r=-$ \frac{1}{ 2}$的等比數列，S =$ \frac{1}{1-(-\frac{1}{2 })} $= $\frac{2}{3}$

**練習題**

例1: 若$2^{0}+2^{1}+2^{2}+...+2^{n}=63，求n= $

例2：已知a、b為正整數且a$<$b$<$2009，若a、b、2009三數成等比數列，求a=

例3：《複利計算》林老師向銀行辦理儲蓄存款，若年初存入10000元,年底結算得本利和11000元，試問若每年年初均存入10000元，則第四年年底結算得本利和 元

例4：無窮等比級數 S $=2+\frac{2}{7}+\frac{4}{49}+\frac{8}{343}+…$=

例5：若無窮級數0.11+0.0101+0.001001+0.00010001+....，化成最簡分數為$\frac{p}{q}$，求$q-2p$=

例6：無窮級數 $\sum\_{k=1}^{\infty }\frac{2^{k}+3^{k+1}}{5^{k}} $=

例7：在$\frac{1}{2}與\frac{8}{81}$之間插入a、b、c三個正數，使之成為等比數列，請問a+b+c=

例8：設＜$a\_{n}$＞為一整數數列，$a\_{1}=1$，$a\_{m+n}=a\_{m}+a\_{n}+mn$，其中$m，n$均為正整數，則$a\_{12}$=

例9：設＜$a\_{n}$＞為一數列，$n\geq 1$，若$a\_{1}=1$，且對所有$n\geq 1均有3a\_{n+1}-3a\_{n}=1$，求$a\_{2002}$=

例10: 若數列$x\_{1}、x\_{2}、x\_{3}、、、x\_{19}、x\_{20} $滿足 $\frac{x\_{1}}{x\_{1}+1}=\frac{x\_{2}}{x\_{2}+3}=\frac{x\_{3}}{x\_{3}+5}=…=\frac{x\_{20}}{x\_{20}+39}$ $，又x\_{1}+x\_{2}+x\_{3}+…+x\_{19}+x\_{20}=1200，求 x\_{13=}$

解答: PART1

1. 6

2. 9900

3. 65:12

4. 140 21150

5. 59

6. 8 or15日 甲

7. 2400

8. D

9. $\frac{5}{4}$

10. $\frac{200}{101}$

PART 2

1. 5

2. 41

3. 51051

4. $\frac{12}{5}$

5. 25

6. $\frac{31}{6}$

7. $\frac{19}{27}$

8. 78

9. 668

10. 75