

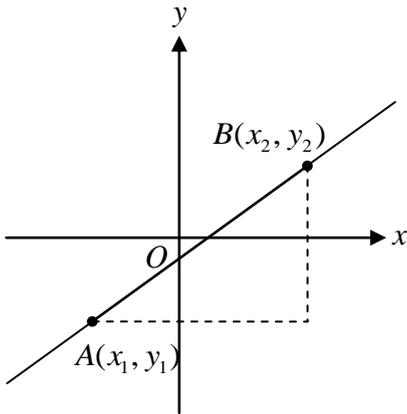
主題：斜率

1、定義斜率：

在坐標平面上，我們利用斜率來表示直線的傾斜程度和方向性。習慣以 m 表示直線斜率，定義的方式有三種：

(1) 已知直線上兩點： $m = \frac{\text{垂直位移}}{\text{水平位移}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underline{\hspace{2cm}} = \tan \theta$ 。

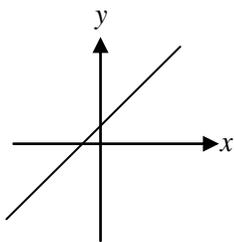
(2) 已知直線方程式：方程式 $y = ax + b \Rightarrow m = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



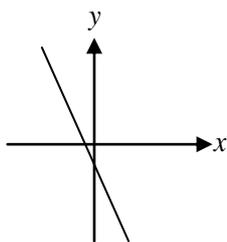
2、直線斜率值的意義：

(1) 正負的意義：

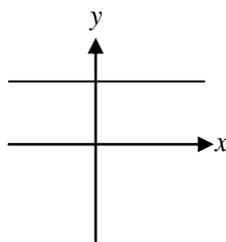
1° 右上升直線 2° 右下降直線 3° 水平線 4° 鉛直線



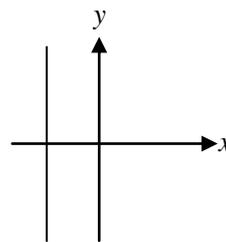
$m \underline{\hspace{1cm}} 0$



$m \underline{\hspace{1cm}} 0$



$m \underline{\hspace{1cm}} 0$



$m \underline{\hspace{2cm}}$

(2) 斜率取絕對值後的意義：

直線越陡 \Leftrightarrow 絕對值越 $\underline{\hspace{2cm}}$

3、直線與斜率的關係：

(1) 每一條直線，若直線有斜率，則斜率值唯一。

(2) 每一條直線未必都有斜率。($\underline{\hspace{2cm}}$ 沒有斜率)

例題 1：

求下列直線 L 的斜率：

(1) 直線 L 過點 $(2,1)$ 、 $(-3,4)$

(2) 直線 L 過點 $(2,1)$ 、 $(2,7)$

(3) 直線 L 過點 $(2,1)$ 、 $(3,1)$

(4) 直線 L 的方程式為 $y = 5x + 1$

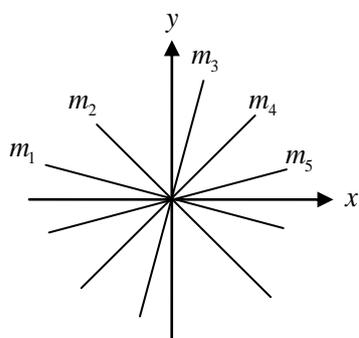
(5) 直線 L 的方程式為 $3x + 2y = 6$

Sol :

例題 2 :

試比較下圖各直線斜率的大小。

Sol :



例題 3 :

平面上三點 $A(-1,3)$ 、 $B(2,-1)$ 、 $C(5,a)$ ，若 A, B, C 三點共線，求 a 值。

Sol :

類題 1 :

求下列直線 L 的斜率：

(1) 直線 L 過點 $(1,2)$ 、 $(-2,-3)$

(2) 直線 L 過點 $(2,2)$ 、 $(3,3)$

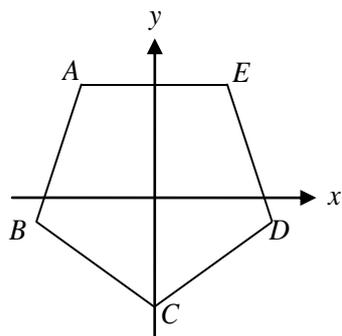
(3) 直線 L 的方程式為 $y = 3$

(4) 直線 L 的方程式為 $3x + 5 = 0$

答：(1) $\frac{5}{3}$ (2) 1 (3) 0 (4) 無意義

類題 2 :

試比較下圖各直線斜率的大小。



Ans : $m_{DE} < m_{BC} < m_{AE} < m_{CD} < m_{AB}$

類題 3 :

若 $f(x) = 338x - 742$, 求 $\frac{f(1123) - f(785)}{1123 - 785}$ 的值。

Ans : 338

類題 4 :

已知 $A(1, a)$ 、 $B(7, 4)$ 、 $C(4, 7)$ 、 $D(b, 3)$ 且 A, B, C, D 四點共線，求 $a + b$ 。

Ans : 18

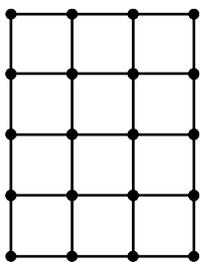
類題 5 :

已知 $A(1, 3)$ 、 $B(1, -2)$ 、 $C(a, b)$ 且 A, B, C 三點共線，求 a 值。

Ans : 1

類題 6 :

下圖中，每個間格均相等。不考慮無斜率的情形之下，試問：連接任兩點所得直線斜率中，斜率的最小值為何？



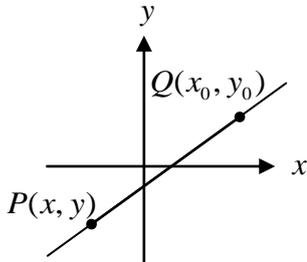
Ans : -4

主題：直線方程式

4、點斜式（ \Rightarrow 已知_____和_____）：

給定直線的 L 斜率 m 及過點 $(x_0, y_0) \Rightarrow$ 方程式 L : _____。

【說明】



5、特殊直線方程式：

(1) 水平線且過點 $(x_0, y_0) \Rightarrow m = \underline{\hspace{2cm}} \Rightarrow$ 方程式 L : _____。

(2) 鉛直線且過點 $(x_0, y_0) \Rightarrow m = \underline{\hspace{2cm}} \Rightarrow$ 方程式 L : _____。

(3) 過原點的直線可假設為 \Rightarrow _____。

※ x 軸方程式：_____

y 軸方程式：_____

例題 1：

已知直線 L 的斜率為 2，且過點 $(3, -1)$ 。求直線 L 的方程式。

Sol：

例題 2：

(1) 已知直線 $L: y - 1 = m(x + 2)$ ，則直線 L 必過哪一點？

(2) 已知直線 $L: mx + 2y - 3m + 4 = 0$ ，則直線 L 必過哪一點？

Sol：

例題 3：

利用下列條件，求出各小題的直線方程式：

(1) 直線斜率 $m = 0$ 且過點 $(1, 2)$

(2) 直線過點 $(2, 3)$ 、 $(2, -2)$

Sol：

6、兩點式 (\Rightarrow 已知 _____):

給定直線 L 上的兩點 (x_0, y_0) 和 (x_1, y_1) , 則

(1) 直線 L 的斜率 = _____ 。

(2) 利用點斜式 $\Rightarrow L$: _____ 。

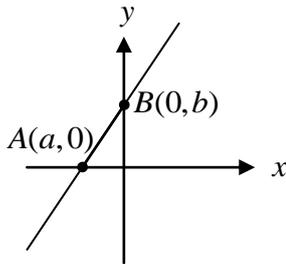
7、定義截距 (表示 _____):

設直線 L 與 x 軸、 y 軸分別交於 $(a, 0)$ 、 $(0, b)$,
則直線 L 之 x 截距為 _____ 與 y 截距為 _____ 。

(1) x 軸截距 a , 表示 L 過點 _____ ; y 軸截距 b , 表示 L 過點 _____

(2) 過原點之直線 L 的 x 截距為 _____ 與 y 截距為 _____ 。

(3) 鉛直線沒有 _____ 截距 ; 水平線沒有 _____ 截距 。



※注意 : a, b 有正負 \Rightarrow 截距有正負 。

8、斜截式 (\Rightarrow 已知 _____ 和 _____):

(1) 給定直線 L 的斜率 m 及 x 截距 $a \Rightarrow$ 方程式 L : _____ 。

(2) 給定直線 L 的斜率 m 及 y 截距 $b \Rightarrow$ 方程式 L : _____ 。

例題 4 :

利用下列條件 , 求出各小題的直線方程式 :

(1) 直線過點 $(1, 2)$ 、 $(3, 5)$

(2) 直線過點 $(2, 1)$ 、 $(-1, 7)$

(3) 直線斜率 $m = -3$ 且 y 截距 -3

(4) 直線過點 $(-4, 0)$ 、 $(0, 2)$

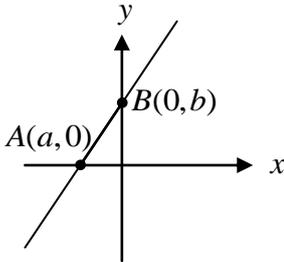
Sol :

9、截距式 (\Rightarrow 已知_____和_____):

給定 x 截距 a 及 y 截距 $b \Rightarrow$ 方程式 L : _____。

※注意此直線表示法不含_____、_____、_____。

【說明】



10、截距式的應用：

設直線方程式 $L: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ，此時

(1) $\triangle ABC$ 的面積為_____。

(2) $\triangle ABC$ 的周長為_____。

例題 5：

求下列直線方程式的 x 截距與 y 截距，並求其與兩軸所夾之三角形面積。

(1) $\frac{x}{4} - \frac{y}{5} = 1$ (2) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 2$ (3) $2x + 3y = 6$

Sol：

例題 6：

已知直線 L 過點 $(2, 6)$ 且 x, y 截距和為 1，求直線 L 的方程式。

Sol：

例題 7：

已知直線 L 在兩軸截距相等且過點 $(-2, 3)$ ，求直線 L 的方程式。

Sol：

例題 8 :

直線 L 過點 $(-4,1)$ 與兩坐標軸所為之三角形面積為 1，求直線 L 的方程式。

Sol :

類題 1 :

已知直線 L 的斜率為 1，且過點 $(-2,-3)$ 。求直線 L 的方程式。

Ans : $y+3=-(x+2)$

類題 2 :

直線 $mx-y+2m+3=0$ 恆過哪一定點？

Ans : $(-2,3)$

類題 3 :

利用下列條件，求出各小題的直線方程式：

(1) 直線過點 $(-1,3)$ 且平行 x 軸

(2) 直線過點 $(-1,3)$ 且平行 y 軸

(3) 直線過點 $(1,2)$ 、 $(0,3)$

(4) 直線斜率 $m=2$ 且 x 截距 0

(5) 直線過點 $(1,0)$ 、 $(0,-1)$

Ans : (1) $y=3$ (2) $x=-1$ (3) $x+y-3=0$ (4) $y=2x$ (5) $x-y=1$

類題 4 :

利用下列條件，求出各小題的直線方程式：

(1) 直線的 x 截距 3， y 截距 -2

(2) 直線過點 $(-3,8)$ ，且 x 截距比 y 截距小 1

(3) 直線過點 $(-3,1)$ ，且 x, y 截距的絕對值相等

(4) 直線過點 $(-2,2)$ 且與兩軸所圍成的面積是 9 且直線不通過第四象限

Ans : (1) $2x-3y=6$ (2) $2x+y-2=0$ 或 $4x+3y-12=0$

(3) $x+y+2=0$ 或 $x-y+4=0$ 或 $x+3y=0$ (4) $x-2y+6=0, 2x-y+6=0$

主題：平行與垂直

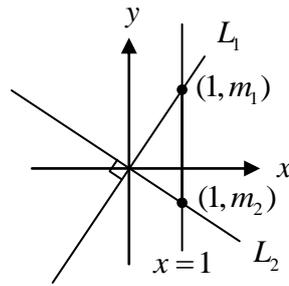
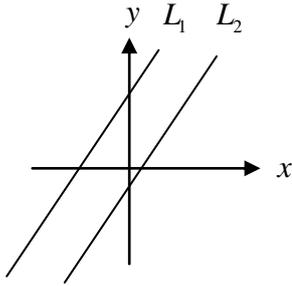
【型一】已知斜率

設直線 L_1 的斜率為 m_1 ；直線 L_2 的直線斜率為 m_2

(1)若 $L_1 // L_2 \Rightarrow$ _____。

(2)若 $L_1 \perp L_2 \Rightarrow$ _____。

【說明】



※三角形的四心：

(1)內心：三角形_____之交點。

(2)外心：三角形_____之交點。

(3)重心：三角形_____之交點。

(4)垂心：三角形_____之交點。

例題 1：

已知 $A(3, -2)$ 、 $B(2, 1)$ 、 $C(-1, a)$ ，且 $\triangle ABC$ 為直角三角形，求 a 值。

Sol：

例題 2：

若三直線 $L_1: 3x - y - 1 = 0$ ， $L_2: x - y + 1 = 0$ ， $L_3: 2x + ky + 1 = 0$ 不能圍成一個三角形，求可能的 k 值。

Sol： ◎不能為成三角形的情形：_____、_____

例題 3 :

已知 $A(-1,3)$ 、 $B(2,6)$ 、 $C(4,-2)$ ，試求

(1)過 A 平行 \overline{BC} 的直線 (2)過 A 垂直 \overline{BC} 的直線 (3) $\triangle ABC$ 之垂心 H 坐標

(4) \overline{AB} 的中垂線 (5) $\triangle ABC$ 之外心 O 坐標

Sol :

【型二】 已知直線方程式

設直線 L_1 的方程式為 $ax+by+c=0$

(1)若 $L_1 // L_2$ ，則 L_2 的直線方程式可假設為_____。

(2)若 $L_1 \perp L_2$ ，則 L_2 的直線方程式可假設為_____。

【說明】

例題 4 :

已知 $L:3x+2y=4$ ，另一條直線 L_1 過點 $(2,-1)$ ，求下列各條件 L_1 的方程式：

(1) $L_1 // L$ (2) $L_1 \perp L$

Sol :

例題 5 :

已知平行四邊形的兩邊在直線 $2x+3y=7$ 、 $x-3y+4=0$ 上，且其中一頂點為 $(5,5)$ 。求另外兩邊所在的直線方程式。

Sol :

例題 6 :

$A(3,1)$ 、 $B(-1,3)$ 為兩定點，且 P 在 $x+3y=1$ 上，使得 $\overline{PA}=\overline{PB}$ ，求 P 點。

Sol :

類題 1 :

已知三角形 $\triangle ABC$ 的三頂點坐標 $A(1,5)$ 、 $B(0,2)$ 、 $C(2,2)$ ，求
(1) $\triangle ABC$ 的重心 (2)過 A 的垂線 (3) $\triangle ABC$ 的垂心 (4) $\triangle ABC$ 的外心

Ans : (1) $(1,3)$ (2) $x=1$ (3) $(1, \frac{7}{3})$ (4) $(1, \frac{10}{3})$

類題 2 :

已知 $L:2x-3y=4$ 且 $P(1,1)$ ，

(1)若直線 L_1 平行 L 且過點 P ，求 L_1 的方程式。

(2)若直線 L_2 垂直 L 且過點 P ，求 L_2 的方程式。

Ans : (1) $2x-3y=-1$ (2) $3x+2y=5$

類題 3 :

已知平行四邊形的兩邊在直線 $x+y=2$ 、 $3x+y=6$ 上，且其中一頂點為 $(4,6)$ 。求另外兩邊所在的直線方程式。

Ans : $x+y=10$ 、 $3x+y=18$

類題 4 :

若三直線 $L_1:x-2y+3=0$ 、 $L_2:2x+3y=0$ 、 $L_3:ax-y-1=0$ 不能圍成一個三角形，求可能的 k 值。

Ans : $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{-2}{3}$ 、 $\frac{-13}{9}$

類題 5 :

$A(1,2)$ 、 $B(3,4)$ 為兩定點，且 P 在 $x+2y=3$ 上，使得 $\overline{PA}=\overline{PB}$ ，求 P 點。

Ans : $(7,-2)$

主題：二元一次聯立方程式

$$\text{二元一次聯立方程式 } \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases},$$

幾何意義	圖形	解的個數	代數判別式
平行			
重合			
交於一點			

【說明】

例題 1：

$$\text{解 } \begin{cases} 3x - 4y = 3 \\ 5x + 2y = 4 \end{cases} \text{ 的 } x, y \text{ 值。}$$

Sol：

例題 2：

$$\text{設兩方程組 } \begin{cases} ax + by = 13 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases} \text{ 和 } \begin{cases} 6ax + 5by = 68 \\ 3x - 4y = 11 \end{cases} \text{ 有相同的解，求 } a, b \text{ 值。}$$

Sol：

例題 3 :

試分別求出 k 值，使得兩直線關係 $\begin{cases} (2k+1)x+(4k+3)y=3k+1 \\ (k+2)x+(3k+4)y=1-k \end{cases}$ 為

(1)兩平行線 (2)兩直線恰交於一點 (3)兩重合直線

Sol :

例題 4 :

設 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ，若 $\begin{cases} (\alpha+2)x+6y=10 \\ 2x-(\alpha+\beta)y=15 \end{cases}$ 為無限多組解，求 α, β 值。

Sol :

類題 1 :

$L_1: ax-6y=5a-3$ ， $L_2: 2x+(a-7)y=29-7a$ ，試就 a 值討論此兩直線之相交情形。

Ans : (1) $a \neq 3, 4$ 時， L_1 與 L_2 恰有一交點 (2) $a = 4$ 時， L_1 與 L_2 平行

(3) $a = 3$ 時， L_1 與 L_2 重合。

類題 2 :

試分別求出 k 之值使得方程組 $\begin{cases} (2k+1)x+(4k+3)y=3k+1 \\ (k+2)x+(3k+4)y=1-k \end{cases}$ 為

(1)兩平行線 (2)兩直線恰交於一點 (3)兩重合直線。

Ans : (1) $k = 1$ (2) $k = -1$ (3) $k \neq \pm 1$

主題：對稱

1. 點對稱

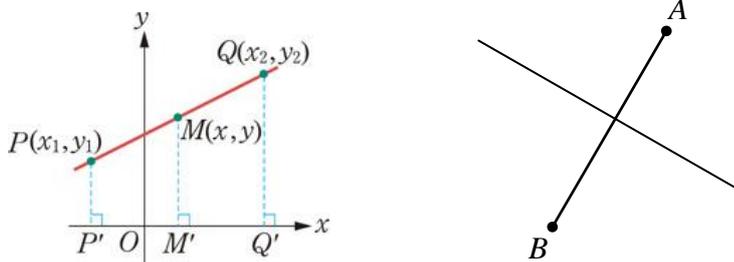
(1) 在坐標平面上，若 \overline{PQ} 的中點為 M ，則稱 P 、 Q 兩點對於 M 對稱。也可以說， P 、 Q 互稱為對於 M 的對稱點。

(2) 設 $P(x_1, y_1)$ 與 $Q(x_2, y_2)$ 為坐標平面上相異兩點，

則 \overline{PQ} 的中點坐標為 _____。

2. 線對稱

設 L 是一直線， A 、 B 為相異兩點，若直線 L 是 \overline{AB} 的中垂線（即垂直平分線），則稱 A 、 B 兩點對於直線 L 對稱，也可以說 A 、 B 兩點互稱為對於直線 L 的對稱點。



例題 1：

已知 $A(6,0)$ ， $B(-2,10)$ ，求 \overline{AB} 的中垂線方程式。

Sol：

例題 2 :

已知坐標平面上平行四邊形 $ABCD$ 的三頂點為 $A(5,1)$, $B(1,-5)$, $C(-1,2)$, 求第四個頂點 D 之坐標。

Sol :

例題 3 :

求點 $A(2,5)$ 關於直線 $L: x + y - 5 = 0$ 的對稱點坐標。

Sol :

類題 1 :

求點 $P(5,-2)$ 對於原點的對稱點坐標。

Ans : $(-5,2)$

類題 2 :

求點 $A(3,1)$ 關於直線 $L: x + 2y = 0$ 的對稱點坐標。

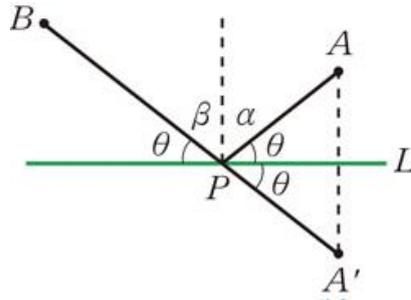
Ans : $(1,-3)$

主題：反射

如果一條光線從 A 點射到直線 L 上一點 P ，反射經過 B 點，則由入射角等於反射角知道：故入射光線與直線 L 所夾的銳角等於反射光線與直線 L 所夾的銳角。

※今過 A 點作 L 的垂線與直線 BP 交於一點 A' ，則 L 就是 $\overline{AA'}$ 的中垂線，

$\Rightarrow A'$ 是 A 點對於直線 L 的對稱點。

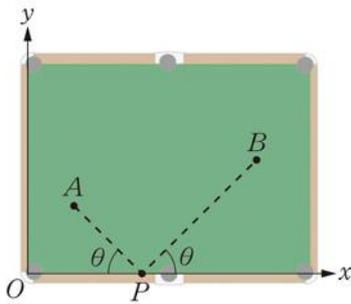


例題 1：

阿三哥玩撞球，以球檯兩鄰邊為坐標軸，如右圖，球從 $A(2, 3)$ 點打出去，碰上檯邊 P 點再折向撞擊 B 球， B 球的位置是 $B(10, 5)$ ，試求：

- (1) P 點所在位置的坐標。
- (2) 該球所行的距離 $\overline{AP} + \overline{PB}$ 。

Sol：



例題 2：

已知 $A(3,5)$ 、 $B(6,10)$ 且 P 為 x 軸上的一點，試求 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 的最小值。

Sol：

類題：

有一個農夫從住家 $A(-5,4)$ 處，牽著一隻牛到河邊（ x 軸） P 處喝水，然後再牽往田裡 $B(7,1)$ 處工作。請問： P 點的坐標為何，才使農夫所走的路徑 $\overline{AP} + \overline{PB}$ 為最短？農夫所走的最短路徑是多少？

Ans：13

主題：二元一次不等式

1、二元一次不等式的幾何意義

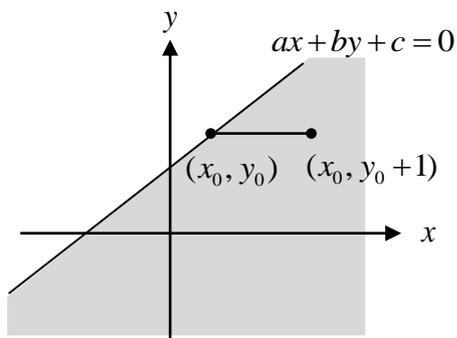
$ax+by+c=0$ (其中 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 且 a, b 不全為 0) 的解形成一條直線 L ，此直線方程式就是 $ax+by+c=0$ 的圖形。而此直線將平面分成兩的半平面，其中一個半平面的點滿足 $ax+by+c > 0$ ；另一個半平面的點滿足 $ax+by+c < 0$ 。

※判別式

$$(1) x \text{ 的係數：} \begin{cases} a > 0: \begin{cases} ax+by+c > 0 \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}} \\ ax+by+c < 0 \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}} \end{cases} \\ a < 0: \begin{cases} ax+by+c > 0 \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}} \\ ax+by+c < 0 \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}} \end{cases} \end{cases}$$

$$(2) y \text{ 的係數：} \begin{cases} b > 0: \begin{cases} ax+by+c > 0 \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}} \\ ax+by+c < 0 \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}} \end{cases} \\ b < 0: \begin{cases} ax+by+c > 0 \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}} \\ ax+by+c < 0 \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}} \end{cases} \end{cases}$$

【說明】



<<結論>> (1) $a > 0$ ：右+左-； $a < 0$ ：右-左+
 (2) $b > 0$ ：上+下-； $b < 0$ ：上-下+

例題 1：

在坐標平面上，作圖表示不等式 $2x - 3y \leq 6$ 的解集合。

Sol：

例題 2：

在坐標平面上，作圖表示滿足不等式 $\begin{cases} x + y \leq 10 \\ x + 4y \leq 20 \end{cases}$ 的解集合。

Sol：

例題 3：

在坐標平面上，作圖表示滿足不等式 $\begin{cases} 2x + y \leq 3 \\ 5x - 3y \geq 10 \\ 2x - 5y < 9 \end{cases}$ 的解集合。

Sol：

例題 4：

設 $A(2, t)$ 與 $B(t, -3)$ 兩點在直線 $L: 3x - 4y + 6 = 0$ 的異側，求實數 t 的範圍。

Sol：

例題 5 :

設 $A(5,6)$ 、 $B(-3,0)$ 、 $C(2,-3)$ 為坐標平面上的三個點，則：

(1) 試以聯立不等式表示 ΔABC 的內部 (不含邊界)

(2) 若點 $P(k, 2k-1)$ 為 ΔABC 的內部任一點，則實數 k 的範圍為何？

Sol :

類題 1 :

試求出下列不等式組所表示的圖形，並求其面積：

$$(1) \begin{cases} 3x+4y \geq 12 \\ x-y \geq -3 \\ 6x+y \leq 24 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x-2y-6 \leq 0 \\ 3x+4y-28 \leq 0 \end{cases}$$

Ans : (1) $\frac{21}{2}$ (2) 31

類題 2 :

設 $A(k, 2)$ 與 $B(-4, k)$ 兩點在直線 $L: 4x-3y+12=0$ 的同側，求實數 t 的範圍。

Ans : $-\frac{3}{2} < k < -\frac{4}{3}$

主題：線性規劃

1、一般限制：

解區域須為凸多邊形（通常由一次不等式所形成的可行解區域），求值函數通常為 $ax + by$ 的型式。

2、線性規劃基本方法

(1)幾何法：利用目標函數的幾何意義來找出其最佳解值。

(2)頂點法：將所有的頂點皆代入，以求出最佳解值。

【說明】

3、解線性規劃問題的流程

(1) 先仔細讀題，將題目化為表格，或直接化為限制式與目標函數。

(2) 由限制式繪出可行解區域。

(3) 將可行解區域中的頂點找出。

(4) 由頂點法，求出目標函數的最佳解值。

(5) 要注意是否有整數解的限制。

例題 1：

$$\text{求在條件 } \begin{cases} x + y \geq 5 \\ 2x + 3y \geq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \text{ 的限制下， } 7x + 9y \text{ 的最小值。}$$

Sol：

例題 2：

若 x, y 滿足 $x \geq 0, y \geq 0, 3x + 2y - 12 \leq 0, x + y - 2 \geq 0$ ，則

(1) $x = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $y = \underline{\hspace{2cm}}$ 時， $2x - y + 3$ 有最大值 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) $x = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $y = \underline{\hspace{2cm}}$ 時， $5x + 3y$ 有最小值 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) $x^2 + y^2$ 的最大值是 $\underline{\hspace{2cm}}$ ，最小值是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(4) $\frac{y+2}{2x+1}$ 的最大值是 $\underline{\hspace{2cm}}$ ，最小值是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

Sol：

例題 3：

在 $|x| \leq \frac{1}{2}$ ， $y \geq 0$ ， $|x| + y \leq 1$ 的條件下，求 $3x + 8y$ 的最大值與最小值。

Sol：

例題 4：

老王有田地 10 公畝和資金 110 萬。已知每公畝的田地，種西瓜可淨賺 2 萬元，但需成本 5 萬元；每公畝的田地，種南瓜可淨賺 4 萬元，但需成本 20 萬元。求老王應該將幾公畝的田地拿去種西瓜？幾公畝的田地拿去種南瓜？

Sol：

例題 5：

某工廠用兩種不同原料均可生產同一產品。若採用甲種原料，每噸成本 1000 元，運費 500 元，可得產品 90 公斤，若採用乙種原料，每噸成本 1500 元，運費 400 元，可得產品 100 公斤。今每日預算為成本不得超過 6000 元，運費不超過 2000 元，問此工廠每日最多可生產多少公斤？

Sol：440 公斤

例題 6：

某航空公司想利用 A, B 兩型飛機飛航一新航線，A 型飛機每天可載 50 名乘客，B 型飛機每天可載 80 名乘客；A 型飛機每架需要有 2 名技師維修，B 型飛機每架也需要有 2 名技師維修；A 型飛機每架 4 億元，B 型飛機每架 9 億元。若該航線每日最少需載客 400 名，而基於營運成本考量，最多只能聘用 12 名技師，問該公司要買 A, B 兩型飛機各幾架最為省錢，且又符合需要？

Sol：該公司購買 2 架 A 型，4 架 B 型飛機才合需要

類題 1：

在條件 $\begin{cases} 3x + 2y \leq 6 \\ x + 2y \leq 4 \\ x + y \geq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$ 的限制下，求 $5x + 3y + 1$ 的最大值和最小值。

Ans：最大值 11，最小值 4

類題 2：

某工廠用三種不同原料甲、乙、丙製造二種成品 A、B，每噸 A 需要甲 6 噸，乙 4 噸，丙 12 噸，可得利潤 10 萬元；每噸 B 需要甲 4 噸，乙 6 噸，丙 3 噸，可得利潤 6 萬元，今甲、乙、丙各有 60 噸，問此工廠應該生產 A、B 兩種產品各多少噸才可達到最大利潤？

Ans：A：3 噸，B：8 噸，有最大利潤 78 萬元

類題 3：

某人有樓房一幢，室內面積有 70 坪，欲隔間分租給學生，房間分成兩種，大房間面積 6 坪，可住 4 名學生，月租每人 2000 元；小房間面積 4 坪，可住 2 名學生，月租每人 3000 元；大房間的裝潢費用每間需要 8000 元，小房間每間需要 6000 元，如果某人現有十萬元準備裝潢，則應隔大、小房間各幾間，才可得到最多的月租收入？

Ans：大房間 5 間、小房間 10 間或大房間 2 間、小房間 14 間，月租收入為 100000 元

類題 4：

寶寶寵物食品公司所製造一磅裝的狗食罐頭含有牛肉和穀物兩種成分，每一磅牛肉的成本為 9 元，每一磅穀物的成本為 8 元；一磅的牛肉含有 10 單位的維他命 A 和 12 單位的維他命 D，一磅的穀物含有 6 單位的維他命 A 和 9 單位的維他命 D，而每一磅狗食必須至少含有 8 單位的維他命 A 和 10 單位的維他命 D。請問每磅的狗食中應含有多少牛肉和多少穀物，才能使得成本為最低？又最低成本為多少元？

Ans：牛肉 $\frac{1}{2}$ 磅、穀物 $\frac{1}{2}$ 磅，最低成本 $\frac{17}{2}$ 元

類題 5：

某公司有二座倉庫，第一倉庫有存貨 160 件，第二倉庫有存貨 200 件。今接獲甲地訂購 120 件，乙地訂購 160 件。每件貨品的運費：由第一倉庫運至甲地需 250 元，至乙地需 350 元；由第二倉庫運至甲地需 300 元，至乙地需 375 元。問應如何運送，才能使全部運費最省？此最少之運費為何？

Ans：(1)由第一倉庫運 120 件至甲地運 40 件至乙地，由第二倉庫運 120 件至乙地 (2)89000 元

主題：距離公式

1、點到直線的距離公式：

點 $P(x_0, y_0)$ 到 $L: ax + by + c = 0$ 之距離 $d(P, L) =$ _____。

【說明】

2、兩平行線的距離公式：

兩平行線 $L_1: ax + by + c_1 = 0$ 、 $L_2: ax + by + c_2 = 0$ 之距離

$d(L_1, L_2) =$ _____。

【說明】

例題 1：

求點 $P(2, 1)$ 至 $L: 3x + 4y = 5$ 之距離。

Sol：

例題 2：

求兩平行線 $3x + 4y - 3 = 0$ 與 $6x + 8y = 1$ 之距離。

Sol：

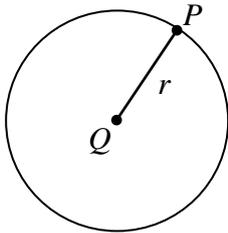
主題：圓方程式

圓的定義：圓上每一點 P 到中心點 O 的距離都等於某一定值。那麼，我們稱此中心點 O 為_____；定值為_____，習慣將此圓記號為_____。

【型一】標準式 \Rightarrow 已知_____和_____

以點 $Q(h, k)$ 為圓心，半徑為 r 的圓方程式為_____。

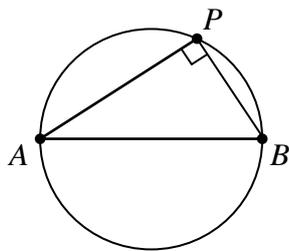
<說明>



【型二】直徑式 \Rightarrow 已知_____

以 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 為直徑兩端點的圓方程式為_____。

<說明>



※圓的性質：(1)直徑所對之圓頂角為_____度

(2)圓內接四邊形之對角和為_____度

【型三】一般式 \Rightarrow 已知_____

將圓方程式 $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ 展開可簡化為_____。

<說明>

※一般式的特徵：(1)_____係數相等 (2)缺_____項

標準式： $(x-h)^2 + (y-k)^2 = l$

乘
開
↓

↑
配
方

一般式： $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$

※一般式的圖形可能是：

(1) $l > 0 \Leftrightarrow$ _____ (圓心 _____、半徑 _____)

(2) $l = 0 \Leftrightarrow$ _____ (坐標 _____)

(3) $l < 0 \Leftrightarrow$ _____

例題 1：

求合乎下列條件之圓方程式：

(1) 圓心 $(-1, 2)$ ，半徑 3

(2) 圓心在 $(2, 0)$ 且過點 $(-3, 1)$

Sol：

(3) 以 $(1, -2)$ 、 $(2, 3)$ 兩點為直徑

(4) 求 $x^2 + y^2 + 18x + 12y - 1 = 0$ 的圓心及半徑

Sol：

例題 2 :

試判斷下列方程式之圖形

(1) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$ (2) $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = 0$ (3) $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 7 = 0$

Sol :

例題 3 :

設圓 $C: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 8$, 試求與圓 C 同心且面積為圓 C 一半之圓方程式。

Sol :

例題 4 :

自圓 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ 外一點 $(3,0)$ 作圓之兩切線, 切點為 A, B , 試求 ΔPAB 之外接圓方程式。

Sol :

例題 5 :

設兩直線 $L_1: x - y = 1$ 、 $L_2: x + 2y = 4$ 之交點為 A ，由 $P(-1, 0)$ 分別作 L_1, L_2 之垂線，垂足點為 B, C ，試求 P, A, B, C 之外接圓方程式。

Sol :

例題 6 :

求過 $(0, 6)$ 、 $(4, -2)$ 、 $(9, 3)$ 之圓方程式。

Sol :

例題 7 :

三直線 $2x + y = 6$ 、 $x - y = 6$ 、 $x + 3y = 18$ 圍成一個三角形，求此三角形的外接圓方程式。

Sol :

類題 1：

求以(2,3)為圓心，半徑為5的圓方程式。

$$\text{Ans : } (x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$$

類題 2：

求圓方程式 $3x^2 + 3y^2 + 18x + 12y - 1 = 0$ 的圓心及半徑。

$$\text{Ans : 圓心}(-3,-2); \text{半徑} \frac{2\sqrt{15}}{3}$$

類題 3：

求以(2,-3)、(1,4)兩點為直徑的圓方程式。

$$\text{Ans : } (x-2)(x-1) + (y+3)(y-4) = 0$$

類題 4：

試求過圓 $C : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$ 內一點 $A(-2,-1)$ 的所有弦的中點軌跡方程式。

$$\text{Ans : } x^2 + y^2 + x + 3y = 0$$

類題 5：

設 $A(-1,3)$ 、 $B(2,4)$ 、 $C(6,2)$ ， $\triangle ABC$ 之外接圓方程式為 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ ，試求 $b + c$ 之值。

$$\text{Ans : } -18$$

類題 6：

設 $A(3,2)$ 、 $B(-1,5)$ ，若點 P 滿足 $\overline{PA} = 2\overline{PB}$ ，則一切 P 點所成圖形的方程式為 $3x^2 + 3y^2 + dx + ey + f = 0$ ，求數對 (d, e, f) 。

$$\text{Ans : } (14, -36, 91)$$

例題 8 :

設 $m \in \mathbb{R}$, $x^2 + y^2 + 2(m+1)x - 2my + 3m^2 - 2 = 0$ 表一圓 , 求

(1) m 的範圍 (2) 求此圓之最大面積 (3) 此圓圓心所在之直線方程式

Sol :

例題 9 :

試就 a 值的範圍討論方程式 $x^2 + y^2 + 2ax - 2ay + a^2 + 4 = 0$ 的圖形。

Sol :

例題 10：

從方程式 $3x^2 + axy + by^2 + cx - 12y + d = 0$ 表圓心 $(-1, e)$ ，半徑 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 的圓，推論 a, b, c, d, e 的值。

Sol：

類題 7：

設 $k \in \mathbb{R}$ ， $x^2 + y^2 - kx - ky + 3k - 5 = 0$ 表一圓，且圓心在直線 $L: x + 3y + 3 = 0$ 上，試求 k 值。

Ans： $\frac{-3}{2}$

類題 8：

設方程式 $axy + bx(x + y - 1) + xy + y^2 = y$ 之圖形表一圓，求數對 (a, b) 。

Ans： $(-2, 1)$

類題 9：

設 $x^2 + y^2 + x + 2y + k = 0$ 表一圓，試求 k 的範圍。

Ans： $k < \frac{5}{4}$

主題：圓系

【型一】已知圓與一線

已知圓 $C: x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ 、直線 $L: ax + by + c = 0$ ，則
過圓 C 與 L 之交點的圓方程式，可假設為_____，
即_____

Pf :

設交點 $A(x_0, y_0)$

$$A \in C \Rightarrow x_0^2 + y_0^2 + d_1x_0 + e_1y_0 + f_1 = 0 \otimes$$

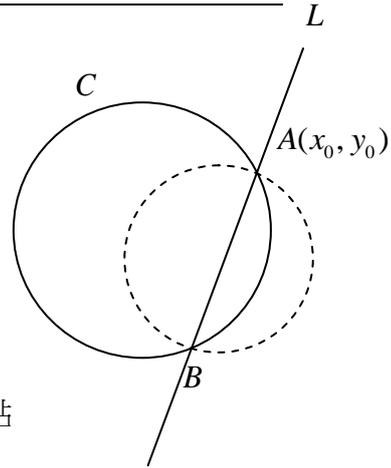
$$A \in L \Rightarrow ax_0 + by_0 + c = 0$$

$$\Rightarrow x_0^2 + y_0^2 + d_1x_0 + e_1y_0 + f_1 +$$

$$k(ax_0 + by_0 + c) = 0$$

$\Rightarrow C + kL = 0$ 必過 A 點，同理可得必過 B 點

$$C + kL = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + (d + ka)x + (e + kb)y + (f + kc) = 0 \Rightarrow \text{表一圓方程式}$$



<推論 1> 經過兩點之圓系假設法

設圓過 $A(1,1)$ 、 $B(3,3)$ ，則

(1) 直線 AB 得方程式為_____

(2) 以 A, B 為直徑的圓方程式為_____

(3) 通過 A, B 兩點的圓，可假設為_____

<推論 2> 根軸的性質

設 P 為兩圓 C_1, C_2 之根軸 L 上的任意點，

則點 P 至兩圓的_____相等。

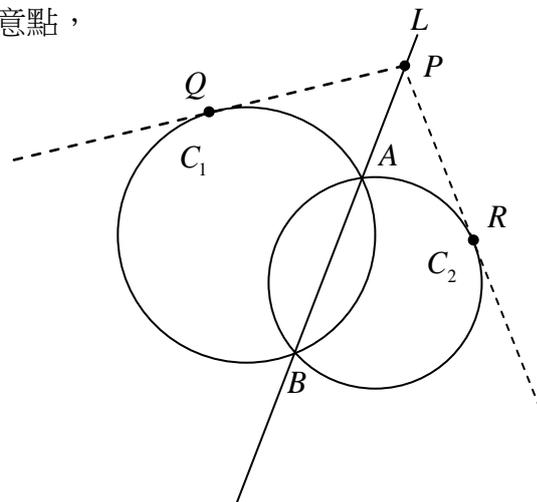
Pf :

由圓幂性質知

$$\overline{PQ} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\overline{PR} = \underline{\hspace{2cm}}$$

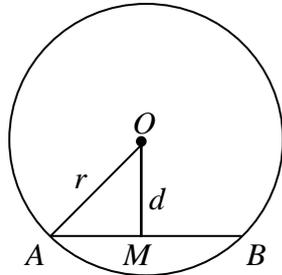
$$\Rightarrow \overline{PQ} = \overline{PR}$$



<推論 3> 弦長及其性質

直線 L 與圓 C 相交於兩點 A, B ，則弦長 $\overline{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$ 且 $\overline{AB} \perp \overline{OM}$ 。

Pf :



※若相切，則 $d(O, L) = \overline{OM} = r$

例題 2 :

求過直線 $L: 2x + y = 2$ 與圓 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$ 之交點，且圓心在 $3x - y = 1$ 之圓方程式。

Sol :

例題 3 :

求圓心在直線 $y = x$ 上且通過原點及 $(-2, 4)$ 的圓方程式。

Sol :

例題 4：

設 $A(-4,1)$ 、 $B(2,3)$ 為圓 C 上的一弦之兩端點，此弦距圓心的長度為 $\sqrt{10}$ ，求圓 C 之方程式。

Sol：

〔法一〕圓系

〔法二〕設圓心

類題 1：

求過兩圓 $C_1: x^2 + y^2 = 4$ 與 $C_2: x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$ 的交點 A, B 且半徑為 4 的圓方程式。

Ans： $(x-3)^2 + y^2 = 16$ 或 $(x+4)^2 + y^2 = 16$

類題 2：

坐標平面上，圓 C 過點 $A(1,4)$ 與 $B(3,0)$ ，圓心在 y 軸上，求圓 C 方程式。

Ans： $x^2 + (y-1)^2 = 10$

主題：求圓方程式

例題 1：

設 $A(0,0)$ ， $B(6,0)$ ，求滿足 $\overline{PA} = 3\overline{PB}$ 之動點 P 的軌跡方程式。

Sol：

阿波羅尼斯圓

$$\overline{PA} = k\overline{PB} \quad , \quad k \neq 1$$

⇒ 動點 P 的軌跡圖形為一圓

例題 2：

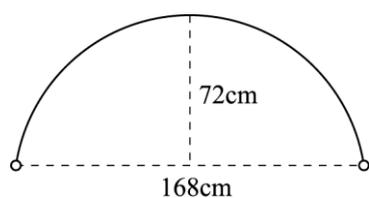
從圓 $x^2 + y^2 = 25$ 上一點 $A(3,4)$ ，做圓的弦 \overline{AP} ，當 P 點在此圓上連續變動時，求動弦 \overline{AP} 之中點的軌跡方程式。

Sol：

例題 3：

工匠在窗子外做一個圓弧形的花台，此花台在窗口中央往外伸出 72 公分，窗口的寬度為 168 公分，求此圓弧之圓半徑。

Sol：



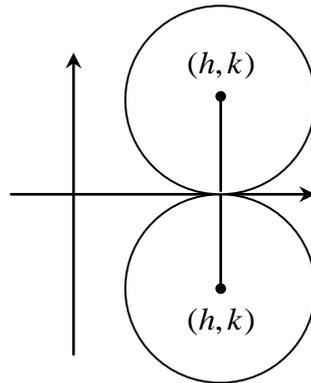
例題 4 :

有一圓通過點 $P(1, -4)$ 且與 y 軸相切。若此圓的半徑為 5，求此圓方程式。

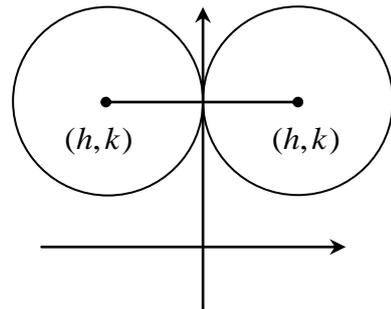
Sol :

(1)圓與 x 軸相切 \Rightarrow _____

(2)圓與 y 軸相切 \Rightarrow _____



圓與 x 軸相切



圓與 y 軸相切

例題 5 :

有一個圓過 $A(0, 2)$ 、 $B(4, 10)$ 兩點且與 x 軸相切，求此圓方程式。

Sol :

[法一] 利用圓系 \Rightarrow ① $\overline{AB} \rightarrow L$ (根軸) ② A, B 直徑圓 $C \Rightarrow$ 設 $C + kL = 0$

[法二] 設圓心

例題 6 :

一圓過兩點 $(1,2)$ 、 $(3,4)$ 且與 x 軸相交之弦長為 6，求此圓之方程式。

Sol :

例題 7 :

一圓過兩點 $(-1,3)$ 、 $(-5,-1)$ 且此弦距離圓心的長度為 $\sqrt{8}$ ，求此圓之方程式。

Sol :

例題 8 :

一圓通過兩點 $(3,1)$ 、 $(-1,-2)$ ，而其圓心在直線 $3x-4y=0$ 上，求此圓方程式。

Sol :

例題 9：

設一圓過 $A(3,1)$ ，圓心在 $3x+y=1$ 上，且半徑 $r=\sqrt{13}$ ，求此圓方程式。

Sol：

例題 10：

一圓和兩直線 $x+3y=5$ 和 $x+3y=3$ 相切，且圓心在直線 $2x+y+1=0$ 上，求此圓方程式。

Sol：

例題 11：

一圓圓心在 $x-y=0$ 上，且與直線 $3x+y=4$ 相切於點 $(3,-5)$ ，求此圓方程式。

Sol：

例題 12：

有一圓通過點 $A(5, -2)$ 且與直線 $3x - y = 1$ 相切於點 $B(1, 2)$ ，求此圓方程式。

Sol :

例題 13 :

一圓通過 $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ 與 $2x - y + 4 = 0$ 之交點，且與 y 軸相切，求此圓方程式。

Sol :

例題 14 :

在坐標平面上，下列五組條件中，哪幾組恰可決定一圓？

- (1) 過三點 $(1, -3)$ 、 $(2, 6)$ 、 $(4, 24)$
- (2) 以 $(1, 0)$ 與 $(3, 4)$ 為一直徑之兩端點
- (3) 過四點 $(1, 0)$ 、 $(-1, 0)$ 、 $(0, 1)$ 與 $(0, -1)$
- (4) 圓心 $(-1, 2)$ ，且與 x 軸及 y 軸相切
- (5) 與 x 軸， y 軸及直線 $x + y = 1$ 均相切

Sol :

類題 15 :

試繪出 $(|x|-1)^2 + (|y|-1)^2 = 4$ 之圖形並求出其所圍出的區域面積。

Sol :

類題 1 :

設二直線 $x=y+1$ 、 $x+2y=4$ 之交點 A ，再自 $P(-1,0)$ 分別作二直線之垂線，垂足為 B 、 C ，求過 P 、 A 、 B 、 C 之圓方程式。

Ans : $(1)(x-2)(x+1)+(y-1)y=0$

類題 2 :

已知圓 $C : x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ 及一點 $P(-5,5)$ ，若過 P 作圓 C 之切線，其切點分別為 A 、 B ，求 $\triangle ABP$ 之外接圓方程式。

Ans : $(x+1)(x+5)+(y-2)(y-5)=0$

類題 3 :

設定點 $A(2,0)$ ，當動點 P 繞原點做一半徑為 4 的圓時，求 \overline{AP} 的中點所成的圖形方程式。

Ans : $(x-1)^2 + y^2 = 4$

類題 4 :

設 $A(1,1)$ 、 $B(0,0)$ ，求滿足 $\overline{PA} = \sqrt{2} \overline{PB}$ 的動點 $P(x, y)$ 的軌跡圖形方程式。

Ans : $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$

類題 5 :

坐標平面上，圓 C 過點 $A(1,4)$ 與 $B(0,3)$ ，圓心在 x 軸上，求圓 C 方程式。

$$\text{Ans : } (x-4)^2 + y^2 = 25$$

類題 6：

求圓心在直線 $2x + y = 0$ ，且與直線 $x + y = 1$ 相切於點 $(2, -1)$ 之圓方程式

$$\text{Ans : } (x-1)^2 + (y+2)^2 = 2$$

類題 7：

設一圓與直線 $2x - 5y + 6 = 0$ 及 $2x - 5y - 10 = 0$ 都相切，且圓心在直線 $2x + y = 2$ 上，求此圓的方程式。

$$\text{Ans : } (x-1)^2 + y^2 = \frac{64}{29}$$

類題 8：

求與兩軸相切且圓心在直線 $x + 2y = 3$ 上的圓方程式。

$$\text{Ans : } (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \text{ or } (x+3)^2 + (y-3)^2 = 9$$

類題 9：

圓心在直線 $y = 2x$ 上，且通過點 $A(1,0)$ 、 $B(3,2)$ 之圓 C ，求：

(1) 圓 C 的方程式 (2) 圓心至弦 \overline{AB} 的距離

$$\text{Ans : } (1)(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \quad (2) 2\sqrt{2}$$

類題 10：

設 $A(2,2)$ 、 $B(-2,6)$ 為坐標平面上兩點，若 \overline{AB} 為圓之一弦且距圓心 $\sqrt{8}$ ，求圓方程式。

$$\text{Ans : } (x-2)^2 + (y-6)^2 = 16 \text{ or } (x+2)^2 + (y-2)^2 = 16$$

主題：直線與圓

【直線與圓關係】

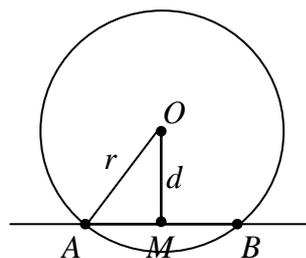
設圓 $C: (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$ 、平面 $E: ax+by+c=0$

⇒ 圓心到直線的距離 $d = d(O, L) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

(1) 交於兩點 \Leftrightarrow _____

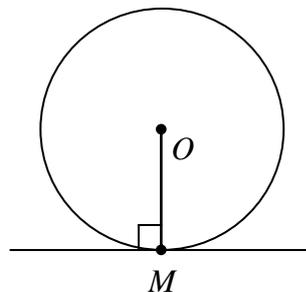
(2) 交於一點（相切） \Leftrightarrow _____

(3) 不相交 \Leftrightarrow _____



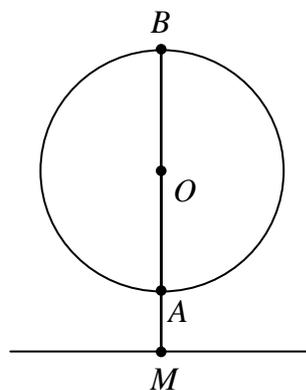
【型一】交於兩點（相割）

設交於兩點 A, B ，則弦長 $\overline{AB} =$ _____。



【型二】交於一點（相切）

(1) $\overline{OM} \perp L$ (2) $\overline{OM} = r$



【型三】不相交（相離）

(1) 圓上的點到直線的最近距離為 $\overline{AM} =$

(2) 圓上的點到直線的最遠距離為 $\overline{BM} =$

例題 1：

求下列圓方程式是否與直線相交，若相交，則交點坐標為何？

(1) $C: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ ， $L: x - y - 2 = 0$

Sol：

(2) $C: x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$, $L: 4x - 3y + 24 = 0$

Sol :

(3) $C: x^2 + y^2 - 8x + 4y + 15 = 0$

Sol :

例題 2 :

討論 $L: y = x + k$ 與圓 $x^2 + y^2 = 1$ 之相交情形。

Sol :

例題 3 :

設圓 $C: x^2 + y^2 = 2kx - 4ky$ 與直線 $x - 2y = 20$ 相交，試求 k 值。

Sol :

HINT : 相交條件 \Rightarrow _____

例題 4 :

設直線 $L: 3x - 2y + 21 = 0$ 交圓 $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 11 = 0$ 交於 A, B 兩點，試求

- (1) A, B 之中點坐標 (2) 弦長 \overline{AB}

Sol :

例題 5 :

設直線 $4x - 3y = 8$ ， P 為 $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$ 上一點，試求

- (1) P 至 L 之最小距離和此時 P 點坐標 (2) P 至 L 之最大距離和此時 P 點坐標

Sol :

例題 6 :

$L: y = m$ 和 $C: x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ 交於 A, B 兩點，且 $\overline{AB} = \sqrt{6}$ ，求 m 值。

Sol :

類題 1：

設 P 為直線上 $L: 3x + 4y - 4 = 0$ 上一動點； Q 為圓 $C: x^2 + y^2 - 4x + 4y + 7 = 0$

上一動點，若 \overline{PQ} 有最小值 m 時，求 m 和此時的 P, Q 坐標。

$$\text{Ans: } m = 2, P\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right), Q\left(\frac{7}{5}, \frac{6}{5}\right)$$

類題 2：

直線 $3x - 4y = k$ 與圓 $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ 交於 A, B 兩點，若 $\overline{AB} = 6$ ，求 k 值。

$$\text{Ans: } k = 2 \text{ 或 } -38$$

類題 3：

求圓 $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ 上任一點 P 到直線 $4x + 3y = 30$ 的距離最大值，並求此時 P 點的坐標。

$$\text{Ans: } 11, (-1, -7)$$

類題 4：

圓 $2x^2 + 2y^2 - 8x - 5y + k = 0$ 與直線 $x - y = 0$ 相切時，求 k 值。

$$\text{Ans: } \frac{169}{16}$$

類題 5：

xy 平面上，已知直線 $L: y = \frac{\sqrt{5}}{2}x + k$ 穿過兩個圓 $C_1: x^2 + y^2 = 4$ 與

$C_2: x^2 + (y - 8)^2 = 4$ 之間的空隙，求實數 k 的範圍。

$$\text{Ans: } 3 < k < 5$$

主題：圓的切線方程式

【型一】點 $P(x_0, y_0)$ 在圓 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ 上

⇒ 過 P 點之切線方程式為_____

〔法一〕利用圓心到切點距離等於_____

(1) 設切線方程式_____

(2) 利用 $d(O, P) = r$ ，解 m 。

〔法二〕公式解

記法：平分法則

$x^2 \rightarrow$ _____ $y^2 \rightarrow$ _____ $x \rightarrow$ _____ $y \rightarrow$ _____

一般式： $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$

⇒ _____

標準式： $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

⇒ _____

<說明>

(1) 點在圓上 $\Rightarrow x_0^2 + y_0^2 + dx_0 + ey_0 + f = 0$

(2) 設切線 L 上之動點 $Q(x, y) \Rightarrow \overline{PQ} \perp \overline{PO} \Rightarrow \overline{PQ} \cdot \overline{PO} = 0$

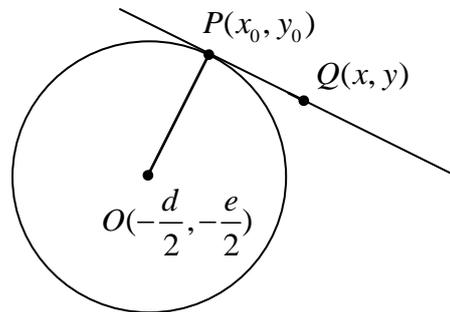
$$\Rightarrow (x_0 + \frac{d}{2}, y_0 + \frac{e}{2}) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$$

$$\Rightarrow (x_0 + \frac{d}{2})(x - x_0) + (y_0 + \frac{e}{2})(y - y_0) = 0$$

$$\Rightarrow x_0x + \frac{d}{2}x - x_0^2 - \frac{d}{2}x_0 + y_0y + \frac{e}{2}y - y_0^2 - \frac{e}{2}y_0 = 0$$

$$\Rightarrow x_0x + y_0y + d(\frac{x+x_0}{2}) + e(\frac{y+y_0}{2}) - (x_0^2 + y_0^2 + dx_0 + ey_0) = 0$$

由(1)知 $\Rightarrow x_0x + y_0y + d(\frac{x+x_0}{2}) + e(\frac{y+y_0}{2}) + f = 0$



例題 1 :

求過點 $P(5,3)$ 且與圓 $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$ 相切之直線方程式。

Sol :

例題 3 :

$L: 5x + y + a = 0$ 與圓 $C: 3x^2 + 3y^2 - 2x - 4y + b = 0$ 相切於 $(c,1)$, 求 (a,b,c) 。

Sol :

類題 1 :

已知 $P(1,-1)$ 且圓 $x^2 + y^2 + 2x - 3y - 7 = 0$, 求過 P 與圓相切之直線方程式。

Ans : $4x - 5y - 9 = 0$

類題 2 :

若直線 $y = mx + 5$ 和圓 $x^2 + y^2 + px - 6y + q = 0$ 相切於 $T(2,1)$, 求 (m, p, q) 。

Ans : $(-2, -12, 25)$

【型二】點在圓外

已知 $P(x_0, y_0)$ ，圓 $C: (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ ，且 P 在圓外

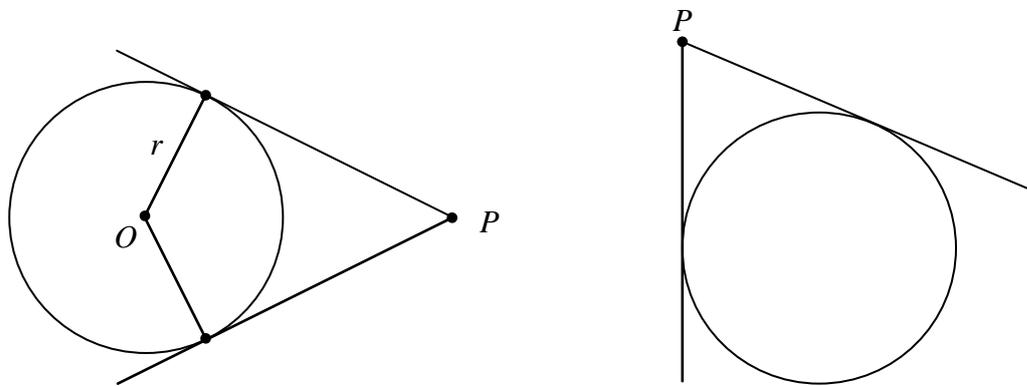
(0) 判定 P 在圓外 \Rightarrow _____

(1) 設切線之斜率 m ，則切線方程式 \Rightarrow _____

(2) 利用 $d(O, L) = r$ ，解 m

(3) 點在圓外之切線必有 _____ 條，若 m 只有一解，則另一條切線為 _____

(斜率不存在)



例題 3：

求過 $A(-1, 5)$ ，且與圓 $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$ 相切之直線方程式。

Sol：

例題 4：

求在坐標平面上，點 $(7,5)$ 處有一光源，將圓 $C: x^2 + (y-1)^2 = 1$ 投影到 x 軸之投影長。

Sol：

例題 5：

方程組 $\begin{cases} y = m(x-3) + 4 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ 有兩個相異實數解，求實數 m 的範圍。

Sol：

例題 6 :

已知一圓 $C: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 一點 $P(4,3)$, 試求

(1) 過 P 點之切線段長

(2) 過 P 點之兩切線之張角 θ , 求 $\tan \theta$

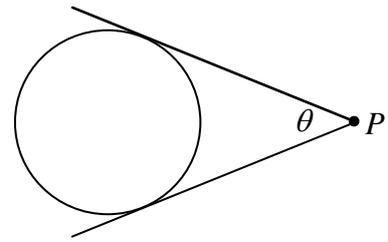
(3) 過 P 點與切點之外接圓方程式

(4) 過切點弦之直線方程式

(5) 過 P 點之直線交圓 C 於 A, B 兩點, 求 $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$

(6) Q 為圓上一動點, 求 \overline{PQ} 之最大及最小距離, 並求此時 Q 點坐標。

Sol :



類題 3 :

求通過 $P(3, -4)$ 且與圓 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ 相切的直線方程式。

Ans : $y + 4 = \frac{-21}{20}(x - 3), x = 3$

類題 4 :

xy 平面上，過點 $A(1, 2)$ 作圓 $C: x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ 的兩切線，切點為 B ， C ，則下列何者正確？

- (1) $\overline{AB} = 1$ (2) \overrightarrow{BC} 的方程式為 $x - 3y + 4 = 0$ (3) $\overline{BC} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$
(4) ΔABC 的面積為 $\frac{3}{10}$ (5) ΔABC 的外接圓方程式為 $x^2 + y^2 - 3x - y + 1 = 0$

Ans : (1)(2)(3)(4)

【型三】 已知斜率

已知切線斜率 m ，圓 $C: (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ ，

(1) 設切線方程式 \Rightarrow _____

(2) 利用 $d(O, L) = r$ ，解 k 。(必有兩解)

例題 7 :

求斜率為 2 且與 $x^2 + (y-2)^2 = 5$ 相切之直線方程式。

Sol :

例題 8 :

求與 $x+2y=1$ 平行且與 $x^2+(y-2)^2=5$ 相切之直線方程式。

Sol :

例題 9 :

求與 $x+2y=1$ 垂直且與 $x^2+(y-2)^2=5$ 相切之直線方程式。

Sol :

例題 10 :

設 $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ 、 $C_2 : (x+3)^2 + (y+4)^2 = 4$ ，試求

- | | | |
|-------------------------------------|-----------------------------------|-----------|
| (1)兩圓的關係 | (2)外公切線段長 | (3)內公切線段長 |
| (4)外公切線交角 α ，求 $\sin \alpha$ | (5)內公切線交角 β ，求 $\sin \beta$ | |
| (6)外公切線交點 P_1 ，求 P_1 | (7)外公切線交點 P_2 ，求 P_2 | |
| (8)外公切線之直線方程式 | (9)內公切線之直線方程式 | |

Sol :

類題 5：

求與直線 $x - 2y = 3$ 垂直且與圓 $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 5 = 0$ 相切之直線方程式。

Ans： $2x + y = 0, 2x + y = -10$

類題 6：

求斜率為 -1 ，且與圓 $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 5 = 0$ 的相切的直線方程式。

Ans： $y = -x + 1, y = -x + 9$

類題 7：

兩圓 $C_1 : x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$ ， $C_2 : x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0$ 外公切線夾角為 θ

($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)，則下列敘述何者正確？

(1) 外公切線段長為 $\sqrt{22}$ (2) 內公切線段長為 $\sqrt{10}$ (3) $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{3}{5}$

(4) 兩外公切線的交點為 $(-\frac{9}{2}, -\frac{1}{2})$ (5) 兩內公切線的交點為 $(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$

Ans：(1)(2)(4)(5)

類題 8：

矩形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = 9$ ， $\overline{AD} = 8$ ，設 $ABCD$ 內有二圓 O_1, O_2 ，其中 O_1 與 \overline{AB} 及 \overline{AD} 兩邊相切，圓 O_2 與 \overline{BC} 及 \overline{CD} 兩邊相切，而兩圓彼此又相外切。設圓 O_1 半徑為 r_1 ；圓 O_2 半徑為 r_2 ，求：

(1) $r_1 + r_2$ (2) r_1 的最小值及最大值 (3) 兩圓面積和的最小值和最大值

Ans：(1) 5 (2) 1, 4 (3) $\frac{25}{2}\pi, 17\pi$