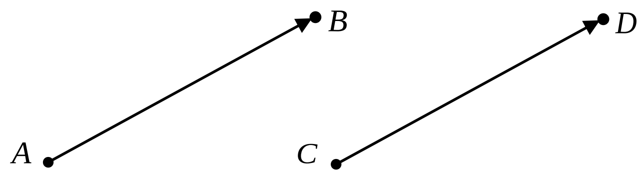
主題：向量（包含________和________）

1、有向線段：

將 A 點和 B 點用線段連接起來，並在 B 處畫一箭頭表示方向。像這樣帶有箭頭的線段，就稱為從 A 點到 B 點的有向線段。



2、純量與向量

(1)純量：________________________________。

(2)向量：________________________________。

※由 A 點到 B 點的向量以 $\overrightarrow{AB}$ 表示；向量 $\overrightarrow{AB}$ 的大小以 $|\overrightarrow{AB}|$ 表示。

其中 A 點稱為起點，B 點稱為終點。

<c.f.>有向線段 AB 可以想成：從 A 點走到 B 點這個事情。

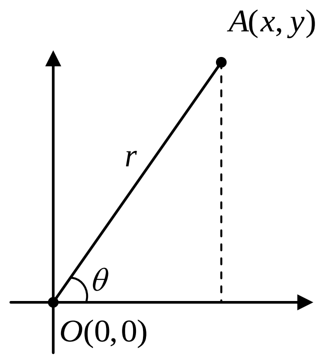
向量 $\overrightarrow{AB}$ 可以想成：從 A 點走到 B 點這個動作。

3、向量表示法（$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{u}$）

(1)幾何表示法：給定________(r)和________(θ)。

(2)代數表示法：坐標表示法 $\overrightarrow{OA}=$________。

※將向量平移至以原點 O 為起點，向量即終點坐標。



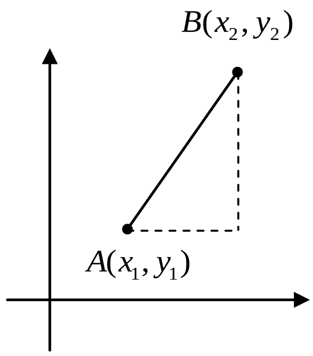
(3)表示法互換

(1)$\Rightarrow$(2)：$x=$______、$y=$______，$\overrightarrow{OA}=$____________。

(2)$\Rightarrow$(1)：$r=$______、$\tan\theta=$______。

4、向量的決定：

設 $A(x_1,y_1)$ 、 $B(x_2,y_2)$ ，則



(1) $\overrightarrow{AB}=$________________。

(2) $|\overrightarrow{AB}|=$________________。

(3) $\overrightarrow{AB}$ 的 x 分量為________；y 分量為________。

(4) $\overrightarrow{AB}$ 的 x 分向量為____________；y 分向量為____________。

(5) $\overrightarrow{AA}=$________=____，稱為零向量。

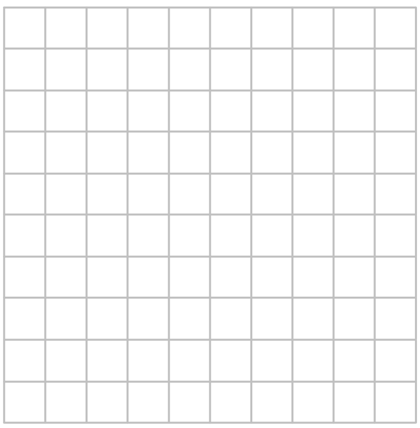
※以 O 點為始點，$\overrightarrow{OA}$ 向量即為 O 點坐標。

例題 1：

已知 $A(2,3)$ 、 $B(5,-1)$ ，求：

(1) $\overrightarrow{AB}$　(2) $\overrightarrow{AB}$ 的 x 分量及 y 分量　(3) $\overrightarrow{AB}$ 的 x 分向量及 y 分向量　(4) $|\overrightarrow{AB}|$

Sol：



例題 2：

設 $\overrightarrow{a}=(2,1)$ ，請畫出 $\overrightarrow{a}$ 。

Sol：

例題 3：

若 $\overrightarrow{AB}=(4,-3)$ 且 A 點坐標為 $(2,7)$ ，求 B 點坐標和 $\overrightarrow{OA}$ 。（ O 點指原點 $(0,0)$ ）

Sol：

類題 1：

已知 $A(4,1)$ 、 $B(-3,25)$ 、 $C(3,-4)$ 且 $\overrightarrow{CD}=(-2,5)$ ，求：

(1) $\overrightarrow{AB}$ (2) $|\overrightarrow{AB}|$ (3) D 點坐標

答：(1) $(7,-24)$ (2)25 (3) $(1,1)$

主題：向量的加法與減法

1、向量的相等

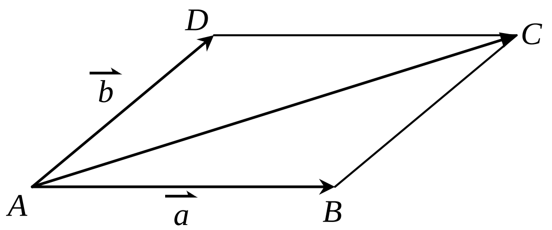
(1)若 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}\Rightarrow\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 兩向量大小________；方向________

(2)若 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$ 、 $\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$ 且 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}\Rightarrow$________________

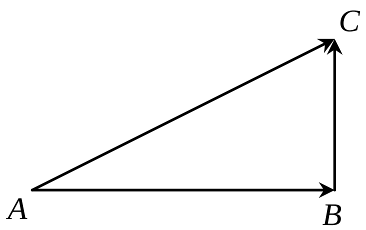
2、向量的加法

【幾何表示法】

(1)平行四邊形法 $\Rightarrow\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}$



(2)三角形法 $\Rightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=$______（連接點相同）



【坐標標示法】

已知 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$ 、 $\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$ ，

$\Rightarrow\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=$________________

推論： $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=$______； $\overrightarrow{MN}=$____________（ O 為任意點）

3、向量的減法

【幾何表示法】

由向量的加法知 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow\overrightarrow{BC}=$____________（始點相同）

$\overrightarrow{AB}=$____________（終點相同）

推論： $\overrightarrow{MN}=$____________（ O 為任意點）

【坐標標示法】

已知 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$ 、 $\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$ ，

$\Rightarrow\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=$________________

例題 1：

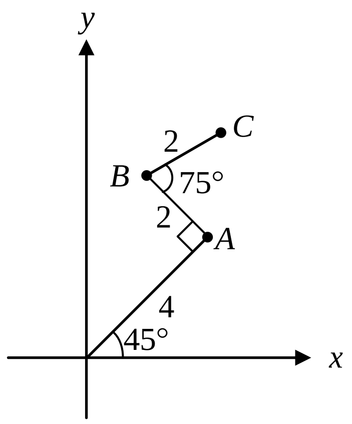
ΔABC 中，若 $\overrightarrow{AB}=(1,2)$ 、 $\overrightarrow{AC}=(-1,3)$ ，求 ΔABC 的周長。

Sol：

例題 2：

如右圖，求 A,B,C 三點的座標。

Sol：



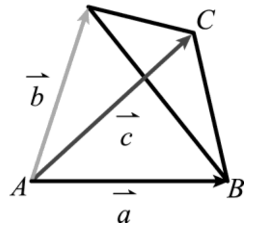
例題 3：

已知 $ABCD$ 為四邊形，令 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{AD}$ ， $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{AC}$.

試將下列各向量以 $\overrightarrow{a}$ ， $\overrightarrow{b}$ 和 $\overrightarrow{c}$ 表示：

(1) $\overrightarrow{BD}$ (2) $\overrightarrow{BC}$ (3) $\overrightarrow{CD}$

Sol：



例題 4：

設 $A(1,1)$ 、 $B(2,3)$ 、 $C(4,5)$ 、 $D(x,y)$ ，試求下列各條件中的 D 點座標：

(1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

(2)四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形

(3) A,B,C,D 構成平行四邊形

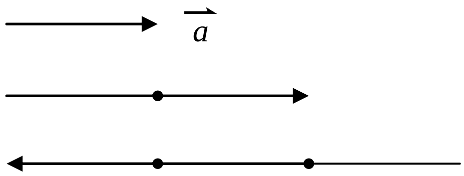
(3) $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{0}$

Sol：

主題：向量係數積

1、係數積

(1)幾何表示法



※正負號表示________

(2)坐標表示法

設 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$，則 $r\overrightarrow{a}=$____________。

2、平行（$\overrightarrow{a}//\overrightarrow{b}$）

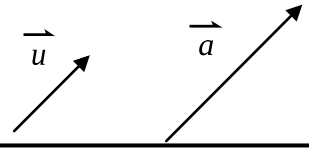
(1)幾何表示法：____________

(2)代數表示法：已知 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$、$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)\Rightarrow$ ____________

3、單位向量

設 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)\Rightarrow$ $\overrightarrow{a}$ 之單位向量 $\overrightarrow{u}=$ ________ $=$ ______________。

推論：平行之單位向量＝ ____________ 。



例題 1：

設 $\overrightarrow{a}=(1,2)$、$\overrightarrow{b}=(4,3)$，求實數 t 使得 $|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}|$ 為最小值，求 (t,m)。

Sol：

例題 2：

設 $\overrightarrow{a}=(4,-3)$，求：

(1) $\overrightarrow{a}$ 的同方向單位向量 (2) $\overrightarrow{a}$ 的平行之單位向量 (3) $\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{a}$ 同方向且 $|\overrightarrow{b}|=2$

Sol：

例題 3：

設 $\overrightarrow{a}=(1,2)$ 、 $\overrightarrow{b}=(-5,x)$ 且 $\overrightarrow{a}//\overrightarrow{b}$ ，求 x 值。

Sol：

例題 4：

設 $\overrightarrow{a}=(1,2)$ 、 $\overrightarrow{b}=(3,4)$ ，若 $t\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$ 平行，求 t 值。

Sol：

例題 5：

兩向量以 $\overrightarrow{a}$ 和 $\overrightarrow{b}$ 表示，並以 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 表示 $\overrightarrow{a}$ 和 $\overrightarrow{b}$ 的內積，以 $|\overrightarrow{a}|$，$|\overrightarrow{a}|$ 分別表示 $\overrightarrow{a}$ 和 $\overrightarrow{b}$ 的長度，試問下列哪一個選項表示：「三角形兩邊中點的連線段與第三邊平行，且其長度為第三邊之半。」？

(1) $\frac{1}{2}\overrightarrow{a}-\frac{1}{2}\overrightarrow{b}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})$　　(2) $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|<|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|$

Sol：

類題 1：

設 $A(3,-2)$、$B(x,3)$、$C(-4,1)$、$D(2,y)$，則

(1)若 $\overrightarrow{AP}=(1,-3)$，求 P 點坐標　　(2)求 $|\overrightarrow{AC}|$

(3)若 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$，求 x,y 值　　(4)若 $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{AC}$，求 x 值

Ans：(1) $(4,-5)$　(2) $\sqrt{58}$　(3) $x=2, y=3$　(4) $\frac{-26}{3}$

類題 2：

設一平行四邊形的三個頂點 $A(-3,2)$、$B(5,-4)$、$C(4,1)$，求第四個頂點坐標。

Ans：$(-4,7)$ *or* $(12,-5)$ *or* $(-2,-3)$

類題 3：

設 $\overrightarrow{a}=(3,4)$、$\overrightarrow{b}=(2,-1)$，若 $(\overrightarrow{a}+r\overrightarrow{b})//(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})$，求實數 r。

Ans：-1

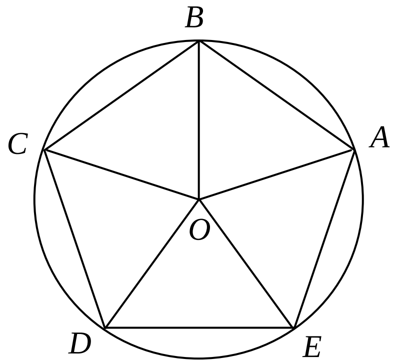
主題：向量與正 n 邊形

【性質】正 n 邊形必為圓內接 n 邊形，其圓心 O 至各頂點的向量和為________

<解題技巧> 以圓心為起點的向量兩兩相加

例題 1：

試證明 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{0}$ 。



Pf：

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{t\ C}$

$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{t\ C}$

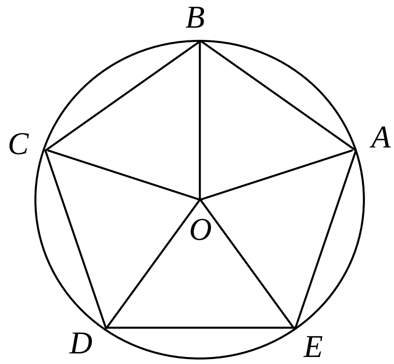
$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{t\ C}$

$\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{t\ C}$

$\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{t\ C}$

例題 2：

如右圖，且 $|\overrightarrow{OA}|=1$，求 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}|$ 的值。

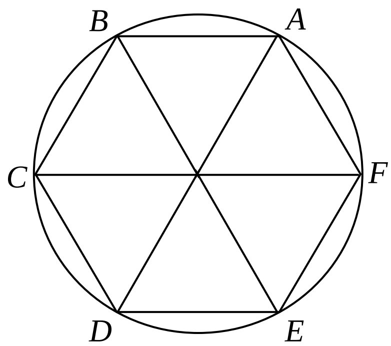


Sol：

例題 3：

正六邊形 A,B,C,D,E,F 中，設 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$ 、$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{b}$，以 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ 表示下列向量：

(1) $\overrightarrow{AC}$ (2) $\overrightarrow{CD}$ (3) $\overrightarrow{DE}$ (4) $\overrightarrow{EF}$ (5) $\overrightarrow{FA}$ (6) $\overrightarrow{AE}$ (7) $\overrightarrow{EB}$

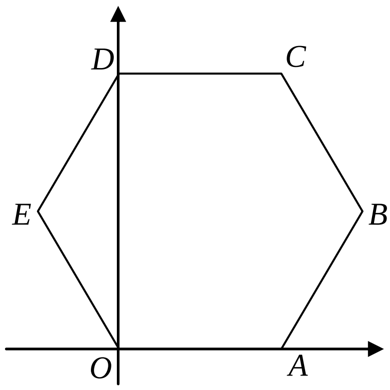


Sol：

例題 4：

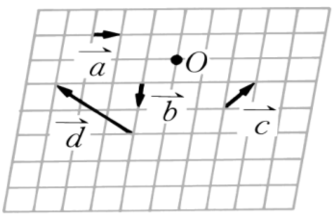
正六邊形 $OABCDE$ 其邊長為 1，已知 $O(0,0)$ 、 $A(1,0)$ ，求 $\overrightarrow{DE}$ 和 $\overrightarrow{DB}$ 。

Sol：



類題 1：

如附圖，兩組等間隔的平行線系，其交織成的網路上有若干個向量和一定點 O 。試以 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 表示 $\overrightarrow{c}$ 和 $\overrightarrow{d}$ 。



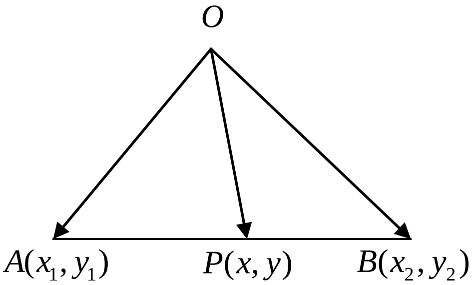
Ans： $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ ； $\overrightarrow{d}=-3\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}$

主題：內外分點公式

1、內分點

設 $A(x_1 y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，且 $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$ ，則 $\overrightarrow{OP}=$ ________________

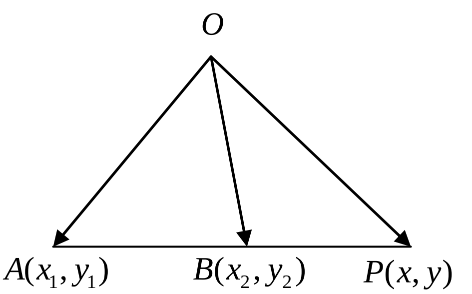
P 點 ________________



2、外分點

設 $A(x_1 y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，且 $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$ ，則 $\overrightarrow{OP}=$ ________________

P 點 ________________



例題 1：

設 $A(1,1)$ 、 $B(3,4)$ ，若 P 在線段 AB 上，且 $\overline{AP}=3\overline{PB}$ ，求 P 點坐標。

Sol：

例題 2：

設 $A(6,7)$ 、 $B(1,12)$ ，若 P 在直線 AB 上，且 $\overline{PA}:\overline{PB}=3:2$ ，求 P 點坐標。

Sol：

例題 3：

ΔABC 三頂點 $A(-2,4)$、$B(6,-2)$、$C(1,0)$，若 $\angle A$ 之內、外角平分線分別交 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 D 、 E 兩點，求 D 、 E 兩點的坐標。

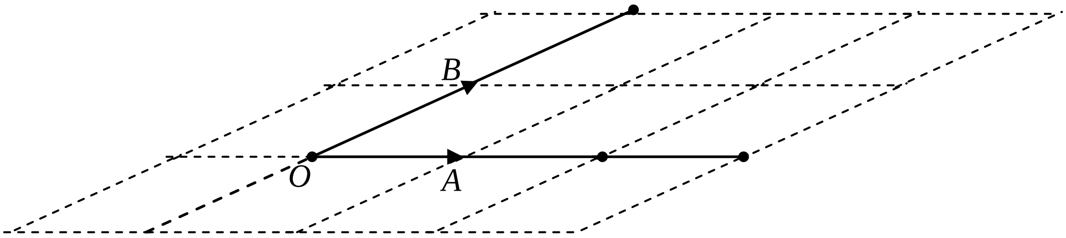
Sol：

主題：向量的線性組合

1、 線性組合

若$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$是平面上不平行的兩個**非零**向量，對平面上任一向量$\overrightarrow{OP}$都

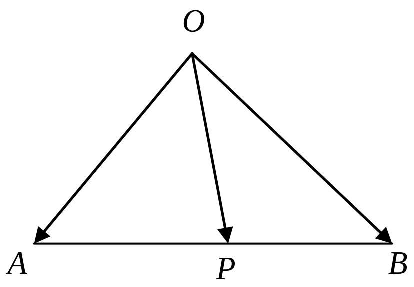
可以找到唯一的一組(x,y)使得$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$。



2、 共線理論

設$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$，則$A,B,P$三點共線$\Leftrightarrow$ ____________。

Pf：



進一步，若$\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$，則$\overrightarrow{OP}=$ ________________________。

例題 1：

設 $O(0,0)$ 、 $A(1,2)$ 、 $B(2,1)$，若 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$ ，試依下列各條件，在坐標平面上標出 P 點的所形成的圖形。

(1) $x=1, y=-1$ (2) $x=1, 0\le y\le 1$ (3) $0\le x\le \frac{1}{2}$ ，$-1\le y\le 1$

Sol：

例題 2：

設 ΔABC 為平面上的一個三角形，P 為平面上一點，且 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ ，其中 t 為一實數，試問下列哪一選項為 t 的最大範圍，使得 P 落在 ΔABC 的內部？

(1) $0<t<\frac{1}{4}$ (2) $0<t<\frac{1}{3}$ (3) $0<t<\frac{1}{2}$ (4) $0<t<\frac{2}{3}$ (5) $0<t<\frac{3}{4}$

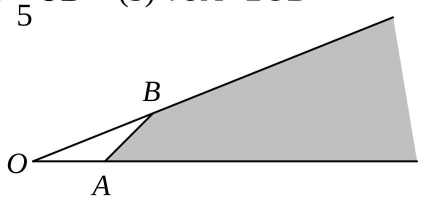
Sol：

例題 3：

如右圖，兩射線 OA 與 OB 交於 O 點，試問下列選項哪些向量的終點會落在陰影區域內。

(1) $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ (2) $\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}$ (3) $\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$ (4) $\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{6}{5}\overrightarrow{OB}$ (5) $4\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}$

Sol：



例題 4：

若 A, B, C 三點共線且 $2\overrightarrow{OB} = (t+3)\overrightarrow{OA} + (2t-1)\overrightarrow{OC}$ ，求 t 值。

Sol：

例題 5：

已知 $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC}$ 、 $\overrightarrow{AP} = t\,\overrightarrow{AD}$ 且 D 在 $\overline{BC}$ 上，求 t 值。

Sol：

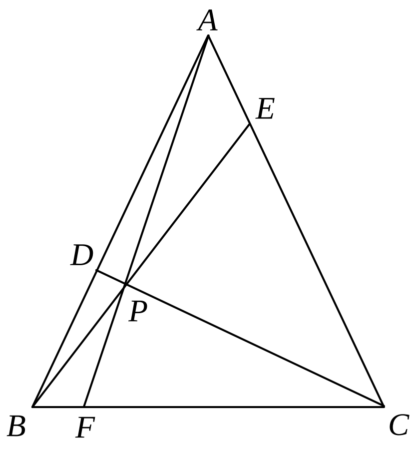
例題 6：

ΔABC 中，點 D 在 $\overline{AB}$ 上，點 E 在 $\overline{AC}$ 上，且 $\overline{AD} : \overline{DB} = 3:2$ ， $\overline{AE} : \overline{EC} = 1:4$

(1)若 $\overline{BE}$ 與 $\overline{CD}$ 交於 P 點且 $\overrightarrow{AP} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$ ，求數對 (x, y)

(2)若 $\overrightarrow{AP}$ 與 $\overline{BC}$ 交於 F 點且 $\overrightarrow{AF} = \alpha\,\overrightarrow{AB} + \beta\,\overrightarrow{AC}$ ，求數對 (α, β)

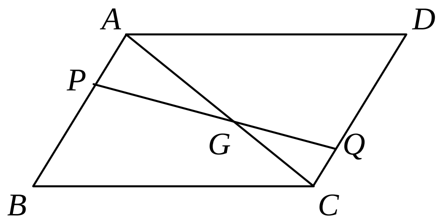
Sol：



例題 7：

平行四邊形 $ABCD$，$P \in \overline{AB}$ 且 $\overline{AP}:\overline{PB}=1:3$，$Q \in \overline{CD}$ 且 $\overline{CQ}:\overline{QD}=1:4$，$\overline{PQ}$ 交 $\overline{AC}$ 於 G 且 $\overrightarrow{BG}=x\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BC}$，求數對 (x,y)。

Sol：

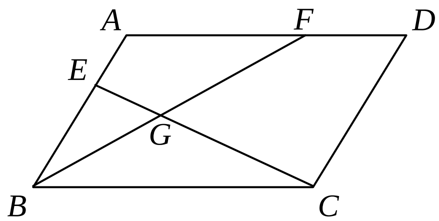


例題 8：

如圖平行四邊形 A,B,C,D，$\overline{AE}:\overline{EB}=2:3$ 且 $\overline{AF}:\overline{FD}=2:1$，求

(1) $\overline{FG}:\overline{GB}$ (2) $\overline{EG}:\overline{GC}$ (3) $\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，求數對 (x,y)

Sol：



類題 1：

設 t 為實數，$\overrightarrow{OB}=(4+t)\overrightarrow{OA}+(5t-1)\overrightarrow{BC}$，若 A,B,C 三點共線，求 t 值。

Ans：-3

類題 2：

已知 $\overline{AE}=\dfrac{3}{5}\overline{AB}$，$\overline{AC}=\dfrac{4}{3}\overline{AD}$，$\overline{BD}$ 與 $\overline{CE}$ 交於 P，

(1)若 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，求數對 (x,y)

(2)延長 $\overline{AP}$ 與 $\overline{BC}$ 交於 Q，若 $\overrightarrow{AQ}=a\overrightarrow{AD}+b\overrightarrow{AE}$，求數對 (a,b)

Ans：(1) $(\dfrac{3}{11},\dfrac{6}{11})$　(2) $(\dfrac{8}{9},\dfrac{5}{9})$

類題 3：

平行四邊形 $ABCD$，E,F 各在 $\overline{BC},\overline{CD}$ 上，且 $\overline{BE}\ \overline{EC}=3\ 2$，$\overline{CF}:\overline{FD}=1:4$，

$\overline{BF}$ 交 $\overline{DE}$ 於 G。若 $\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，求數對 (x,y)。

Ans：$(\dfrac{20}{23},\dfrac{15}{23})$

主題：重心、面積比、內心

1、重心性質

(1) $\overline{AG}:\overline{GM}=$________

(2)面積關係：$\Delta ABG=\Delta BCG=\Delta ACG=\dfrac{1}{3}\Delta ABC$

2、重心與向量

(1) $\overrightarrow{OG}=$________________________ （O 為任意點，求坐標時以______為起點）

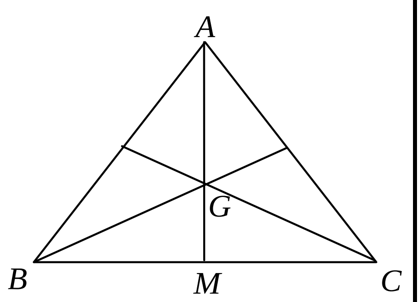
(2) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=$________

(3) $\overrightarrow{AG}=$________________________

3、面積比

設 P 為 ΔABC 內部一點且 $l\overrightarrow{PA}+m\overrightarrow{PB}+n\overrightarrow{PC}=\vec{0}$，則

$\Delta PAB:\Delta PAC:\Delta PBC=$________________。



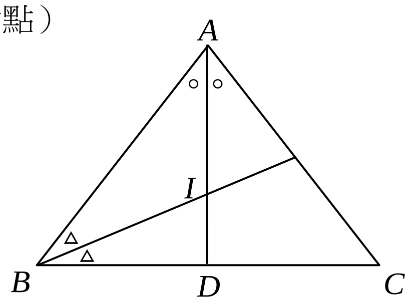
Pf：

(2)

(3)

4、內心與向量

(1) $\overrightarrow{OI}=$ ______________________　（O 為任意點）



(2) $a\,\overrightarrow{IA}+b\,\overrightarrow{IB}+c\,\overrightarrow{IC}=$ ________

(3) $\overrightarrow{AI}=$ ______________________

Pf：

例題 1：

ΔABC 之重心 G ， D,E,F 為其三邊之中點，試證： ΔDEF 之重心也是 G 。

Pf：

例題 2：

設一圓之圓心 $(4,3)$，且 ΔABC 為此圓之圓心，試求 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|$ 之值（其中 O 為原點）。

Sol：

例題 3：

ΔABC 中，G 表示重心，則

(1)若 $\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，求 (x,y)　(2) $A(0,0)$、$B(7,2)$、$C(11,10)$，求 G 點坐標

Sol：

例題 4：

在 ΔABC 中，$\overline{BC},\overline{CA},\overline{AB}$ 三邊的中點分別為 D,E,F，使得

$\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{BD},\overrightarrow{EC}=3\overrightarrow{AE},\overrightarrow{FB}=4\overrightarrow{AF}$。設 G 為 ΔDEF 之重心，且 $\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，

試求 (x,y)。

Sol：

例題 5：

已知 ΔABC 及其內部一點 P，滿足 $\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}$，則

(1)求 $\Delta PAB:\Delta PBC:\Delta PAC$ 的面積比　(2)若已知 ΔABC 面積為 12，求 ΔPAB 面積

Sol：

例題 6：

設 P 為 ΔABC 為內部一點，且 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ ，求 $\frac{\Delta ABP面積}{\Delta ABC面積}$ 。

Sol：

例題 7：

I 為 ΔABC 內心，$\overline{BC}=1,\overline{CA}=2,\angle C=60^\circ$。若 $\overrightarrow{CI}=\alpha\overrightarrow{CA}+\beta\overrightarrow{CB}$ ，求 (α,β) 。

Sol：

例題 8：

若 ΔABC 的三頂點坐標為 $A(1,1)$ 、 $B(4,1)$ 、 $C(1,5)$ ，求內心 I 的坐標。

Sol：

類題 1：

ΔABC 的三頂點坐標分別為 $A(2,7)$ 、 $B(-1,5)$ 、 $C(5,3)$ ，求 ΔABC 重心 G 。

Ans： $(2,5)$

類題 2：

ΔABC 中，D,E,F 分別在 $\overline{AB},\overline{BC},\overline{AC}$ 上，且 $\overline{AD}:\overline{DB}=2:5$ 、$\overline{BE}:\overline{EC}=3:4$ 、$\overline{AF}:\overline{FC}=6:1$，若 G 為 ΔDEF 的重心，且 $\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ ，求 (x,y) 。

Ans： $(\frac{2}{7},\frac{3}{7})$

類題 3：

ΔABC 內一點 P 滿足 $\Delta ABP:\Delta BCP:\Delta CAP=2:1:3$。延長 AP 交 $\overline{BC}$ 於 D，則：

(1) $\overrightarrow{PA}=x\overrightarrow{PB}+y\overrightarrow{PC}$ ，求 (x,y) (2) $\overrightarrow{PD}=m\overrightarrow{PB}+n\overrightarrow{PC}$ ，求 (m,n)

Ans：(1) $(-3,-2)$ (2) $(\frac{3}{5},\frac{2}{5})$

類題 4：

設 I 為 ΔABC 的內心，若 $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$ 且 ΔABC 之周長為 18，求 ΔABC 的面積。

Ans： $3\sqrt{15}$

類題 5：

ΔABC 中，$\overline{AB}:\overline{AC}=4:3$，$\overline{AD}$ 為 $\angle A$ 的內角平分線，D 在 $\overline{BC}$ 上；$\overline{AE}$ 為 $\angle A$ 的外角平分線，E 在 $\overleftrightarrow{BC}$ 上，則

(1) $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ ，求 (x,y) (2) $\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC}$ ，求 (k,l)

Ans：(1) $x=\frac{3}{7},y=\frac{4}{7}$ (2) $k=-3,l=4$

主題：向量內積（是______不是______）

1、定義向量內積（ $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ ）

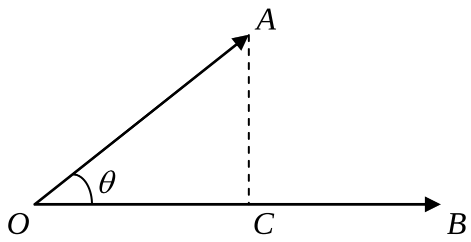
設 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OA}=(a_1,a_2)$ ， $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{OB}=(b_1,b_2)$ ，則

(1) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ =________________（投影長 × 被投影長）

=________________（幾何表示）

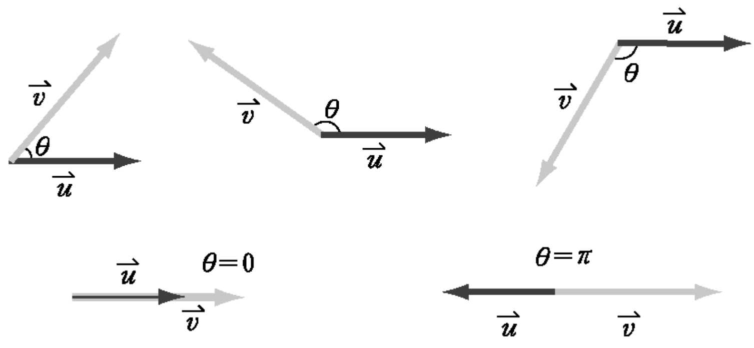
=________________（代數表示）

Pf：



2、向量夾角：

向量夾角必唯一且 $0\le\theta\le 2\pi$ 。



3、一些性質

(1) $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}\Rightarrow$ ____________ $\Rightarrow$ ____________

(2) $|\overrightarrow{a}|^2=$ ____________

(3) $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2=$ ____________________ = ________________________

(4) $|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2=$______________________=__________________________

(5) $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}|=$___________________________________

(6)交換律：$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=$_________

(7)分配律：$\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})=$_____________

(8) $(\alpha\cdot\overrightarrow{a})\cdot\overrightarrow{b}=$_____________

(9)無消去律：$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}\ \Rightarrow$______________________________

例題 1：

設 $\overrightarrow{a}=(2,-1)$、$\overrightarrow{b}=(3,-1)$、$\overrightarrow{c}=(-1,0)$，求：

(1) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ (2) $\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}$ (3) $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}$

Sol：

例題 2：

設 $\overrightarrow{a}=(1,-1)$、$\overrightarrow{b}=(x,2-x)$，若 $\overrightarrow{a}\perp(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a})$，求 x 值。

Sol：

例題 3：

求下列各條件下 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 的值：

(1) $|\vec{a}|=2$ 、 $|\vec{b}|=4$ 且 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角為 $60°$

(2) $|\vec{a}|=2$ 、 $\vec{b}=(3,4)$ 且 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角為 $120°$

(3) $|\vec{a}|=2$ 、 $|\vec{b}|=1$ 且 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 方向相反

Sol：

例題 4：

設正三角形 ABC 的邊長為 2，試求：

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ (2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

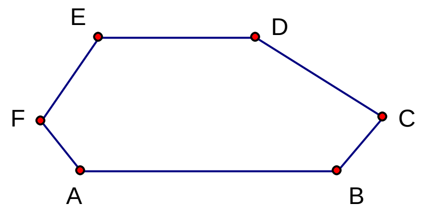
Sol：

例題 5：

如右圖，下列各組向量的內積何者最大？

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ (2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ (3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}$ (4) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$ (5) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

Sol：



例題 6：

已知 ΔABC 中， $\overline{AB}=2,\overline{BC}=3,\overline{CA}=4$ ，試求：

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$　(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

Sol：

例題 7：

平行四邊形 $ABCD$ ， $\overline{AB}=4,\overline{AD}=6$ ，試求 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ 的值。

Sol：

例題 8：

設正三角形 ABC 的邊長為 2 且 M 為 $\overline{BC}$ 中點，求 $(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AM})\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AM})$ 。

Sol：

主題：內積與長度

1、向量長度

設 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$，則 $|\overrightarrow{a}|=$__________（幾何）＝__________（座標）。

例題 1：

設 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 兩向量長度分別為 1,2，且夾角為 $60°$，試求 $2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 之長度。

Sol：

例題 2：

設 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 兩向量長度分別為 1,2，且夾角為 $60°$，若 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ 、

$\overrightarrow{OQ}=2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$，試求 $|\overrightarrow{PQ}|$。

Sol：

例題 3：

若 $|\overrightarrow{a}|=3$、$|\overrightarrow{b}|=2$、$|\overrightarrow{c}|=4$，且 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}$，試求：

(1) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$　　(2) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}+\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}$

Sol：

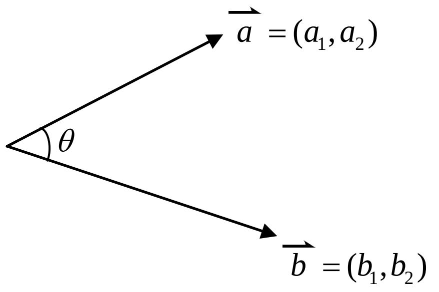
主題：向量夾角

【題型】角度

向量夾角必唯一且＿＿＿＿＿＿＿。

求角度唯一公式⇒＿＿＿＿＿。

$\cos\theta =$ ＿＿＿＿＿＿（幾何）＝ ＿＿＿＿＿＿（代數）＝ ＿＿＿＿＿＿（餘弦）



例題 1：

ΔABC 三頂點 $A(3,-2)$ 、 $B(-1,-4)$ 、 $C(6,-3)$ ，試求 $\angle BAC$ 的大小。

Sol：

例題 2：

設 $\overrightarrow{a} = (2,1)$ 、 $\overrightarrow{b} = (1,a)$ ，且兩向量夾角為 45°，試求 a 值。

Sol：

例題 3：

設$|\overrightarrow{a}|=5$、$|\overrightarrow{b}|=8$且$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=-20$，試求此兩向量之夾角。

Sol：

例題 4：

若$|\overrightarrow{a}|=1$、$|\overrightarrow{b}|=3$且$|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=\sqrt{7}$，試求兩向量之夾角。

Sol：

例題 5；

設$|\overrightarrow{a}|=3$、$|\overrightarrow{b}|=5$、$|\overrightarrow{c}|=7$且$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}$，試求$\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$之夾角。

Sol：

例題 6：

求長度為 1 且與$\overrightarrow{a}=(1,\sqrt{3})$之夾角為$30°$之向量。

Sol：

主題：平行與垂直

設 $\overrightarrow{a}=(a_1,b_1)$、$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$。

1、平行：若 $\overrightarrow{a}//\overrightarrow{b}\Rightarrow$____________（幾何）＝____________（代數）。

2、垂直：若 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}\Rightarrow$____________（幾何）＝____________（代數）。

例題 1：

若 $\overrightarrow{u}=(2,1)$、$\overrightarrow{v}=(3,4)$。若 $(\overrightarrow{u}+t\overrightarrow{v})\perp\overrightarrow{v}$，求 t 值

Sol：

例題 2：

已知 $\overrightarrow{a}\perp(3,4)$ 且 $|\overrightarrow{a}|=2$，求 $\overrightarrow{a}$。

Sol：

例題 3：

設 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 滿足 $2|\overrightarrow{a}|=|\overrightarrow{b}|$，且 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{a}-\frac{2}{5}\overrightarrow{b}$ 互相垂直，求 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 之夾角。

Sol：

類題 1：

ΔABC 中，$\overline{AB}=6$、$\overline{BC}=7$、$\overline{AC}=8$，求

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ (2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

Ans：(1) $\frac{51}{2}$ (2) $\frac{-21}{2}$

類題 2：

設 $\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}$，且 $|\overrightarrow{a}|=2$、$|\overrightarrow{b}|=1$、$|\overrightarrow{c}|=2$，求

(1) $\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}$ (2) $\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 之夾角

Ans：(1) 1 (2) $60°$

類題 3：

$\overrightarrow{a}=(4,3)$、$\overrightarrow{b}=(-2,1)$，若

(1) $\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 垂直，求 t 值。

(2) $\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 平行，求 t 值。

Ans：(1) 3 (2) -1

類題 4：

四邊形 $ABCD$ 中，$\angle A=120°$、$\overline{AB}=2$、$\overline{AD}=3$ 且 $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AD}$，求 $\overline{AC}$ 的長度。

Ans：$6\sqrt{3}$

類題 5：

已知 $|\overrightarrow{a}|=4$、$|\overrightarrow{b}|=10$，$\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 之夾角 $60°$，求 $2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 之長度。

Ans：$2\sqrt{21}$

類題 6：

平面上有三向量$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$，若$|\overrightarrow{OA}|=1$、$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{3}$、$\overrightarrow{OC}=2$，且$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$，求$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$的長度。

Ans：$\sqrt{3}$

類題 7：

設$\vec{a},\vec{b}$為兩向量，$|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=4$、$|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=2$，求

(1) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$　(2) $|2\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b}|^2+|3\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}|^2$

Ans：(1)3 (2)58

主題：內積與垂心、外心

1、內積性質：

已知ΔABC三邊長。則$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$ ________ 。

【說明】

2、垂心性質：

設H為ΔABC的垂心時，則 ________________ 。

【說明】

3、外心性質：

設O為ΔABC的垂心時，則$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=$ ________ $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=$ ________ 。

【說明】

例題 1：

ΔABC 中，$\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=6$, $\overline{AC}=2\sqrt{7}$ ，且 H 為 ΔABC 之垂心。則

(1) $\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ ，求 (x,y)

(2) $\overline{AH}$ 交 $\overleftrightarrow{BC}$ 邊於 D 點，且 $\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC}$ ，求 (k,l)

Sol：

例題 2：

ΔABC 中，$\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=\sqrt{7}$, $\overline{AC}=3$，且 K 為 ΔABC 之外心。則

(1)求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ (2) $\overrightarrow{AK}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ ，求 (x,y)

Sol：

例題 3：

ΔABC 三頂點座標分別為 $A(2,4)$, $B(-1,5)$, $C(-6,0)$，求其垂心與外心坐標。

Sol：

類題 1：

ΔABC 中， D 為垂心，已知 $\overline{AB}=3$, $\overline{AC}=2$ 且 $\angle BAC=60°$，若

$\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ ，求 (x,y) 。

Ans： $x=\frac{1}{9}$, $y=\frac{2}{3}$

類題 2：

K 為 ΔABC 的外心， $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=6$, $\overline{AC}=2\sqrt{7}$ ，

(1) $\overrightarrow{AK}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ ，求 (x,y)

(2) $\overline{AK}$ 交 $\overleftrightarrow{BC}$ 邊於 D 點，且 $\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC}$ ，求 (k,l)

Ans：(1) $x=\frac{7}{18}$, $y=\frac{4}{9}$ (2) $k=\frac{7}{15}$, $l=\frac{8}{15}$

主題：正射影

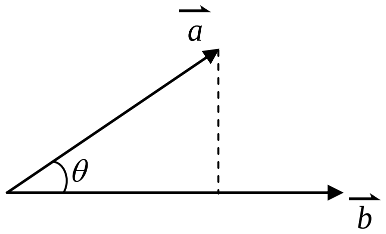
1、正射影長（投影長）

$\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 之正射影長＝____________________。

2、正射影（投影）

$\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 之正射影長＝____________________。

【說明】



例題 1：

設 $A(-2,4)$ 、 $B(8,9)$ 、 $C(1,8)$ ，則

(1) $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的正射影⇒結果________

(2) $\overline{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的正射影⇒結果________

(3) B 點在 $\overrightarrow{AC}$ 上的正射影⇒結果________

Sol：

例題 2：

設 $\overrightarrow{a}=(-1,k)$ 、 $\overrightarrow{b}=(2,2)$ ，已知 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 之正射影為 $(1,1)$ ，求 k 值。

Sol：

例題 3：

設 $A(3,1)$ 、 $B(1,2)$ 、 $O(0,0)$ ，且點 B 在 $\overleftrightarrow{OA}$ 之投影點（垂足點）為 C ，求

(1) $\overrightarrow{OC}$ (2)點 B 至 $\overleftrightarrow{OA}$ 的距離

Sol：

類題 1：

$A(1,1)$, $B(3,4)$, $C(-1,2)$, $D(0,1)$ ，求 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{CD}$ 方向之正射影。

Ans：$(\frac{-1}{2},\frac{1}{2})$

類題 2：

若單位向量 $\overrightarrow{A}$ 在 $(1,-2)$ 上的正射影為 $(-\frac{1}{5},\frac{2}{5})$ ，求 $\overrightarrow{A}$ 。

Ans：$(-1,0)$ 或 $(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$

主題：柯西不等式

【型一】幾何表示法⇒ ________________，"＝"成立條件 ________。

【型二】代數表示法⇒ ________________，"＝"成立條件 ________。

推廣：________________，"＝"成立條件 ________。

【說明】

《比較》最大或最小值題型之比較

(1)配方法：________________

$\Rightarrow f(x)=ax^2+bx+c$

(2)算幾不等式：________________

$\Rightarrow \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\ge\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}$ ，"＝"成立條件 $x_1=x_2=\cdots=x_n$

(3)柯西不等式：________________

$\Rightarrow (a^2+b^2)(x^2+y^2)\ge(ax+by)^2$ ，"＝"成立條件 $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$

例題 1：

設 $f(x)=2x^2+3x+7$ ，求 $x=$____時，有最小值 $m=$____。

Sol：

例題 2：

設 $x, y \in \mathbb{N}$ ，且 $x+y=5$ ，求 x^3y^2 的最大值，並求此時 (x, y) 值。

Sol：

例題 3：

$x^2+y^2=13$ ，求 $2x+3y$ 的最大值和最小值。

Sol：

例題 4：

設 $2a+3b=4$ ，求 a^2+b^2 的最小值，並求此時的 (a, b) 。

Sol：

例題 5：

求 $\dfrac{2a+3b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 的最大值和最小值。

Sol：

例題 6：

設 $\overrightarrow{a}=(x, 2)$, $\overrightarrow{b}=(1, y)$ ，且 $x^2+y^2=5$ ，求 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 的最大值和最小值。

Sol：

例題 7：

$\overrightarrow{a}=(2,4)$，$\overrightarrow{b}=(l,m)$，若 $2l+4m=7$，求 $|\overrightarrow{b}|$ 的最小值，並求此時的 $\overrightarrow{b}$。

Sol：

例題 8：

$4x-3y=1$，求 $2x^2+9y^2$ 的最小值。

Sol：

例題 9：

$(x+2)^2+(y-1)^2=4$，求 $3x+2y$ 的最大值和最小值。

Sol：

例題 10：

已知 $x+y=6$，求 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}$ 的最小值。

Sol：

例題 11：

設 $\sin\theta\cdot\cos\theta\neq 0$，求 $\dfrac{1}{\sin^2\theta}+\dfrac{9}{\cos^2\theta}$ 的最小值。

Sol：

類題 1：

設 x, y 為實數且滿足 $4x^2+9y^2=5$，求 $4x+3y+7$ 的最大值，並求此時 (x, y)。

Ans：最大值 12 , $x=1, y=\frac{1}{3}$

類題 2：

設 x, y 為實數，且 $4x-3y=12$，求 $2x^2+9y^2$ 之最小值。

Ans：16

類題 3：

求 $7\sin\alpha-2\cos\alpha$ 之最大值和最小值，並此時 $(\sin\alpha, \cos\alpha)$。

Ans：最大值 $\sqrt{53}$，$(\sin\alpha, \cos\alpha)=(\frac{7}{\sqrt{53}}, \frac{-2}{\sqrt{53}})$；

最小值 $-\sqrt{53}$，$(\sin\alpha, \cos\alpha)=(\frac{-7}{\sqrt{53}}, \frac{2}{\sqrt{53}})$

主題：直線（二元一次方程式）

1、點斜式$\Rightarrow$已知__________和__________

<作法>(1)設直線 L:____________________　　(2)代點(x_0, y_0)，求 k 值

<例題>已知直線斜率為 2 且過點$(3,-4)$

看到$L: y=-2x+3$，知 L 斜率為____

2、點法式$\Rightarrow$已知__________和__________

<作法>(1)設直線 L:____________________　　(2)代點(x_0, y_0)，求 k 值

<例題>已知直線垂直$(2,-3)$且過點$(1,2)$

看到$3x-2y=-2$知其法向量________；方向向量________

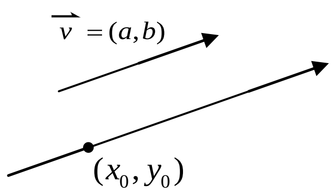
3、點向式$\Rightarrow$已知__________和__________

點向參數式的表示法為 $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$　或　$\dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b}$

參數式　　　　比例式

（其意義為每一個 t 值就是直線上的一點，亦即直線上的任意點）

【說明】



<例題>已知直線平行$(1,3)$且過點$(2,1)$，求參數式與比例式

看到$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}$想到____________________________

看到$\begin{cases} x=1-3t \\ y=-2+t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ 想到____________________________

例題 1：

設L過$(2,-1)$、$(-1,3)$，則

(1)寫出L之參數式

(2)消去參數t寫出L之方程式

(3)求L之斜率和法向量

(4)求L與$2x+y=1$之交點

(5)求原點到L之距離

Sol：

例題 2：

設$L_1:\begin{cases} x=2-t \\ y=6-2t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$、$L_2:\begin{cases} x=-1+6s \\ y=3-3s \end{cases}$ $s\in\mathbb{R}$，則

(1)求L_1與L_2之交點

(2)L_1:當$-1\le t\le 3$，求此線段長

Sol：

例題 3：

設 $A(1,-1)$ 、 $B(4,3)$ ，若 $P(x,y)$ 在直線 AB 上，求 x^2-3y 之最小值。

Sol：

例題 4：

設 $A(1,2)$ 、 $B(-1,1)$ ，若 $P(x,y)$ 為線段 $\overline{AB}$ 上的一點，求下列各條件之最大值和最小值：

(1) $2x+y+1$　　(2) $xy-1$

Sol：

例題 5：

$L_1:\begin{cases}x=1+2t\\y=1-t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ 與 $L_2:\begin{cases}x=2+t\\y=2-2t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ ，求 L_1 與 L_2 的交點。

Sol：

類題 1：

$A(-2,3)$ 、 $B(-1,2)$ ，求 $\overleftrightarrow{AB}$ 之點參數式。

Ans：$\begin{cases} x=-2-t \\ y=3+t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

類題 2：

$L:\begin{cases} x=-2+2t \\ y=3+t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$ ，求 L 之直線方程式。

Ans： $x-2y=-8$

類題 3：

$L_1:\begin{cases} x=-5+2t \\ y=1+3t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$ 與 $L_2:\begin{cases} x=1+t \\ y=1-2t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$ ，求 L_1 與 L_2 的交點。

Ans：$(\frac{-11}{7},\frac{43}{7})$

主題：交角問題

1、夾角個數

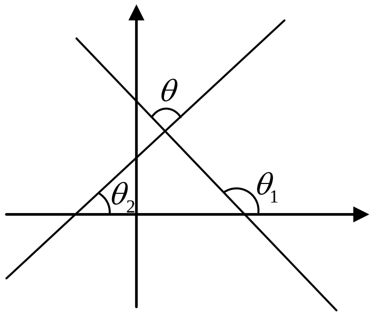
向量夾角：____個⇒ ______________________

直線夾角：____個

2、夾線夾角的算法：

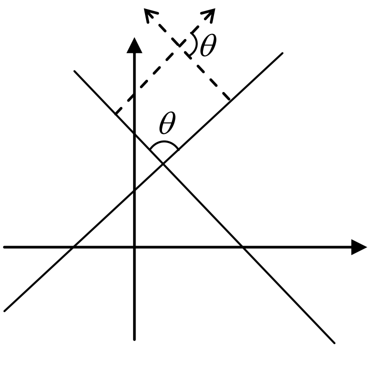
(1)利用斜率，設兩直線夾角為θ，則$\tan\theta=$ ________________

【說明】



(2)利用法向量，設兩直線夾角為θ，則$\cos\theta=$ ________________

【說明】



例題 1：

設 $L_1: x+y-1=0$ 、 $L_2: 3x+4y-2=0$ ，其交角 θ ，求 $\sin\theta$ 值。

Sol：

例題 2：

直線 L 過點 $(2,3)$ 且與 $L_1: x-2y+1=0$ 之交角為 45 度，求 L 之方程式。

Sol：

例題 3：

求 $L_1: \sqrt{3}x-y+3=0$ 與 $L_2: x-\sqrt{3}y+2=0$ 之夾角。

Sol：

例題 4：

設 $\vec{u}=(2,3)$ ，求 $\vec{u}$ 在 $L: 2x-y+3=0$ 之正射影。

Sol：

類題 1：

求兩直線 $3x-y+2=0$ 與 $x+2y+7=0$ 夾角之餘弦值。

Ans：$\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$

類題 2：

設兩直線 $2x+3y=4$ 與 $5x-y=7$ 之夾角 θ，求 $\tan\theta$。

Ans：$\pm\dfrac{17}{7}$

類題 3：

求過點 $(3,-1)$ 且與 $2x+y+1=0$ 交角為 45 度之直線方程式。

Ans：$x+3y=0$ *or* $3x-y=10$

主題：距離公式

1、點到直線的距離公式：

點 $P(x_0,y_0)$ 到 $L:ax+by+c=0$ 之距離 $d(P,L)=$ ______________ 。

【說明】

2、兩平行現的距離公式：

兩平行線 $L_1:ax+by+c_1=0$ 、 $L_2:ax+by+c_2=0$ 之距離

$d(L_1,L_2)=$ ______________ 。

【說明】

例題 1：

求點 $P(2,1)$ 至 $L:3x+4y=5$ 之距離。

Sol：

例題 2：

求兩平行線 $3x+4y-3=0$ 與 $6x+8y=1$ 之距離。

Sol：

例題 3：

直線 L 平行於 $3x+4y+2=0$ 且距離為 2，求 L 之方程式。

Sol：

例題 4：

設 $A(1,2)$、$B(-3,1)$、$L:3x+5y+2=0$ 且 $\overline{AB}$ 交 L 於 P 點，求 $\overline{AP}:\overline{PB}$。

Sol：

類題 1：

求兩平行線 $3x-4y=4$, $6x-8y=7$ 之距離。

Ans：$\dfrac{1}{10}$

類題 2：

求與直線 $3x-4y=-1$ 平行且距離為 3 的直線方程式。

Ans：$3x-4y=14$ *or* $3x-4y=-16$

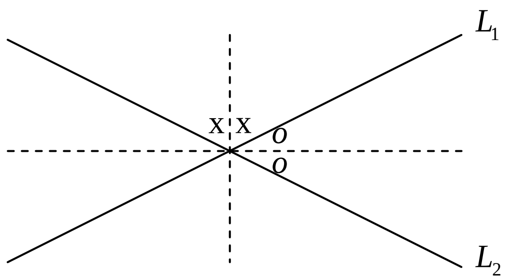
主題：交角平分線

【題型】

兩直線 L_1, L_2 之交角平分線 $\Rightarrow$ 有____條且互相垂直（________）

解題技巧：利用____________________

判定銳角或鈍角平分線的方法：____________



例題 1：

求兩直線 $L_1:3x+4y-4=0$ 與 $L_2:5x-12y-12=0$ 之鈍角交角平分線為及銳角交角平分線。

Sol：

例題 2：

求 $L_1: 2x+y+1=0$, $L_2: x+2y-1=0$, $L_3: 3x-y-7=0$ 所構成之三角形面積的內心坐標。

Sol：

例題 3：

$L_1: 3x-4y-7=0$, $L_2: 12x-5y+6=0$ ，若 L 過點 $(4,5)$ 且與 L_1, L_2 之交角大小相同，求 L 之方程式。

Sol：

類題 1：

求 $2x+y+1=0$ 與 $2x+4y+7=0$ 兩直線的夾角平分線方程式。

Ans： $2x-2y=5, 2x+2y=-3$

類題 2：

求二直線 $3x+4y-7=0$ 與 $4x+3y+2=0$ 所夾鈍角的平分線方程式。

Ans： $x-y+9=0$

主題：三角形面積

【型一】已知向量

以 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 為兩邊的三角形面積＝____________________。

以 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 為兩邊的平行四邊形面積＝____________________。

【說明】

【型二】已知座標

設 $A(a_1,a_2),B(b_1,b_2),C(c_1,c_2)$，則 ΔABC 面積＝____________________。

例題 1：

已知 $A(1,2)$ 、 $B(3,0)$ 、 $C(5,3)$ ，求 ΔABC 之面積。

Sol：

例題 2：

ΔABC 中， $A(1,2)$ 、 $B(-1,5)$ 、 $C(3,x)$ ，若 ΔABC 之面積為 5，求 x 值。

Sol：

例題 3：

設 $|\overrightarrow{AB}|=2, |\overrightarrow{AC}|=3$ 且 ΔABC 之面積為 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ ，求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 之值。

Sol：

類題 1：

設 $|\overrightarrow{a}|=\sqrt{5}$ 、$|\overrightarrow{b}|=\sqrt{7}$ ，且 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=-2$ ，求 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 所圍成之

(1)三角形面積　　(2)平行四邊形面積

Ans：(1) $\dfrac{\sqrt{31}}{2}$ (2) $\sqrt{31}$

主題：二階行列式

1、二階行列式的定義：

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

2、行列式的性質：

(1)行與列互換，其值不變，即$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$。

(2)任一行（列）乘以一數 k 加入另一行（列），其值不變。

如：$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & ka+b \\ c & kc+d \end{vmatrix}$ ； $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \times k = \begin{vmatrix} kc+a & kd+b \\ c & d \end{vmatrix}$

(3)任意兩行（列）對調，其值變號。

如：；$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$

(4)任一行（列）可提出同一數。

如：$\begin{vmatrix} ka & b \\ kc & d \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ；$\begin{vmatrix} a & b \\ kc & kd \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

(5)任意兩行（列）成比例時，其值為 0。

如：$\begin{vmatrix} a & ka \\ b & kb \end{vmatrix} = 0$ ；$\begin{vmatrix} ka & kb \\ a & b \end{vmatrix} = 0$

(6)行列式的加法：某行（列）各元拆成兩項相加等於原行列式

如：$\begin{vmatrix} a+e & b+f \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & f \\ c & d \end{vmatrix}$ ；$\begin{vmatrix} a+e & b \\ c+f & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}$

例題 1：

求下列各行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1234 & 1235 \\ 1236 & 1237 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 201 & 199 \\ 191 & 209 \end{vmatrix}$

Sol：

例題 2：

設 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=5$，求 $\begin{vmatrix} 2a+3c & a+c \\ 2b+3d & b+d \end{vmatrix}$之值。

Sol：

例題 3：

設 $\overrightarrow{a}=(1，-2)$，$\overrightarrow{b}=(3，2)$。

(1) 求以 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 為兩鄰邊的平行四邊形的面積。

(2) 求以 $2\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 為兩鄰邊的平行四邊形的面積。

Sol：

例題 4：

設以 $\overrightarrow{a}$ 、$\overrightarrow{b}$ 為兩鄰邊的平行四邊形面積為 2，求以 $2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 和 $\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}$ 為兩鄰邊的平行四邊形面積。

Sol：

主題：二元一次聯立方程式

二元一次聯立方程式 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ ，

設 $\Delta=$ ＿＿＿＿＿＿、$\Delta_x=$ ＿＿＿＿＿＿、$\Delta_y=$ ＿＿＿＿＿＿

Δ ：表示 x, y 係數的二階行列式值

Δ_x ：表常數取代 x 係數的二階行列式值

Δ_y ：表常數取代 y 係數的二階行列式值

＜性質一＞克拉瑪公式

當 $\Delta\neq 0$ 時，方程式的解 $x=$ ＿＿＿，$y=$ ＿＿＿

Pf：

＜性質二＞解的討論與圖形意義

(1)恰有一組解 $\Rightarrow$ 當＿＿＿＿＿＿＿，即＿＿＿＿ $\Rightarrow$ 解為＿＿＿＿＿＿

$\Rightarrow$ 方程組稱為＿＿＿＿方程組，其圖形為＿＿＿＿＿＿＿＿

(2)　無　解　$\Rightarrow$ 當＿＿＿＿＿＿＿，即＿＿＿＿

$\Rightarrow$ 方程組稱為＿＿＿＿方程組，其圖形為＿＿＿＿＿＿＿＿

(3)無限多組解 $\Rightarrow$ 當＿＿＿＿＿＿＿，即＿＿＿＿

$\Rightarrow$ 方程組稱為＿＿＿＿方程組，其圖形為＿＿＿＿＿＿＿＿

例題 1：

解 $\begin{cases}3x-4y=3\\5x+2y=4\end{cases}$ 的 x, y 值。

Sol：

例題 2：

設兩方程組 $\begin{cases}ax+by=13\\5x+2y=1\end{cases}$ 和 $\begin{cases}6ax+5by=68\\3x-4y=11\end{cases}$ 有相同的解，求 a, b 值。

Sol：

例題 3：

試解方程組 $\begin{cases}(a-3)x-2y=2a\\3x+(2a+1)y=-a-2\end{cases}$ ，並就 a 值討論之。

Sol：

討論原則

(1) $\Delta=0$ ：

求出未知數，代入檢查是 否成比例，並判定無解或無限多解。

(2) $\Delta\neq0$ ：

必為一解，解為 $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$

例題 4：

試分別求出 k 值，使得方程組 $\begin{cases}(2k+1)x+(4k+3)y=3k+1\\(k+2)x+(3k+4)y=1-k\end{cases}$ 為

(1)矛盾方程組　　(2)相依方程組　　(3)相容方程組

Sol：

例題 5：

設 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，若 $\begin{cases}(\alpha+2)x+6y=10\\2x-(\alpha+\beta)y=15\end{cases}$ 為相依方程組，求 α,β 值。

Sol：

例題 6：

方程組 $\begin{cases}ax+(b+1)y=c-1\\x+2y=2\end{cases}$ 表二重合直線，求 $a^2+b^2+c^2$ 的最小值。

Sol：

【題型】常數均為 0

方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y=0 \\ a_2x+b_2y=0 \end{cases}$ ，至少有一解__________，不可能__________。

(1)恰有一解$\Rightarrow$解為__________$\Rightarrow$__________

(2)無限多解或________________$\Rightarrow$__________

例題 7：

方程組 $\begin{cases} 2x-3y=ax \\ 6x+ay=-5y \end{cases}$ 除了 $(0,0)$ 外，尚有其他解，求 a 值。

Sol：

類題 1：

解二元一次方程組 $\begin{cases} 2x-(a-3)y=a+5 \\ (3-a)x+2y=7-a \end{cases}$ ，並就 a 值加以討論。

Ans：(1) $a\neq 1,5$ 時，恰有一解 $(\dfrac{a-1}{a-5},\dfrac{1-a}{a-5})$　(2) $a=5$ 時，無解

(3) $a=1$ 時，無限多解，其解為 $\begin{cases} x=t \\ y=3-t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

類題 2：

$L_1:ax-6y=5a-3$ ， $L_2:2x+(a-7)y=29-7a$ ，試就 a 值討論此兩直線之相交情形。

Ans：(1) $a\neq 3,4$ 時，L_1 與 L_2 恰有一交點　(2) $a=4$ 時，L_1 與 L_2 平行

(3) $a=3$ 時，L_1 與 L_2 重合。

類題 3：

試分別求出 k 之值使得方程組 $\begin{cases} (2k+1)x+(4k+3)y=3k \\ (k+2)x+(3k+4)y=1-k \end{cases}$ 為

(1)矛盾方程組　(2)相依方程組　(3)相容方程組。

Ans：(1) $k=1$ (2) $k=-1$ (3) $k\neq\pm 1$