主題：空間概念

1、空間與平面的比較

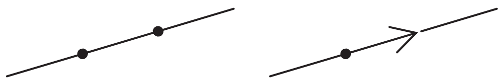
(1)平面可做出______條互相垂直之直線。

(2)空間可做出______條互相垂直之直線。

2、決定一直線

(1)相異兩點

(2)一點與直線方向



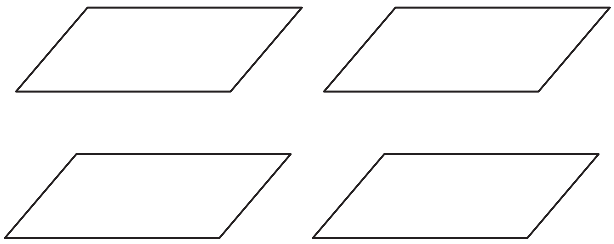
3、決定一平面

(1)不共線三點

(2)一直線與線外一點

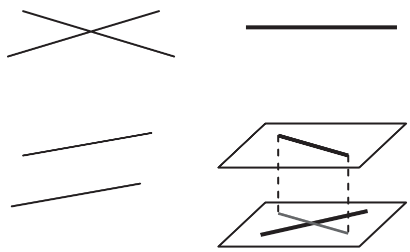
(3)二相交直線（交於一點）

(4)二平行直線



4、直線與直線的關係

- 相交
  - (1) 交於一點
  - (2) 重合
- 不相交
  - (3) 平行
  - (4) 歪斜（空間才有）

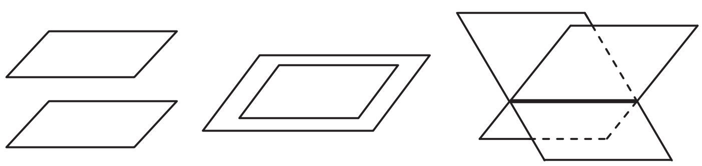


5、平面與平面的關係

(1)平行

(2)重合

(3)相交於一直線

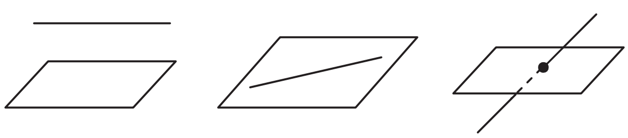


6、直線與平面的關係

(1)平行

(2)直線落在平面上

(3)交於一點



7、垂直的性質

空間中，直線與平面有以下的垂直性質：

(1)若一直線 L 與平面 E 相交於 A ，而 L 與在 E 上且過 A 點之每一直線垂直，則稱 L 與 E 垂直。（直線與平面垂直定義）

(2)若一直線 L 與平面 E 相交於 A ，而 L 與在 E 上且過 A 點之相異兩直線垂直，則 L 與 E 垂直。（直線與平面垂直定理）

例題 1：

下列敘述哪些是正確的？

(1)在平面上，若兩相異直線不相交，則它們必平行

(2)在空間中，若兩相異直線不相交，則它們必平行

(3)在平面上，任意兩相異直線一定有公垂線（仍在該平面上）

(4)在空間中，任意兩相異直線一定有公垂線

(5)在空間中，相交的兩相異平面一定有公垂面（公垂面是指與該兩平面都垂直的平面）

Sol：

例題 2：

下列有關空間的敘述，哪些是正確的？

(1)過已知直線外一點，「恰有」一平面與此直線垂直

(2)過已知直線外一點，「恰有」一平面與此直線平行

(3)過已知平面外一點，「恰有」一直線與此平面平行

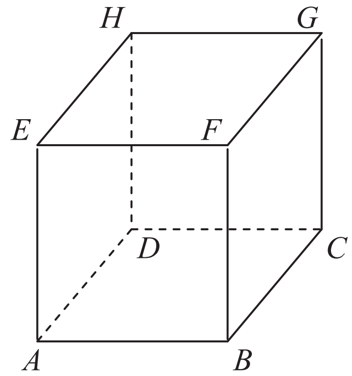
(4)過已知平面外一點，「恰有」一平面與此平面垂直

(5)過已知平面外一點，「恰有」一平面與此平面平行

Sol：

例題 3：

右圖為一正立方體，試問下列何者正確？



(1) $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EG}=0$

(2) $\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{EF}=0$

(3) $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AC}$

(4) $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{AG}=0$

(5) $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{EC}$

Sol：

例題 4：

如上圖，下列何者與 $\overline{AF}$ 共平面？

(1) $\overline{FC}$ (2) $\overline{EG}$ (3) $\overline{HB}$ (4) $\overline{HD}$ (5) $\overline{GD}$

Sol：

例題 5：

一個正立方體的八個頂點中，已知有四個頂點，彼此之間的距離都是 1，求此正立方體的體積？

Sol：

主題：三垂線定理

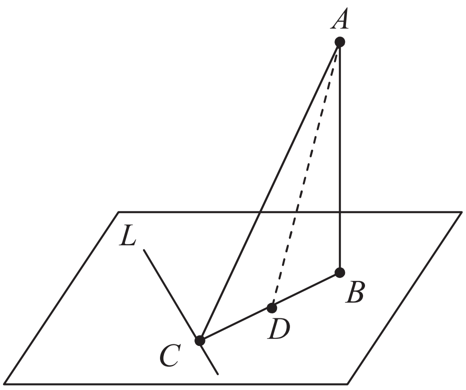
直線L在平面E上，點C在L上，點B在E上但不在L上，點A不在E上，則：

(1)若$\overline{AB}\perp E$且$\overline{BC}\perp L\Rightarrow$____________

(2)若$\overline{AB}\perp E$且$\overline{AC}\perp L\Rightarrow$____________

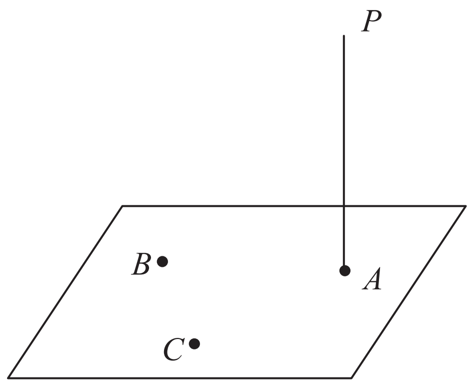
(3)**不成立：**$\overline{AC}\perp L$且$\overline{BC}\perp L\not\Rightarrow\overline{AB}$垂直$E$

Pf：



例題 1：

設A,B,C三點在平面E上，且$\overline{AB}\perp\overline{BC}$、$\overline{PA}\perp E$於點$A$。已知$\overline{PA}=3$, $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=12$，求$\overline{PC}$。



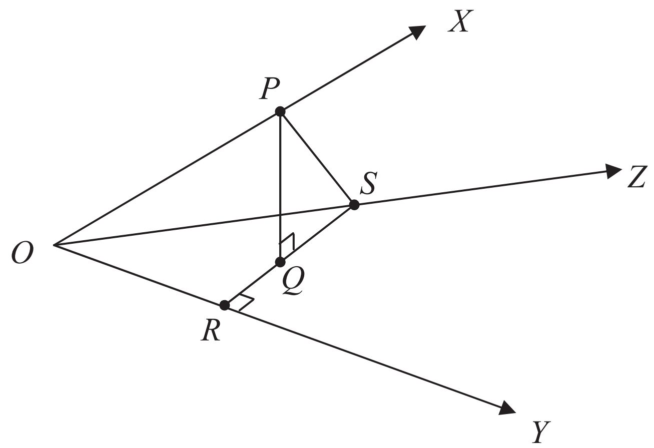
Sol：

例題 2：

不共線三射線$\overline{OX}$, $\overline{OY}$, $\overline{OZ}$互成 30 度，P點在$\overline{OX}$上，且$\overline{OP}=2$。P至平面OYZ的投影為Q，由Q至$\overline{OY}$之垂足為R。又直線$\overleftrightarrow{QR}$交$\overleftrightarrow{OZ}$於S點。試求：

(1)$\overline{OR}$長　　(2)$\overline{RS}$長　　(3)$\overline{PS}^2+\overline{PR}^2$

Sol：



例題 3：

直角△ABC中，∠C為直角。$\overline{AC}$＝15，$\overline{BC}$＝20，自C點作平面ABC之垂直線段$\overline{PC}$，已知$\overline{PC}$＝5，求P點到斜邊$\overline{AB}$的垂直距離。

Sol：

主題：兩面角

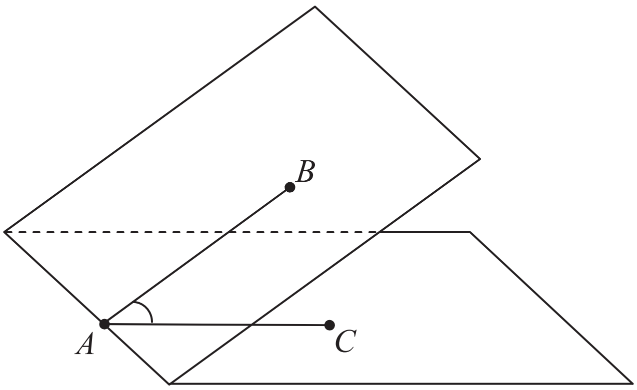
【定義】

在平面E與F之交線（稜）$\overleftrightarrow{PQ}$上取一點A，在E上作$\overleftrightarrow{AB}\perp\overleftrightarrow{PQ}$。在$F$上作$\overleftrightarrow{AC}\perp\overleftrightarrow{PQ}$，則____________________。

【求法】

(1)餘弦定理（知三邊）$\Rightarrow \cos\theta=$ __________________

(2)用向量（座標化）$\Rightarrow \cos\theta=$ __________________



例題 1：

設A,B,C三點在平面E上，且$\overline{AB}\perp\overline{BC}$、$\overline{PA}\perp E$於點$A$。已知

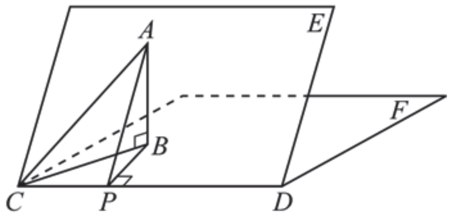
$\overline{PA}=3$, $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=12$，求$\overline{PC}$。

Sol：

例題 2：

兩平面E,F交於一直線CD。A是平面E上一點，且A在F的正射影為B。已知$\angle ACB$為 30 度，E,F所為成的兩面角為 45 度，求$\cos\angle ACD$。

Sol：



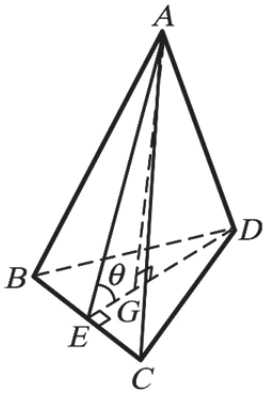
例題 3：

四面體$ABCD$中，令$\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=4$，$\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=2$，若$\theta$為平面$ABC$和平面$BCD$所夾之二面角，求：

(1) $\cos\theta$　　(2)四面體體積

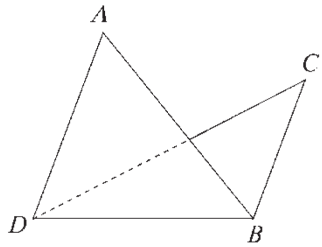
Sol：

體積公式：
柱體體積＝底面積 × 高
錐體體積＝$\frac{1}{3}$ × 底面積 × 高



例題 4：

如下圖，將一張正方形的紙 $ABCD$ 沿著對角線 $\overline{BD}$ 摺起，使得 $\angle ABC = 60°$，求二平面 ABD 與 BCD 的夾角。



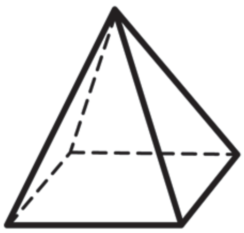
Sol：

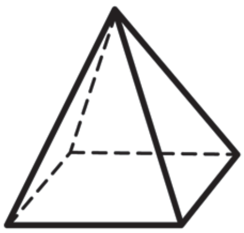
例題 5：

有一各稜長均為 8 的金字塔形，其側面為四個等腰三角形，底面之邊長為 6 的正方形，若相鄰兩側之夾角為α，底面與側面之夾角為β，試求：

(1) $\cos\alpha$　　(2) $\cos\beta$　　(3)此五面體體積

Sol：





類題 1：

下列敘述何者正確？

(1)空間中部相交的兩直線必會平行

(2)垂直於同一平面的兩直線必互相平行

(3)若空間直線 L 與平面 E 交於一點，則存在唯一平面包含 L 且和 E 垂直

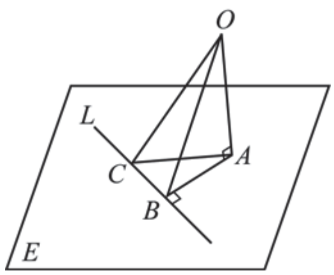
(4)若空間直線 L 與平面 E 互相垂直，則包含 L 的平面必與 E 垂直

(5)給空間中兩相異直線，則必存在直線與此兩直線均垂直

Ans：245

類題 2：

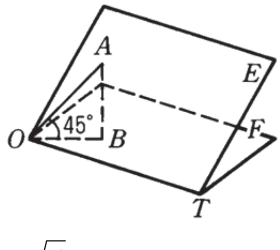
如圖，$\overline{OA}\perp$ 平面 E，且 $\overline{AB}\perp L$，已知 $\overline{OA}=3$，$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=3$，求 $\overline{OC}$ 長。



Ans：$\sqrt{34}$

類題 3：

如圖，兩半平面 E,F，交於一直線 OT，A 是平面 E 上一點，令 A 在平面 F 之正射影為 B，已知 $\angle AOB$ 為 45 度，E,F 所夾之二面角度量為 60 度，設 $\angle AOT=\theta$，求 $\sin\theta$ 值。



Ans：$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

類題 4：

右圖為一正立方體，被一平面截出一個四邊形 $ABCD$，其中 B,D 分別為稜的中點，且 $\overline{EA}$ ： $\overline{AF}$ ＝1：2，求 $\cos\angle DAB$。

Ans： $\frac{1}{37}$

類題 5：

設二平面 E,F 交於一直線 L，平面 E 上有一點 A，A 在 F 的正射影點為 B，自 B 作 L 的垂線，垂足點為 C。若 $\overline{AB}$ ＝6，$\overline{AC}$ ＝12，試求：

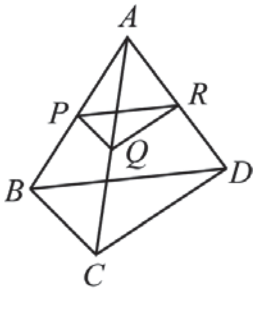
(1) $\overline{BC}$ 長　　(2)兩平面之銳夾角

Ans：(1) $6\sqrt{3}$　(2)30°

類題 6：

下圖正四面體 $ABCD$ 中，若在 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ 上分別取點 P,Q,R。已知 $\overline{AD}$ 垂直平面 PQR 且 $\overline{AP}$ ＝6，求

(1) $\overline{AR}$　　(2)$\triangle PQR$ 的面積



Ans：(1)3　(2) $9\sqrt{2}$

主題：正四面體的性質

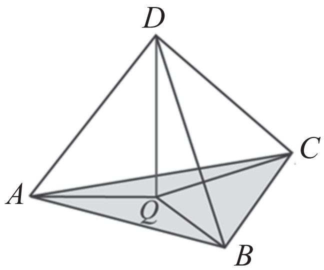
【定義】

由四個正三角形所組成的立體圖形，稱為正四面體，設邊長為 a。

【性質 1】正四面體 $D-ABC$，D 點對 ΔABC 之投影點 Q 為 ΔABC 之______。

【性質 2】正四面體 $D-ABC$，其高為__________；其體積為__________

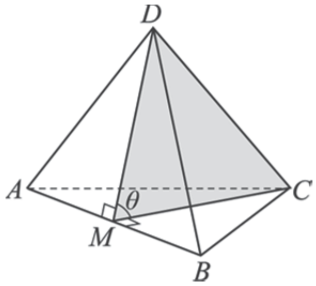
Pf：



【性質 3】若正四面體 $D-ABC$ 之兩面角為 θ，則 $\cos\theta =$ ______

【性質 4】正四面體 $D-ABC$，歪斜兩稜（有三組）之距離 $d =$ ______ $=$ ______

Pf：



【性質 5】正四面體$D-ABC$，外接球之半徑$R=$ ______

【性質 6】正四面體$D-ABC$，內切球之半徑$r=$ ______

Pf：

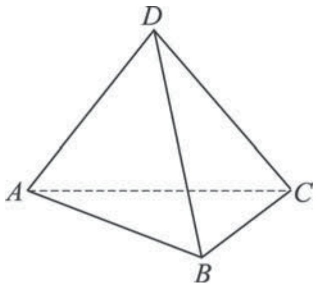
例題 1：

已知正四面體$D-ABC$的稜長為 6，回答下列問題：

(1)高　(2)體積　(3)內切球半徑

(4)外接球半徑　(5)兩歪斜稜距離　(6)設θ為兩面角，求$\sin\theta$

Sol：



例題 2：

設 $ABCD$ 為一四面體，而 $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=1$，$\angle DAB=\angle DAC=\angle BAC=30°$，求$\triangle BCD$ 的面積。

Sol：

例題 3：

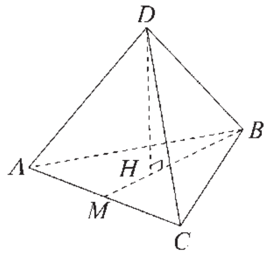
邊長為 2 的正立方體的八個頂點，若選取三個頂點連成正三角形，求此正三角形面積。

Sol：

類題 1：

如圖，若 $D-ABC$ 為一正四面體，邊長為 10，$\overline{DH}$ 垂直平面 ABC 於 H，則下列何者正確？

(1) H 為$\triangle ABC$ 之內心



(2) $\overrightarrow{BD}\perp\overrightarrow{AC}$

(3) $\overline{DH}=\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$

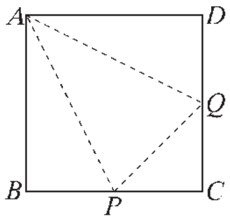
(4)若平面 ABC 與平面 ADC 的夾角為θ，則 $\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$

(5) $\overline{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 的距離為 $5\sqrt{2}$

Ans：125

類題 2：

如下圖，正方形 $ABCD$ 的邊長為 a，而 P，Q 各為 $\overline{BC}$，$\overline{CD}$ 的中點，今將此正方形沿虛線向上摺起，使 B，C，D 三點重合，令此重合點為 R，求四面體 $A\text{-}PQR$ 之體積。



Ans：$\dfrac{a^3}{24}$

類題 3：

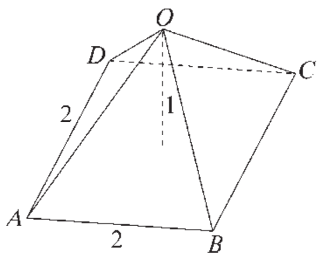
長方體的一頂點 O，以 O 為頂點的三邊為 $\overline{OA}$，$\overline{OB}$，$\overline{OC}$，若 $\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=2$，$\angle BAC=60°$，試求

(1) $\overline{OA}^2$　(2) $\overline{OB}^2$　(3) $\overline{OC}^2$　(4) O 到平面 ABC 的距離

Ans：(1) 3　(2) 6　(3) 1　(4) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

類題 4：

下圖是一個正四角錐，它的底面是一個邊長為 2 的正方形，此正四角錐的高為 1，求兩相鄰側面的夾角之度數。



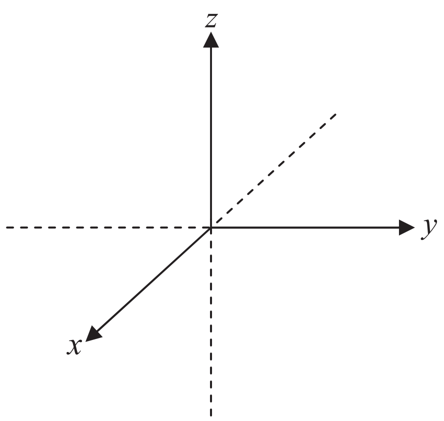
Ans：120°

主題：空間坐標系

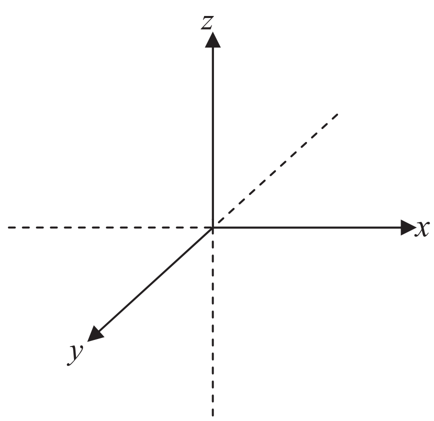
1、空間坐標系：

在空間中任取一點O，過O點作兩兩互相垂直的三條直線，在這三條直線上，各取一個方向做為正方向，並取適當長度做為單位長，這樣每條直線就變成以O點為原點的數線，分別為x軸、y軸、z軸，統稱為坐標軸。我們稱原點O、x軸、y軸與z軸組成了空間坐標系。

(1)右手系空間坐標



(2)左手系空間坐標



2、坐標平面：

在空間坐標中

(1) x軸與y軸所在的平面稱為xy平面

(2) y軸與z軸所在的平面稱為yz平面

(3) z軸與x軸所在的平面稱為zx平面

3、卦限：

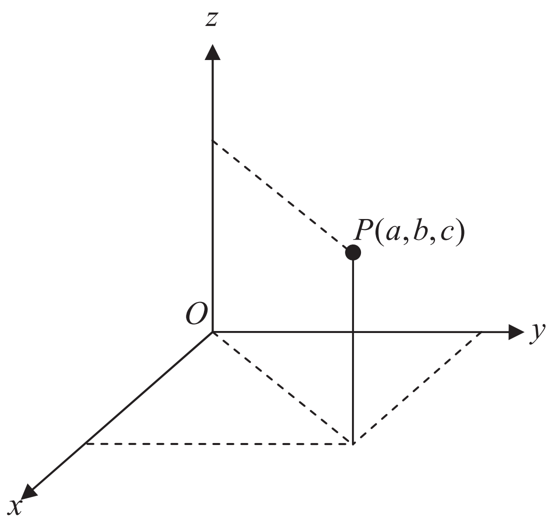
三個坐標平面，將空間分成 8 個部分，每一個部分稱為一個卦限。

(1)第一卦限為$\{(x,y,z)\mid x>0,y>0,z>0\}$

(2)其餘卦限之順序未明確規定

主題：坐標表示法

設 P 為空間中一點，過 P 點分別作一平面與 x 軸、 y 軸、 z 軸垂直，則這三平面順次與 x 軸、 y 軸、 z 軸交點的坐標 a,b,c 分別稱為 P 點的 x 坐標、 y 坐標與 z 坐標。以 $P(a,b,c)$ 表示 P 點的坐標為 (a,b,c) 。



【性質 1】坐標軸上的點

(1) x 軸上的點坐標必型如⇒____________⇒____________

(2) y 軸上的點坐標必型如⇒____________⇒____________

(3) z 軸上的點坐標必型如⇒____________⇒____________

【性質 2】坐標平面上的點坐標

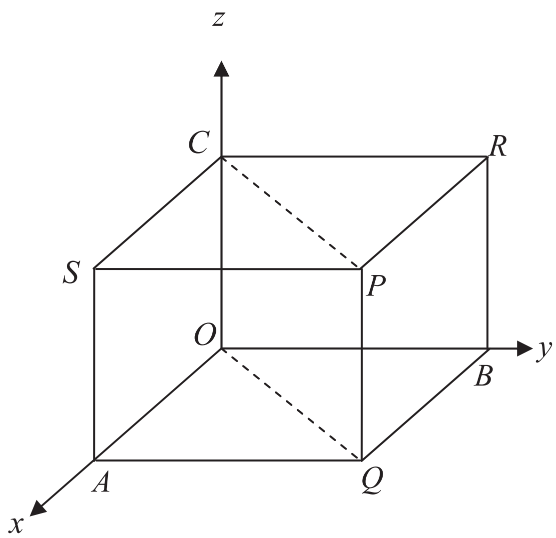
(1) xy 平面上的點坐標必型如⇒____________⇒____________

(2) yz 平面上的點坐標必型如⇒____________⇒____________

(3) zx 平面上的點坐標必型如⇒____________⇒____________

例題 1：

如圖，試找出各點坐標及 $P(a,b,c)$ 對各軸及各面的投影點及對稱點座標。



點	A	B	C	Q	R	S
坐標						

	正射影坐標	對稱點坐標	到軸(面)距離
x 軸			
y 軸			
z 軸			
xy 平面			
yz 平面			
zx 平面			
原點			

主題：兩點距離公式及分點公式

1、兩點距離公式

(1)平面上兩點 $A(x_1,y_1)$ 、 $B(x_2,y_2) \Rightarrow d(A,B)=\overline{AB}=$______

(2)空間中兩點 $A(x_1,y_1,z_1)$ 、 $B(x_2,y_2,z_2) \Rightarrow d(A,B)=\overline{AB}=$______

2、分點公式

(1)平面上兩點 $A(x_1,y_1)$ 、 $B(x_2,y_2)$ ，滿足 P 在 $\overline{AB}$ 上且 $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$

$\Rightarrow P$ 點坐標為

______

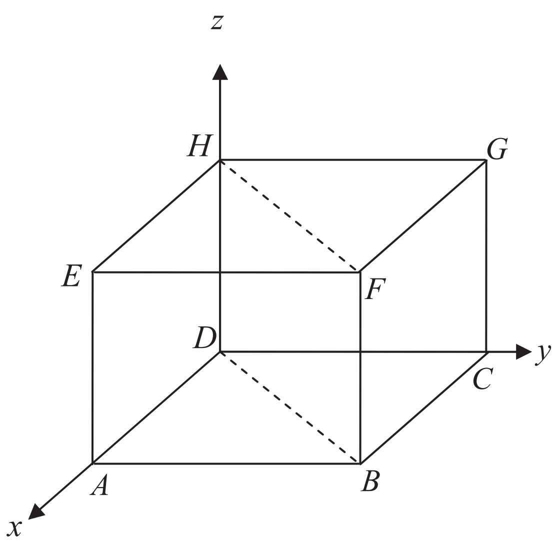
(2)空間中兩點 $A(x_1,y_1,z_1)$ 、 $B(x_2,y_2,z_2)$ ，滿足 P 在 $\overline{AB}$ 上且 $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$

$\Rightarrow P$ 點坐標為

______

例題 1：

如圖，已知 $F(1,2,3)$ ，試求其餘各點坐標及 F 點到各處的距離。



A 點______

B 點______

C 點______

D 點______

E 點______

G 點______

H 點______

	x 軸	y 軸	z 軸	xy 平面	xz 平面	yz 平面
與 F 之距離						

例題 2：

設 P 點在第一卦限，且 P 點到 x 軸、y 軸、z 軸的距離分別為 5、$\sqrt{34}$、$\sqrt{41}$，求 P 點坐標。

Sol：

例題 3：

已知 $P(2,-3,1)$，試求

(1) P 對 xy 平面的正射影　　(2) P 對 yz 平面的對稱點　　(3) P 對 y 軸的對稱點

Sol：

例題 4：

一動點 P 與原點的距離為其與另一點 $(2,0,0)$ 距離的一半，試求滿足此條件之動點 P 所形成的軌跡圖形之方程式。

Sol：

動點軌跡方程式

(1)設動點 $P(x,y,z)$

(2)依動點滿足之條件列式

(3)求動點 P 之 x,y,z 的關係式

例題 5：

已知 $A(1,2,3)$、$B(2,-1,-1)$，求滿足 $\overline{PA}=\overline{PB}$ 之點 P 所形成的軌跡方程式。

Sol：

例題 6：

設 A, B 兩點坐標分別為 $A(2,-1,2)$ 、 $B(-1,5,z)$ 且 $\overline{AB}=7$ ，求 z 的坐標。

Sol：

例題 9：

設 P 在 xy 平面上，且與三點 $A(-4,8,2)$ 、$B(2,5,6)$、$C(2,0,0)$ 等距，求 P 值。

Sol：

例題 10：

已知一正四面體其中三頂點 $(0,0,0)$ 、$(2,0,0)$ 、$(1,1,\sqrt{2})$ ，求另一頂點坐標。

Sol：

例題 11：

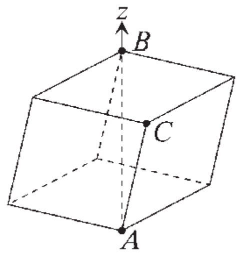
空間中一點 P 至三軸之距離分別為 $2,3,4$ ，試求點 P 至原點的距離。

Sol：

例題 12：

如下圖，有一邊長為1的正方體。今置頂點A於空間坐標系中之原點$(0,0,0)$，置頂點B於正z軸上，求頂點C之z坐標

Sol：



例題 13：

設$A(2,6,3)$、$B(2,2,-1)$，已知C在$\overleftrightarrow{AB}$上且滿足$\overline{AC}=3\overline{BC}$，求$C$點坐標。

Sol：

類題 1：

一線段$\overline{AB}$在xy平面，yz平面，zx平面上的正射影長分別為4，$\sqrt{15}$，$\sqrt{21}$，求$\overline{AB}$長。

Ans：$\sqrt{26}$

類題 2：

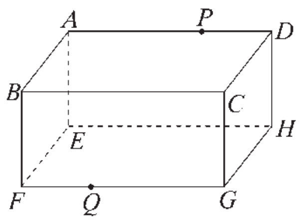
正四面體 $ABCD$，已知 B,C,D 的坐標分別為 $B(0,0,0)$、$C(1,0,0)$、$D(x,y,0)$，其中 x，y 皆為正，求

(1) D 的坐標　　(2) A 的坐標　　(3)設 A 在底面 BCD 正射影為 H，則 H 的坐標

Ans：(1) $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$　(2) $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3})$或$(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{3})$　(3) $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},0)$

類題 3：

長方體 $ABCD$ - $EFGH$（如下圖）中，$\overline{AB}=1$，$\overline{AE}=2$，$\overline{AD}=3$，$\overline{PA}=2$，$\overline{FQ}=1$，求 $\overline{PQ}$ 的長。



Ans：$\sqrt{6}$

類題 4：

設線段 $\overline{AB}$ 之長為 5，此線段在 xy 平面，yz 平面上之正射影長分別為 $\sqrt{19}$，$\sqrt{21}$，求此線段在 zx 平面上之正射影長。

Ans：$\sqrt{10}$

類題 5：

空間中兩點 $A(2,-1,0)$、$C(1,1,1)$。已知 B 在 $\overline{AC}$ 上且 $\overline{AB}:\overline{BC}=1:2$，求 B 點座標。

Ans：$(\frac{5}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

主題：空間向量

1、空間向量

幾何部分，空間與平面運算性質相同。代數部分（坐標化），空間向量比平面向量多個____。

設 $A(x_1,y_1,z_1)$ 、 $B(x_2,y_2,z_2)$ 、 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 、 $\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$ ，則

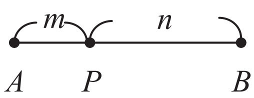
(1) $\overrightarrow{AB}=$ ____________________

(2) $|\overrightarrow{AB}|=$ ____________________

(3) 相等：若 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}\Rightarrow$ ____________________

(4) 加法： $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=$ ____________________

(5) 係數積： $r\overrightarrow{a}=$ ____________________

(6) 分向量：若  $\Rightarrow$ ________________ （O為任意點）

(7) 內積： $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=$ ____________________

(8) 平行：若 $\overrightarrow{a}\,//\,\overrightarrow{b}\Rightarrow$ ___________ $\Rightarrow$ ____________________

(9) 垂直：若 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}\Rightarrow$ ___________ $\Rightarrow$ ____________________

(10)柯西不等式 $\Rightarrow$ ____________________________________

(11)夾角： $\cos\theta=$ ____________ $\Rightarrow$ ______________________

(12) $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 的正射影＝ ____________ $\Rightarrow$ ______________________

(13) ΔABC 的面積＝ ____________________

(14) $\overrightarrow{a}$ 的單位向量＝ ______ $\Rightarrow$ ______________

例題 1：

已知 $\overrightarrow{a}=(1,2,2)$ 、 $\overrightarrow{b}=(1,-1,1)$ ，求 $(\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})$ 。

Sol：

例題 2：

已知 ΔABC ， $A(1,1,1)$ 、 $B(0,3,3)$ 、 $C(3,0,2)$ ，求

(1) $\sin A$ (2) ΔABC 面積 (3) $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 的正射影

Sol：

例題 3：

$A(1,2,3)$、$B(2,5,3)$、$C(2,6,4)$，已知 D 與此三點構成一平行四邊形，求 D 點坐標。

Sol：

例題 4：

空間中三點 $A(4,1,1)$ 、 $B(0,6,0)$ 、 $C(-1,1,2)$ ，試求 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ 。

Sol：

例題 5：

$\overrightarrow{u}=(3,2,4)$ 、 $\overrightarrow{v}=(2,1,-1)$ ，設 $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}+t\overrightarrow{v}$ ，求當 t 為多少時， $\overrightarrow{w}$ 的長度最小。

Sol：

例題 6：

已知 ΔABC 中， $\overrightarrow{AB}=(1,2,2)$ 、 $\overrightarrow{AC}=(0,3,4)$ ，試求 ΔABC 的周長。

Sol：

例題 7：

設 $\overrightarrow{a}=(1,-2,2)$ ，求 $\overrightarrow{a}$ 同向之單位向量。

Sol：

例題 8：

設 $A(1,0,-1)$ 、 $B(2,-2,1)$ 、 $C(3,2,1)$ ，已知 $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD}$ 且 $|\overrightarrow{CD}|=6$ ，試求 D 點坐標。

Sol：

例題 9：

設 $\overrightarrow{a}=(x,-4,3+z)$ 、 $\overrightarrow{b}=(y,-2,1)$ 、 $\overrightarrow{c}=(1,4z,-x)$ 且 $\overrightarrow{a} \,//\, \overrightarrow{b}$ 、 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{c}$ ，求 (x,y,z) 。

Sol：

例題 10：

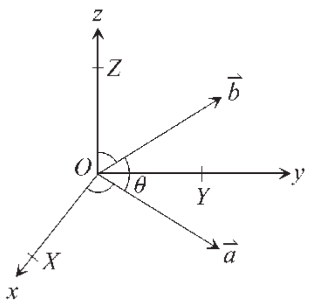
空間中四點 A,B,C,D，若 $\overline{AB}=1$、$\overline{BC}=2$、$\overline{CD}=3$ 且 $\angle ABC=\angle BCD=120°$，$\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{CD}$ 夾角為 $60°$，求 $\overline{AD}$ 長。

Sol：

例題 11：

設 X,Y,Z 三點為別落於空間坐標 x,y,z 軸上，求 $\angle XOY$ 在 xy 平面上之角平分線與 $\angle YOZ$ 在 yz 平面上之角平分線的夾角。

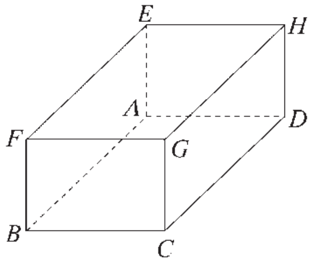
Sol：



例題 12：

如下圖，長方體之長，寬，高各為 4，5，3，試求 $\overrightarrow{AG}$ 與 $\overrightarrow{FD}$ 的夾角。

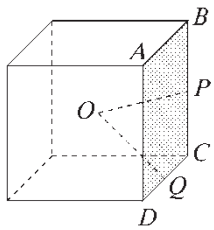
Sol：



例題 13：

如下圖，$ABCD$ 為正立方體的一個面，P、Q 分別為 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 的中點，O 為正立方體的中心，求 $\cos(\angle POQ)$。

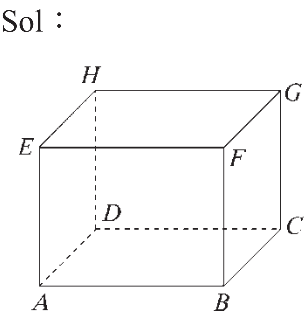
Sol：



例題 14：

如下圖，長方體 $ABCD\text{-}EFGH$ 中，$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=2$ ， $\overline{AE}=3$，求 $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{CH}$ 。

Sol：



類題 1：

設 $\overrightarrow{a}=(x，y，z)$，$\overrightarrow{b}=(2，3，6)$，若 $|\overrightarrow{a}|=5$，求 $2x+3y+6z$ 的最大值。

Ans：35

類題 2：

已知平行四邊形 $ABCD$ 中，$A(1，2，3)$，$B(4，5，6)$，$C(-5，8，7)$，求 D 點坐標。

Ans：$(-8，5，4)$

類題 3：

設 $\overrightarrow{a}=(2，-1，-2)$，$\overrightarrow{b}=(1，2，2)$，$\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$，

(1)若 $\overrightarrow{c}\perp\overrightarrow{a}$，則 $t=$ ＿＿＿＿＿＿。

(2)若 $\overrightarrow{c}$ 平分 $\overrightarrow{a}$ 、$\overrightarrow{b}$ 的夾角時，$t=$ ＿＿＿＿＿＿。

Ans：(1) $\frac{9}{4}$　(2) 1

類題 4：

設 a，b，c 均為正數且 $a+b+c=9$，則 $\frac{4}{a}+\frac{9}{b}+\frac{16}{c}$ 之最小值為＿＿＿＿＿＿。

Ans：9

類題 5：

一稜長為 a 的正四面體 $ABCD$，$\overline{CD}$ 之中點為 M，$\overline{BC}$ 之中點為 N，則

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}$　(2) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$

Ans：(1) $\frac{a^2}{2}$　(2) $\frac{5a^2}{8}$

主題：公垂向量

1、公垂向量的定義

若 $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{n}$ 且 $\overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{n}$ ，則稱 $\overrightarrow{n}$ 為 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ 的公垂向量。

※公垂向量不唯一，但均________

2、公垂向量的運算

若已知 $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 、 $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ，

則其公垂向量 $\overrightarrow{n} =$ ______________________________ 。

Pf：

設 $\overrightarrow{n} = (x, y, z)$ ，那麼

$$\begin{cases} \overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{n} \\ \overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \\ \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 x + a_2 y + a_3 z = 0 \\ b_1 x + b_2 y + b_3 z = 0 \end{cases}$$

（題型：求比例）

※記法：去頭去尾法

$$\begin{array}{cccccccc} \overrightarrow{a} & = & \cancel{a_1} & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 & \cancel{a_3} \\ \overrightarrow{b} & = & \cancel{b_1} & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 & \cancel{b_3} \end{array}$$

$$\overrightarrow{n} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

二階行列式值的運算

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

例題 1：

設 $\overrightarrow{a}=(1,1,1)$ 、 $\overrightarrow{b}=(5,3,2)$ ，求 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 之公垂向量之單位向量。

Sol：

例題 2：

已知一平面 $E//\overrightarrow{r_1}=(1,1,-1)$ 且 $E//\overrightarrow{r_2}=(2,-1,3)$ ，試求平面 E 的法向量。

Sol：

例題 3：

已知 $xyz\neq 0$ 且 $2x-y+z=0$ 、 $x+y+z=0$ ，求 $x:y:z$ 。

Sol：

類題 1：

設 $\overrightarrow{a}=(2,3,1)$ 、 $\overrightarrow{b}=(1,-1,0)$ ，求 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 之公垂向量之單位向量。

Ans： $\pm(\frac{1}{3\sqrt{3}},\frac{1}{3\sqrt{3}},\frac{-5}{3\sqrt{3}})$

類題 2：

設 $xyz\neq 0$ 且滿足 $3x+y-2z=2x+3y-3z=5x+4y-5z$ ，試求 $\frac{x+y}{2x-z}$ 。

Ans： -8

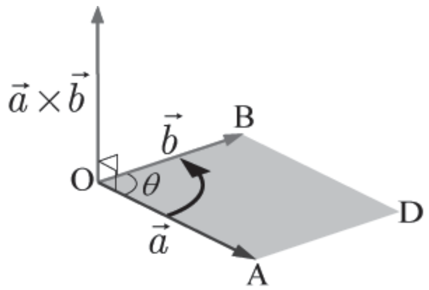
主題：外積（$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 是　　　　　）

1、外積的定義

已知 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$、$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$，則兩向量的外積（$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$）仍是向量，且滿足下列兩條件

(1)方向：$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\ //\ \overrightarrow{n}$ 且滿足右手規則　　（$\vec{n}$表示$\vec{a}$與$\vec{b}$之公垂向量）

(2)大小：$|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|=$ $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 所展開之平行四邊形面積值



那麼，$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=$ ________________

【說明】

2、行列式與面積的關係

(1)在平面上：

$\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$ 、 $\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$ ，則 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 所組成之

三角形面積為 ________ 平行四邊形面積為 ________

(2)在空間中：

$\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 、 $\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$ ，則 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 所組成之

三角形面積為 ____________ 平行四邊形面積為 ____________

例題 1：

平面上有三點 $A(1,2)$ 、 $B(-1,3)$ 、 $C(3,7)$ ，求 ΔABC 之面積。

Sol：

例題 2：

空間中有三點 $A(1,2,3)$ 、 $B(-1,3,2)$ 、 $C(3,3,1)$ ，求 ΔABC 之面積。

Sol：

類題 1：

求 $\overrightarrow{u}=(1,2)$ 、 $\overrightarrow{v}=(3,-2)$ 所圍成的平行四邊形的面積。

Ans：8

類題 2：

$A(0,0,0)$ 、 $B(0,2,3)$ 、 $C(-1,3,0)$ ，求 ΔABC 的面積。

Ans： $\dfrac{\sqrt{94}}{2}$