3-1 向量意義及運算

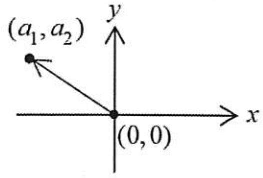
1. 平面向量的意義：(包含 方向 和 大小) ⇒ 向量可以 平移

【幾何表示法】 ①方向：從點 A 到點 B 的方向

$\overrightarrow{AB}$ ②大小：點 A 到點 B 的距離，以 $|\overrightarrow{AB}|$ 表示

【坐標表示法】 ①方向：從 $(0,0)$ 到 (a_1,a_2) 的方向。

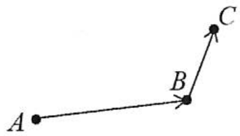
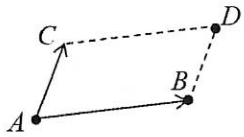
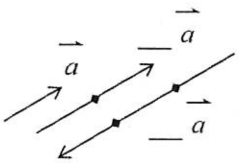
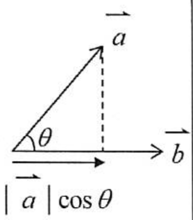
$\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$ ②大小：$|\overrightarrow{a}|=\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}}$。



◎設 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，則 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$。

◎若 O 為原點，$\overrightarrow{OA}=$ A 點坐標 。

2. 平面向量的運算：設 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$、$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$

	幾何表示法	坐標表示法
相等	若 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$， 則①方向 相同 ②大小 相等 	若 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}$，則 $a_1=b_1$ 且 $a_2=b_2$
加法	【三角形】 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$  【平行四邊形】 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ 	$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2)$ $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2)$
係數積 (平行)	$r\overrightarrow{a}$ ①方向 平行 $r>0$： 同向 $r<0$： 反向 ②大小 $\lvert r\rvert$倍  【負號】$-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$	$r\overrightarrow{a}=(ra_1,ra_2)$
內積	$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\lvert\overrightarrow{a}\rvert\lvert\overrightarrow{b}\rvert\cos\theta$ $\lvert\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\rvert=$ 投影長╳被投影長 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}>0\Leftrightarrow\theta$是 銳角 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}<0\Leftrightarrow\theta$是 鈍角 	$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=a_1b_1+a_2b_2$

3. 平行與垂直：設 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$、$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$

(1)平行：若 $\overrightarrow{a}/\!/\overrightarrow{b}$，則 $\overrightarrow{a}=t\overrightarrow{b}$ ⇒ $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}$

(2)垂直：若 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$，則 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$ ⇒ $a_1b_1+a_2b_2=0$ ⇒ $\overrightarrow{b}/\!/(b,-a)$

EXAMPLE 1

平面上兩向量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{CD}$，其中 $A(-3,4)$，$B(1,2)$，$\overrightarrow{CD}$ 長度 6 單位，且與 x 軸正向夾角 120°，求 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$。(以坐標表示法作答)

答案：$(1,-2+3\sqrt{3})$

$\overrightarrow{AB}=(4,-2)$

$\overrightarrow{CD}=(6\cos 120^\circ, 6\sin 120^\circ)$

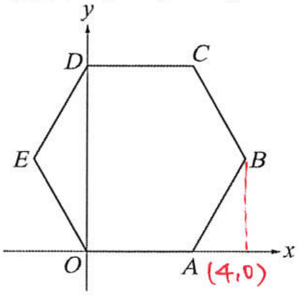
$=(-3, 3\sqrt{3})$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=(1, -2+3\sqrt{3})$

EXAMPLE 2

$OABCDE$ 為坐標平面上一正六邊形，其中 O 為原點，A 點坐標為$(4,0)$，求向量 $\overrightarrow{BD}$ 的坐標表示法。

答案：$(-6,2\sqrt{3})$



$B(6, 2\sqrt{3})$

$D(0, 4\sqrt{3})$

$\overrightarrow{BD}=(-6, 2\sqrt{3})$

EXAMPLE 3

坐標平面上三點 $A(1,4)$、$B(2013,2014)$、$C(3,2)$，求｜$\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$｜。

答：$2\sqrt{2}$

$|\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AC}|$

$=|(2,-2)|=2\sqrt{2}$

EXAMPLE 4

設 $\overrightarrow{a}=(3,-4)$，求長度為 2 且與 $\overrightarrow{a}$ 同方向的向量。

答案：$(\frac{6}{5},-\frac{8}{5})$

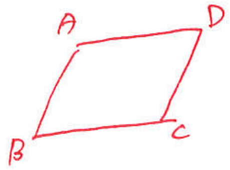
$|\overrightarrow{a}|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$

$\overrightarrow{a}=\frac{2}{5}(3,-4)=(\frac{6}{5},\frac{-8}{5})$

EXAMPLE 5

已知平行四邊形 $ABCD$ 的四個頂點坐標為 $A(6,4)$、$B(5,2)$、$C(x,1)$、$D(3,y)$，求 x、y 值。

答：$x=2$、$y=3$



$\Rightarrow A+C=B+D$

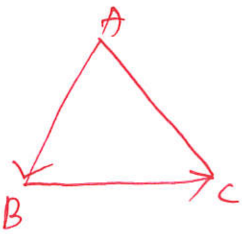
$(6+x, 5)=(8, 2+y)$

$\therefore x=2, y=3$

EXAMPLE 6

已知 $\overrightarrow{AB}=(4,3)$、$\overrightarrow{BC}=(8,-15)$，求 ΔABC 的周長。

答：$22+12\sqrt{2}$



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

$=(12,-12)$

$\triangle ABC$ 周長 $=|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|+|\overrightarrow{AC}|$

$=5+17+12\sqrt{2}$

$=22+12\sqrt{2}$

EXAMPLE 7

設 $\overrightarrow{a}=(2,1)$、$\overrightarrow{b}=(1,-2)$、$\overrightarrow{c}=(0,1)$，求：

(1)若 $(t\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})//\overrightarrow{c}$，求 t 值。

(2)若 $(t\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{c}$，求 t 值。

答案：(1) $-\frac{1}{2}$　(2) 2

$t\vec{a}+\vec{b}=(2t+1,\ t-2)$

(1) $\frac{2t+1}{0}=\frac{t-2}{1} \Rightarrow 2t+1=0 \Rightarrow t=\frac{-1}{2}$

(2) $(2t+1,\ t-2)\cdot(0,1)=0 \Rightarrow t-2=0 \Rightarrow t=2$

EXAMPLE 8

設 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 為兩不平行的非零向量，且

$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{a}+k\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{OB}=3\overrightarrow{a}+4\overrightarrow{b}$，

$\overrightarrow{OC}=-3\overrightarrow{a}+7\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{OD}=5\overrightarrow{a}+(4-3k)\overrightarrow{b}$，

若 $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{CD}$，求 k 值。

答案：19

$\vec{AB}=\vec{AO}+\vec{OB}=2\vec{a}+(4-k)\vec{b}$

$\vec{CD}=\vec{CO}+\vec{OD}=8\vec{a}+(-3-3k)\vec{b}$

$\because \vec{AB}//\vec{CD}$　$\therefore \frac{2}{8}=\frac{4-k}{-3-3k}$

$\Rightarrow -3-3k=16-4k \Rightarrow k=19$

EXAMPLE 9

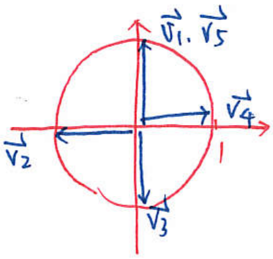
設 $\overrightarrow{v_k}=(\cos\frac{k\pi}{2},\sin\frac{k\pi}{2})$，其中 k 為自然數，試問下列哪些敘述是正確的？

(1) $\overrightarrow{v_1}\perp\overrightarrow{v_2}$ 且 $\overrightarrow{v_3}=-\overrightarrow{v_1}$　(2) $\overrightarrow{v_1}+2\overrightarrow{v_2}+3\overrightarrow{v_3}+4\overrightarrow{v_4}=(2,-2)$

(3) $(\overrightarrow{v_1}+2\overrightarrow{v_2}+3\overrightarrow{v_3}+4\overrightarrow{v_4})//(\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2})$　(4) $|x\overrightarrow{v_1}+y\overrightarrow{v_2}|^2=x^2+y^2$，其中 x，y 為實數

(5) $|\overrightarrow{v_1}+2\overrightarrow{v_2}+3\overrightarrow{v_3}+4\overrightarrow{v_4}|=|5\overrightarrow{v_5}+6\overrightarrow{v_6}+7\overrightarrow{v_7}+8\overrightarrow{v_8}|$

答：(1)(2)(3)(4)(5)



(1) $\vec{v_1}\perp\vec{v_2}$ 且 $\vec{v_3}=-\vec{v_1}$ (O)

(2) $\vec{v_1}=(0,1)$, $\vec{v_2}=(-1,0)$

$\vec{v_3}=(0,-1)$, $\vec{v_4}=(1,0)$

故 $\vec{v_1}+2\vec{v_2}+3\vec{v_3}+4\vec{v_4}=(2,-2)$ (O)

(3) $\vec{v_1}+\vec{v_2}=(-1,1)//(2,-2)$ (O)

(4) $|x\vec{v_1}+y\vec{v_2}|^2=|(-y,x)|^2=x^2+y^2$ (O)

(5) $5\vec{v_5}+6\vec{v_6}+7\vec{v_7}+8\vec{v_8}=(2,-2)$

(O)

EXAMPLE 10

已知直角坐標平面上，$A(0,4)$，$B(4,0)$，$P(x,y)$，則滿足條件 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$ 的所有 P 點形成的圖形為下列何者？

(1) 2 個點　(2) 4 個點　(3)一個圓　(4)一直線

答案：(3)

$(-x,4-y)\cdot(4-x,-y)=0$

$\Rightarrow (-x)(4-x)+(4-y)(-y)=0$

$\Rightarrow x(x-4)+y(y-4)=0$

$\Rightarrow x^2-4x+y^2-4y=0$

$\Rightarrow (x-2)^2+(y-2)^2=8$

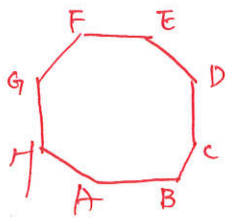
選 (3)

EXAMPLE 11

從正八邊形 $ABCDEFGH$ 的八個頂點中，任選相異兩點始點與終點，試問最多可決定多少個不同的向量？

(1) 56　(2) 32　(3) 28　(3) 24　(5) 15

答案：(2)



(間隔1)　(間隔2)　(間隔3)

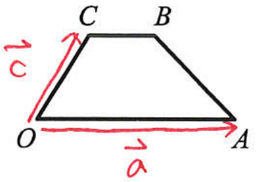
$8\times7-4\times2-4\times2-4\times2=32$

EXAMPLE 12

如圖，梯形 $OABC$ 中，$\overline{OA} \,/\!/\, \overline{BC}$，且 $\overline{OA} = 3\overline{CB}$，若 $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{c}$，且 $\overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{a} + n\overrightarrow{c}$，則下列哪些選項是正確的？

(1) $m<0$ (2) $m=-\dfrac{1}{3}$ (3) $n>0$ (4) $n=1$ (5) $m+n=-\dfrac{1}{3}$

答案：(1)(3)(4)



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB}$

$= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$

$= \frac{-2}{3}\overrightarrow{OA} + 1 \cdot \overrightarrow{OC}$

$m = \frac{-2}{3}$, $n = 1$

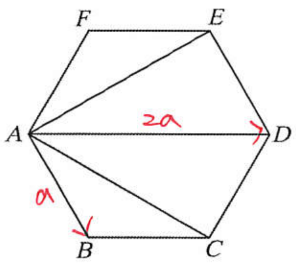
選 (1)(3)(4)

EXAMPLE 13

正六邊形 $ABCDEF$ 中，若 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AC}|$，求 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE}$。

答案：$\dfrac{9}{2}$

設邊長 a



$a \cdot 2a \cdot \cos 60^\circ = \sqrt{3}a$

$a = \sqrt{3}$

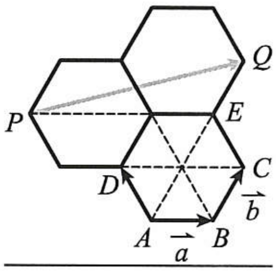
$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} = (\sqrt{3}a)(\sqrt{3}a) \cdot \cos 60^\circ$

$= 3 \times 3 \times \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$

EXAMPLE 14

如圖，三個相鄰的正六邊形邊長都是3，設 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{b}$，求 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AD}$。

答：-9



[法一] $\overrightarrow{PQ} = 3\vec{a} + \vec{b}$

$\overrightarrow{AD} = \vec{b} - \vec{a}$

$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AD} = (3\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} - \vec{a})$

$= -3|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$

$= -3 \times 3^2 + 2 \times 3 \times 3 \times \frac{1}{2} + 3^2$

$= -27 + 9 + 9 = -9$

[法二]

設 $A(0,0)$

$D(\frac{-3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$

$Q(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\sqrt{3})$

$P(-6, 3\sqrt{3})$

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{PQ} = (\frac{-3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}) \cdot (\frac{21}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$

$= \frac{-63}{4} + \frac{27}{4}$

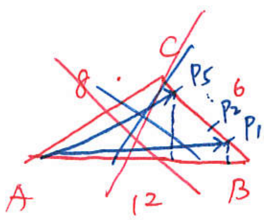
$= \frac{-36}{4} = -9$

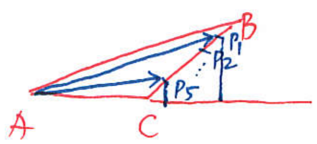
EXAMPLE 15

設 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB} = 12$，$\overline{BC} = 6$，$\overline{CA} = 8$，設 P_1，P_2，P_3，P_4，P_5 為 $\overline{BC}$ 上五個點，且滿足 $\overrightarrow{AP_k} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{k}{6}\overrightarrow{BC}$，其中 $k=1$，2，3，4，5，試問以下數值何者最大？

(1) $\overrightarrow{AP_1} \cdot \overrightarrow{AC}$ (2) $\overrightarrow{AP_2} \cdot \overrightarrow{AC}$ (3) $\overrightarrow{AP_3} \cdot \overrightarrow{AC}$ (4) $\overrightarrow{AP_4} \cdot \overrightarrow{AC}$ (5) $\overrightarrow{AP_5} \cdot \overrightarrow{AC}$

答：(1)





$\overrightarrow{AP_1} \cdot \overrightarrow{AC}$ 最大.

3-2 向量的題型

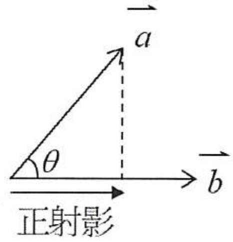
1. 向量的長度⇒ 平方

$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{|\overrightarrow{a}|^2} = \sqrt{(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a})} = \sqrt{(\overrightarrow{a})^2}$

2. 正射影(長)

(1) $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上的正射影長為 $\left|\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|}\right|$。

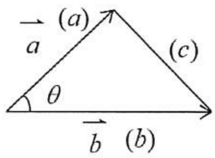
(2) $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上的正射影為 $\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|}\times\dfrac{\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|}$。



3. 求夾角 θ ⇒ $\cos\theta$

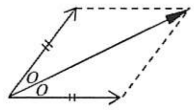
$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

(向量內積⇒坐標表示) (餘弦定理⇒三邊長)



4. 角平分方向向量： 等長 的向量相加

$\overrightarrow{a}$ 和 $\overrightarrow{b}$ 之角平分方向向量為 $\dfrac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|}+\dfrac{\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|}$。

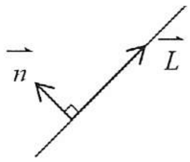


5. 直線的方向向量與法向量：

(1)設直線 $L: ax+by+c=0$，則 L 的法向量 $\overrightarrow{n} = (a,b)$

L 的方向向量 $\overrightarrow{L} = (-b,a)$

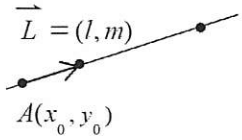
(2)若直線 L 的斜率為 m，則 L 的方向向量 $\overrightarrow{L} = (1,m)$



6. 直線參數式⇒ 直線上的點

設直線 L 的方向向量 $\overrightarrow{L} = (l,m)$ 且過點 $A(x_0,y_0)$，則

直線上任一點 P 坐標為 (x_0+lt, y_0+mt)。



EXAMPLE 1

$\overrightarrow{a} = (3,4)$，$\overrightarrow{b} = (-5, 12)$，求$|\overrightarrow{b} - 2\overrightarrow{a}|$之值。

答案：$\sqrt{137}$

$\vec{b}-2\vec{a} = (-11, 4)$

$|\vec{b}-2\vec{a}| = \sqrt{121+16} = \sqrt{137}$

EXAMPLE 2

已知 $|\overrightarrow{a}| = 3$，$|\overrightarrow{b}| = 5$，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = -2$，

求 $|4\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|$ 之值。

答：$\sqrt{185}$

$|4\vec{a}-\vec{b}|^2 = 16|\vec{a}|^2 - 8\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2$

$= 16\times 9 - 8\times(-2) + 5^2$

$= 185$

$\therefore |4\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{185}$

EXAMPLE 3

若 $|\overrightarrow{a}|=|\overrightarrow{b}|=2$，且 $|3\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=5$，求 $|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}|$ 的最小值。

答案：$\dfrac{\sqrt{39}}{4}$

$9|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=25$

$36-6\vec{a}\cdot\vec{b}+4=25$

$6\vec{a}\cdot\vec{b}=15$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{5}{2}$

$|\vec{a}+t\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}+t\vec{b})^2}$

$=\sqrt{|\vec{a}|^2+2t\,\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2\cdot|\vec{b}|^2}$

$=\sqrt{4+5t+4t^2}$

$=\sqrt{4(t^2+\frac{5}{4}t)+4}$

$=\sqrt{4(t+\frac{5}{8})^2+4-\frac{25}{16}}$

∴當 $t=-\frac{5}{8}$ 時，

有 $\min=\sqrt{\frac{39}{16}}$

$=\frac{\sqrt{39}}{4}$

EXAMPLE 4

$\overrightarrow{a}$ 和 $\overrightarrow{b}$ 是坐標平面上的兩個向量，滿足 $|\overrightarrow{a}|=1$，$|\overrightarrow{b}|=2\sqrt{3}$，且 $\overrightarrow{a}$ 和 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為 150°，已知實數 t 滿足 $-4\le t\le 5$，若 $|t\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|$ 的最大值為 M，最小值為 m，求數對$(M，m)$。

答案：$2\sqrt{13}$；$\sqrt{3}$

$|t\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{t^2|\vec{a}|^2+2t\,\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}$

$=\sqrt{t^2+2t\cdot 1\cdot 2\sqrt{3}\cdot(\frac{-\sqrt{3}}{2})+12}$

$=\sqrt{t^2-6t+12}$

$=\sqrt{(t-3)^2+3}$

∴當 $t=3$ 時，有 $\min=\sqrt{3}$

$t=-4$ 時，有 $\mathrm{Max}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$

EXAMPLE 5

設 $|\overrightarrow{a}|=2$，$|\overrightarrow{b}|=3$，$|\overrightarrow{c}|=5$，$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}$，求 $|2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}+4\overrightarrow{c}|$ 之值。

答案：7

$\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$

$\therefore |\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2$

$\Rightarrow |\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2$

$\Rightarrow 4+2\vec{a}\cdot\vec{b}+9=25$

$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=6$

$|2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}|$

$=|2\vec{a}+3\vec{b}-4(\vec{a}+\vec{b})|$

$=|-2\vec{a}-\vec{b}|$

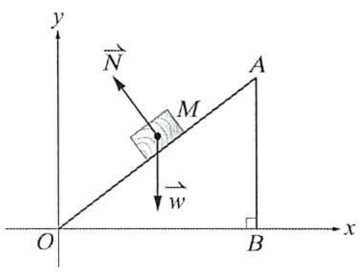
$=\sqrt{4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}$

$=\sqrt{4\times4+4\times6+9}=7$

EXAMPLE 6

有一個物體 M 放在斜坡 OAB 上。此時物體受到重力 $\overrightarrow{w}$、正向力 $\overrightarrow{N}$ 及摩擦力的作用(此圖省略摩擦力的繪製)，已知 $\overrightarrow{w}=(0,-10)$、$\overrightarrow{N}=(-6,8)$，試求 $\overrightarrow{w}$ 在 $\overrightarrow{N}$ 上的正射影。

答案：$(\dfrac{24}{5},-\dfrac{32}{5})$



$\frac{\vec{w}\cdot\vec{N}}{|\vec{N}|}\cdot\frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}=\frac{-80}{10}\times\frac{(-6,8)}{10}=(4.8,-6.4)$

EXAMPLE 7

設 $\overrightarrow{a}=(11,23)$，$\overrightarrow{b}=(3,4)$，已知 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}$，其中 $\overrightarrow{x}$ 和 $\overrightarrow{b}$ 平行，$\overrightarrow{y}$ 和 $\overrightarrow{b}$ 垂直，試求向量 $\overrightarrow{x}$。

答案：(15,20)

$\vec{x} \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{x}=t(3,4)$

$\vec{y} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{y}=s(4,-3)$

$(11,23)=(3t+4s,\ 4t-3s)$

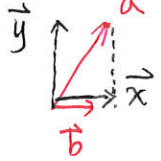
$\begin{cases} 3t+4s=11 \cdots ① \\ 4t-3s=23 \cdots ② \end{cases}$

①×4 − ②×3：$25s=-25$

$s=-1,\ t=5$

$\vec{x}=(15,20)$

[法二]



即 $\vec{x}$ 為 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上之正射影.

故 $\vec{x}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{125}{5}\cdot\frac{(3,4)}{5}=(15,20)$

EXAMPLE 8

$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 為非零且不平行向量，$\overrightarrow{c}=3\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}$，且 $\overrightarrow{c}$ 在 $\overrightarrow{a}$ 上的正射影為 $\frac{5}{2}\overrightarrow{a}$，設 $\overrightarrow{b}$ 在 $\overrightarrow{a}$ 上的正射影為 $k\overrightarrow{a}$，求實數 k。

答：$-\frac{1}{4}$

$\vec{c}$在$\vec{a}$上之正射影 $\frac{\vec{c}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{5}{2}\vec{a}$，

即 $\frac{\vec{c}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}=\frac{5}{2} \Rightarrow \frac{3|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}=\frac{5}{2}$，

得 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{4}|\vec{a}|^2$

$\vec{b}$在$\vec{a}$上之正射影 $\frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=-\frac{1}{4}\vec{a}$

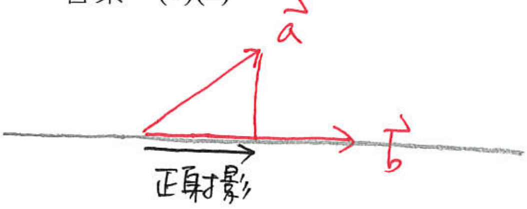
故 $k=\frac{-1}{4}$

EXAMPLE 9

已知 $\overrightarrow{a}=(5,12)$，$\overrightarrow{b}=(2,3)$，若 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上的正射影與 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{c}$ 上的正射影相同，則 $\overrightarrow{c}$ 可為下列哪些向量？

(1)$(-6,-9)$　(2)$(\frac{4}{5},\frac{6}{5})$　(3)$(3,-2)$　(4)$(12,-5)$

答案：(1)(2)

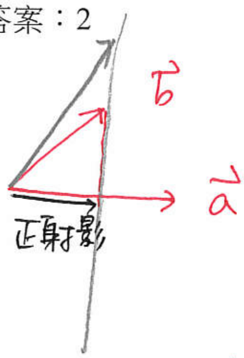


條件：$\vec{b}\parallel\vec{c}$，故選(1)(2)

EXAMPLE 10

$\overrightarrow{a}=(1,2)$，$\overrightarrow{b}=(2,3)$，$\overrightarrow{c}=(4,c)$，若 $\overrightarrow{b}$ 在 $\overrightarrow{a}$ 上的正射影與 $\overrightarrow{c}$ 在 $\overrightarrow{a}$ 上的正射影相同，求 c 值。

答案：2



[法二]

$\frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{\vec{c}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

$\Rightarrow \vec{b}\cdot\vec{a}=\vec{c}\cdot\vec{a}$

條件：$(\vec{b}-\vec{c})\perp\vec{a}$

$(-2,3-c)\cdot(1,2)=0$

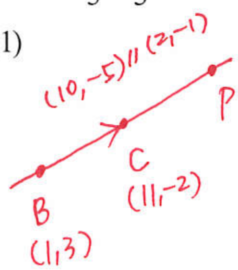
$-2+6-2c=0$

$c=2$

EXAMPLE 11

若△ABC 三頂點坐標為 $A(4,-1)$，$B(1,3)$，$C(11,-2)$，P 為線段 $\overline{BC}$ 上的一點，且向量 $\overrightarrow{AP}$ 在向量 $\overrightarrow{AB}$ 上的正射影為 $(\frac{-3}{5},\frac{4}{5})$，求 P 點坐標。

答案：(5,1)



設 $P(1+2t,\ 3-t)$

$\overrightarrow{AP}=(2t-3,\ -t+4)$

$\overrightarrow{AB}=(-3,4)$

$\overrightarrow{AP}$在$\overrightarrow{AB}$之正射影 $=\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$

$\frac{-6t+9-4t+16}{5}\times\frac{(-3,4)}{5}=(\frac{-3}{5},\frac{4}{5})$

∴ $-10t+25=5$

$t=2$

故 $P(5,1)$

EXAMPLE 12

坐標平面上兩個向量 $\overrightarrow{a}=(2,4)$和 $\overrightarrow{b}=(-1,k)$，$k$ 為實數，若 $\overrightarrow{a}$ 和 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為 45°，求 k 值。

答案：3

$\cos 45^\circ = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{-2+4k}{\sqrt{20}\sqrt{1+k^2}}$

$\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-2+4k}{\sqrt{20}\sqrt{1+k^2}} \Rightarrow \sqrt{10}\sqrt{1+k^2} = -2+4k$

$\Rightarrow 10+10k^2 = 4-16k+16k^2,\ 6k^2-16k-6=0$

$\Rightarrow 3k^2-8k-3=0 \Rightarrow k=3$ 或 $-\frac{1}{3}$(不合)

故 $k=3$

EXAMPLE 13

已知非零向量 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 滿足 $|\overrightarrow{a}|=2|\overrightarrow{b}|$，且$(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})$與$(2\overrightarrow{a}-5\overrightarrow{b})$垂直，求 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角。

答案：60 度

令 $|\vec{a}|=2|\vec{b}|=t$

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}-5\vec{b})=0$

$\Rightarrow 2|\vec{a}|^2-3\vec{a}\cdot\vec{b}-5|\vec{b}|^2=0$

$\Rightarrow 2t^2-3\vec{a}\cdot\vec{b}-5\cdot\frac{t^2}{4}=0$

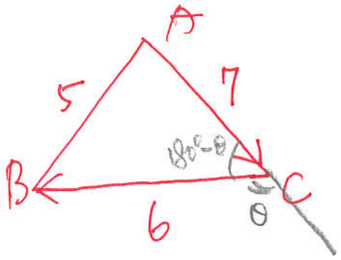
$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{t^2}{4}$

$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{\frac{t^2}{4}}{t\cdot\frac{t}{2}} = \frac{1}{2},\quad \theta=60^\circ$

EXAMPLE 14

在△ABC 中，$\overline{AC}=7$，$\overline{CB}=6$，$\overline{BA}=5$，試問 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}$之值。

答案：-30



$\cos(180^\circ-\theta) = \dfrac{6^2+7^2-5^2}{2\cdot6\cdot7}$

$\cos\theta = -\dfrac{36+49-25}{2\times6\times7}$

$\vec{AC}\cdot\vec{CB} = |\vec{AC}||\vec{CB}|\cdot\cos\theta$

$= 7\times6\times\left(-\dfrac{60}{2\times6\times7}\right) = -30$

EXAMPLE 15

求直線 L_1：$\sqrt{3}x+y-6=0$ 與 L_2：$x+\sqrt{3}y-2=0$ 的銳角夾角。

答案：30 度

$\cos\theta = \dfrac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|} = \dfrac{(\sqrt{3},1)\cdot(1,\sqrt{3})}{2\times2}$

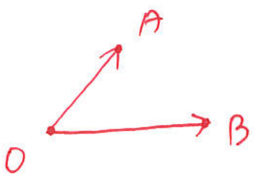
$= \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \theta=30^\circ$

EXAMPLE 16

坐標平面上 O 為原點，已知 $A(0,2)$，$B(4,3)$，若第一象限中有一點 C，$|\overline{OC}|=\sqrt{45}$且$\overline{OC}$能平分∠$AOB$，求 C 點的坐標。

答案：(3,6)



$\vec{OA}=(0,2)$

$\vec{OB}=(4,3)$

$\vec{OC} /\!/ 5\cdot\vec{OA}+2\cdot\vec{OB}$

$\therefore \vec{OC} /\!/ (8,16) /\!/ (1,2)$

$\vec{OC}=t(1,2),\ t>0$

$|(1,2)|=\sqrt{5}$，故 $t=3$，$\vec{OC}=(3,6)$

即 $C(3,6)$

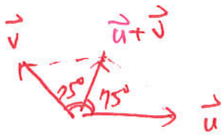
EXAMPLE 17

設 $\overrightarrow{u}$、$\overrightarrow{v}$ 為兩個長度皆為1的向量。若 $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ 與 $\overrightarrow{u}$ 的夾角為 75°，求 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 的內積。

答案：$\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$

$|\vec{u}|=|\vec{v}|=1$

$\therefore \vec{u}+\vec{v}$ 為 $\vec{u}$、$\vec{v}$ 之角平分方向.



$\vec{u}$ 與 $\vec{v}$ 夾角為 150°

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 1\times1\times\cos150^\circ$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$

EXAMPLE 18

平面上有一條斜率為正的直線 L，且 L 與 x 軸的角平分線有一條斜率為 $\frac{1}{3}$，求直線 L 的斜率。

答案：$\frac{3}{4}$

設 L 的斜率為 m

L 的方向向量為 $(1,m)$

x 軸方向向量 $(1,0)$

L 與 x 軸之角平分方向為 $\frac{(1,m)}{\sqrt{1+m^2}}+(1,0) \parallel (1,\frac{1}{3})$

$\frac{\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}+1}{1}=\frac{\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}}{\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow 1+\sqrt{1+m^2}=3m$, $\sqrt{1+m^2}=3m-1$

$\Rightarrow 1+m^2=9m^2-6m+1$, $8m^2-6m=0$

$\Rightarrow m=\frac{3}{4}$ 或 0 (不合)

EXAMPLE 19

設 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 為平面上三個非零向量，試問下列哪些選項是正確的？

(1)若 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=0$，則 $\vec{b}$ 和 $\vec{c}$ 是兩平行向量

(2)若 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ 且滿足 $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$，則 $|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{c}|^2>0$

(3)若兩非零向量 $\vec{a}+\vec{c}$ 和 $\vec{b}+\vec{c}$ 是兩平行向量，則 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 是兩平行向量

(4)若 $|\vec{a}|<1<|\vec{b}|$，則 $|\vec{a}\cdot\vec{b}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|-1$

(5)設 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影為 $\vec{c}$，$\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的正射影為 $\vec{d}$，其中 $\vec{c}$ 和 $\vec{d}$ 皆非零向量，

則 $|\vec{c}|:|\vec{d}|=|\vec{a}|:|\vec{b}|$。

答案：(1)(2)(4)(5)

(1) $\vec a\perp\vec b$ 且 $\vec a\perp\vec c$，得 $\vec b\parallel\vec c$ (o)

(2) $\vec a+\vec b=-\vec c$, $|\vec a|^2+2\vec a\cdot\vec b+|\vec b|^2=|\vec c|^2$

$\Rightarrow |\vec a|^2+|\vec b|^2-|\vec c|^2=-2\vec a\cdot\vec b>0$ (o)

(3) $\vec a=(1,0)$, $\vec c=(0,1)$ $\Rightarrow \vec a+\vec c\parallel\vec b+\vec c$

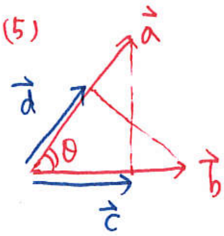
$\vec b=(2,1)$, $\vec c=(0,1)$ 但 $\vec a\nparallel\vec b$ (x)

(4) $|\vec a|-1<0$ 且 $|\vec b|-1>0$

$\Rightarrow (|\vec a|-1)(|\vec b|-1)<0$, $|\vec a||\vec b|-|\vec a|-|\vec b|+1<0$

$\therefore |\vec a|+|\vec b|-1>|\vec a||\vec b|\geq|\vec a\cdot\vec b|$ (o)

(5)



$\cos\theta=\frac{|\vec c|}{|\vec a|}=\frac{|\vec d|}{|\vec b|}$

故 $|\vec c|:|\vec d|=|\vec a|:|\vec b|$

EXAMPLE 20

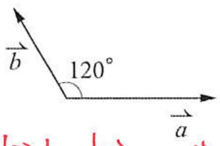
如圖所示，$\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 兩向量的夾角 $120°$，且 $|\vec{a}|=3$、$|\vec{b}|=2$，若 $\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$，且 $-3\leq t\leq 2$，則下列選項哪些正確？

(1)當 $t=-3$ 時，$\vec{c}$ 的長度有最大值　(2)當 $t=\frac{3}{2}$ 時，$\vec{c}$ 平分 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角

(3)當 $t=2$ 時，$\vec{c}\cdot\vec{a}$ 有最大值　(4)當 $\vec{c}\perp\vec{b}$ 時，$\vec{c}$ 的長度有最小值

(5)當 $\vec{c}\perp\vec{b}$ 時，$\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影為 $-t\cdot\vec{b}$。

答案：(1)(2)(4)(5)



$\vec a\cdot\vec b=3\cdot2\cdot\frac{-1}{2}=-3$

$|\vec c|=|\vec a+t\vec b|$

$=\sqrt{|\vec a|^2+2t\vec a\cdot\vec b+|\vec b|^2t^2}$

$=\sqrt{9+2t(-3)+4t^2}$

$=\sqrt{4(t-\frac{3}{4})^2+9-\frac{9}{4}}$

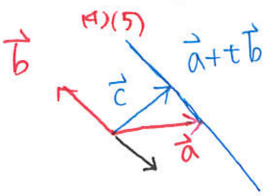
(1) $t=-3$, $|\vec c|$ 有最大值 $=\sqrt{9+18+36}$

(2) $|\vec a|=t|\vec b|$，故 $t=\frac{3}{2}$ 時，$\vec c$ 是 $\vec a,\vec b$ 之角平分方向.

(3) $\vec c\cdot\vec a=(\vec a+t\vec b)\cdot\vec a=|\vec a|^2+t\vec a\cdot\vec b=9-6t$

$\therefore t=-3$ 時，$\vec c\cdot\vec a$ 有最大值 $=9+18=27$

(4)(5)

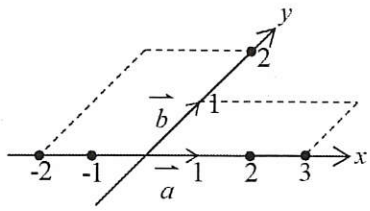


3-3 線性組合

1. 線性組合：

平面上，設兩個不平行的非零向量 $\overrightarrow{a}$ 、$\overrightarrow{b}$ ，對任意向量 $\overrightarrow{c}$

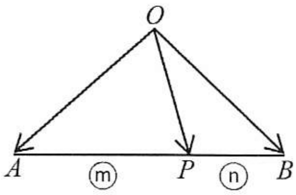
存在且唯一的實數 α,β 使得 $\overrightarrow{c}=\alpha\overrightarrow{a}+\beta\overrightarrow{b}$ 。



2. 分點公式：

設 O 為任意點，P 在線段 $\overline{AB}$ 上滿足 $\overline{AP}:\overline{BP}=m:n$ ，

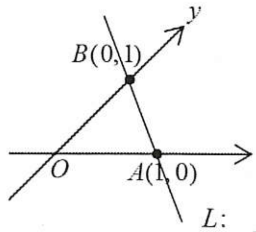
則 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OA}}{m+n}$ 。



3. 三點共線：設 A 、P 、B 三點共線

【想法一】係數積 $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$

【想法二】若 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$ ，則 $x+y=1$ 。



L: $x+y=1$

EXAMPLE 1

ΔABC，若 $x(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+(2y+3)\overrightarrow{BC}+10\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$ ，求數對 (a,b) 。

答案：$(-5,-4)$

$x(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+(2y+3)(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})+10\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$

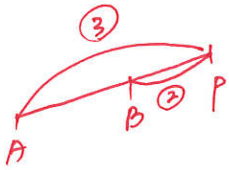
$\Rightarrow (x-2y-3)\overrightarrow{AB}+(x+2y+13)\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}=0\cdot\overrightarrow{AB}+0\cdot\overrightarrow{AC}$

$\therefore \begin{cases} x-2y-3=0 \\ x+2y+13=0 \end{cases}$ ，$y=-4$, $x=-5$

EXAMPLE 2

$A(r,3)$、$B(4,s)$、$P(24,-27)$三點共線。若 P 不在 A、B 之間，且 $\overline{PA}:\overline{PB}=3:2$，求 $r+s$ 之值。

答案：-13



$B=\dfrac{2A+1\cdot P}{2+1}$

$\Rightarrow P=3B-2A$

$\Rightarrow 24=12-2r$

$-27=3s-6$

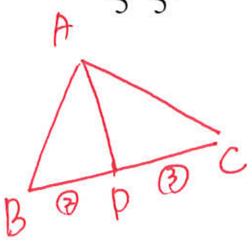
$\therefore r=-6$, $s=-7$

$r+s=-13$

EXAMPLE 3

設坐標平面上有ΔABC，而 D 點在線段 $\overline{BC}$ 上，滿足 $\overline{BD}:\overline{DC}=2:3$，若 $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ ，其中為 x，y 實數，求數對$(x，y)$。

答案：$(\frac{3}{5},\frac{2}{5})$



$\overrightarrow{AD}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

EXAMPLE 4

設 A，B，C 三點共線，若點 P 不在直線 AB 上，且 $3\overrightarrow{PB}=(2t-1)\overrightarrow{PA}+(3t-4)\overrightarrow{PC}$ ，試求 t 的值。

答案：$\dfrac{8}{5}$

$\overrightarrow{PB}=(\frac{2t-1}{3})\overrightarrow{PA}+(\frac{3t-4}{3})\overrightarrow{PC}$

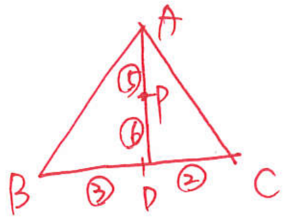
$\because A,B,C$ 三點共線

$\therefore \frac{2t-1}{3}+\frac{3t-4}{3}=1$ ，$5t-5=3$, $t=\frac{8}{5}$

EXAMPLE 5

$\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{BD}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AP}=\dfrac{5}{11}\overrightarrow{AD}$，若 $\overrightarrow{PA}=x\overrightarrow{PB}+y\overrightarrow{PC}$，求數對$(x,y)$。

答案：$(-\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{2})$



$\overrightarrow{PD}=\frac{2}{5}\overrightarrow{PB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{PC}$

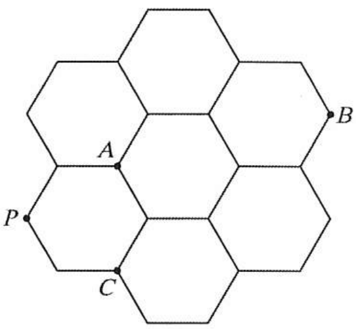
$\overrightarrow{PA}=-\frac{5}{6}\overrightarrow{PD}=-\frac{5}{6}(\frac{2}{5}\overrightarrow{PB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{PC})=-\frac{1}{3}\overrightarrow{PB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}$

EXAMPLE 6

附圖是由 7 個正六邊形拼接而成，

若 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，求數對$(x，y)$。

答案：$(-\dfrac{3}{7},\dfrac{2}{7})$



設 $A(0,0)$，邊長為 1.

$B(\frac{7}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，$C(0,-\sqrt{3})$，$P(-\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$

$(-\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})=x(\frac{7}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})+y(0,-\sqrt{3})$

$\begin{cases}\frac{7}{2}x=-\frac{3}{2}, & x=\frac{-3}{7}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{-3}{7}+y(-\sqrt{3}), & y=\frac{2}{7}\end{cases}$

$(x,y)=(\frac{-3}{7},\frac{2}{7})$

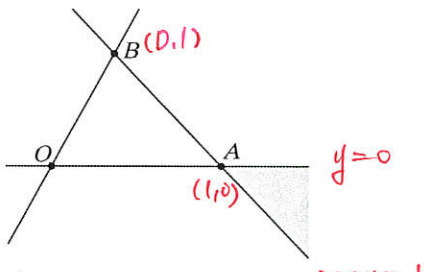
EXAMPLE 7

兩直線 OA，OB 交於 O 點，若 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，如附圖，則下列哪些選項中的$(x , y)$可使 P 點落在斜線區域或斜線區域的邊界？

(1) $(\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2})$　(2) $(\dfrac{3}{4},-\dfrac{3}{2})$　(3) $(\dfrac{10}{3},-2)$

(4) $(-2,1)$　(5) $(\sqrt{5},-2)$

答案：(1)(3)



$\begin{cases}y\le 0\\ x+y\ge 1\end{cases}$

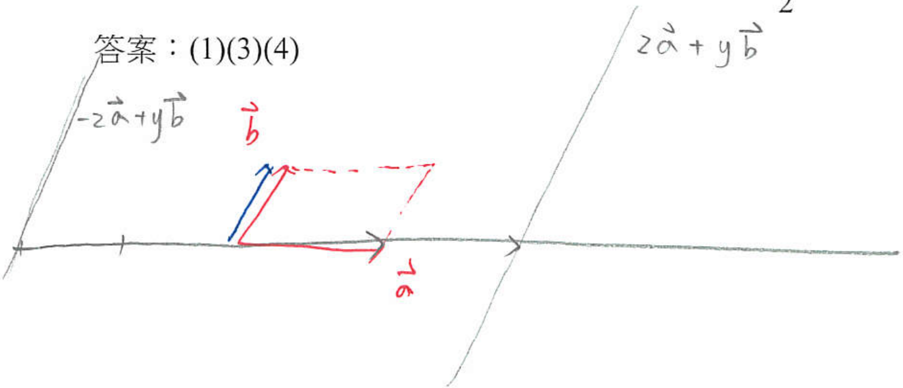
選 (1)(3)

EXAMPLE 8

已知由向量 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 所決定的平行四邊形面積為 6，設 $\overrightarrow{c}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}$，則下列哪些數對$(x，y)$可使 $\overrightarrow{c}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 所決定的平行四邊形面積為 12？

(1)(2,1)　(2)(0,2)　(3)(2,－2)　(4)(－2,0)　(5) $(-4,\dfrac{1}{2})$

答案：(1)(3)(4)



$\therefore x=2$ 或 -2

選 (1)(3)(4)

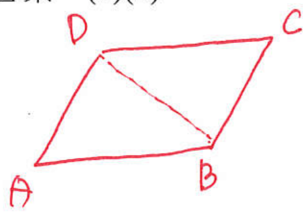
EXAMPLE 9

平面上已知 $ABCD$ 是一平行四邊形，且點 X 在 $\triangle BCD$ 的內部(不含邊界)。下列選項中，選出 $\overrightarrow{AX}$ 可能的關係式。

(1) $\overrightarrow{AX}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$ (2) $\overrightarrow{AX}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ (3) $\overrightarrow{AX}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ (4) $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

(5) $\overrightarrow{AX}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$。

答案：(2)(5)



$\overrightarrow{AX}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$

$\begin{cases} x+y>1 \\ x<1 \\ y<1 \end{cases}$

(1) $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$ (×)

(2) (○)

(3) $\overrightarrow{AX}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$
$=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$
$\because x=1$ (×)

(4) $\overrightarrow{AX}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})-\overrightarrow{AB}=1\cdot\overrightarrow{AD}$ (×)

(5) $\overrightarrow{AX}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+\overrightarrow{AD})$
$=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ (○)

EXAMPLE 10

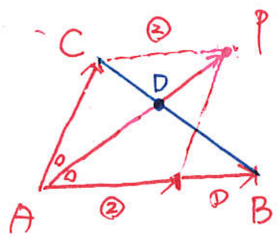
平面上，已知 $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，$\overleftrightarrow{AP}$ 平分 $\angle BAC$ 且交 $\overline{BC}$ 於 D，請選出正確的選項。

(1) $\overline{AD}:\overline{DP}=2:3$ (2) $\overrightarrow{CD}=\frac{2}{5}\overrightarrow{CP}+\frac{3}{5}\overrightarrow{CA}$ (3) $\frac{\Delta ABC\text{ 面積}}{\Delta ABP\text{ 面積}}=1$ (4) $\frac{\Delta ADB\text{ 面積}}{\Delta CDP\text{ 面積}}=\frac{9}{4}$

答案：(3)(4)

$\because$ AP 平分 $\angle BAC$

$\therefore |\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$



(1) $\overline{AD}:\overline{DP}=\overline{AB}:\overline{CP}=3:2$

(2) 承(1)，$\overrightarrow{CD}=\frac{2\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{CP}}{3+2}$

(3) $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABP$ 同底等高 (○)

(4) $\because \triangle ADB \sim \triangle PDC$ 且邊長比為 $3:2$

$\therefore$ 面積比為 $9:4$

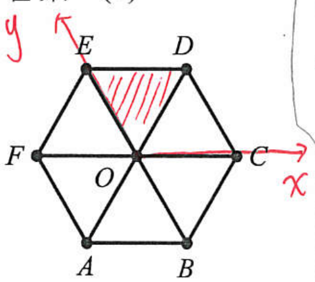
EXAMPLE 11

如圖所示，O 為正六邊形之中心。試問下列哪個向量的終點 P 落在 $\triangle ODE$ 內部（不含邊界）？

(1) $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}$ (2) $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OE}$ (3) $\overrightarrow{OP}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OE}$ (4) $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OE}$

(5) $\overrightarrow{OP}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OE}$

答案：(2)



設 $O(0,0)$，$C(1,0)$，$E(0,1)$

$\Rightarrow D(1,1)$

$\triangle ODE$ 內部 $\begin{cases} y<1 \\ x>0 \\ x-y<0 \end{cases}$

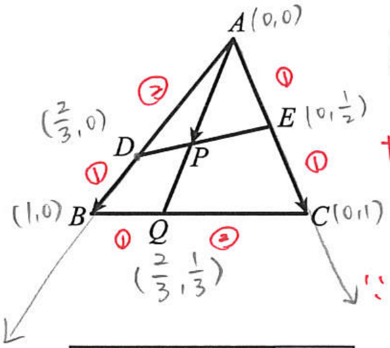
選(2)

EXAMPLE 12

如圖，在△ABC中，$\overline{AD}:\overline{BD}=2:1$，$\overline{AE}:\overline{EC}=1:1$，$\overline{BQ}:\overline{QC}=1:2$，$\overline{DE}$與$\overline{AQ}$交於$P$點。

已知$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，求$x,y$的值。

答案：$\frac{2}{5},\frac{1}{5}$



[法一]

$\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$t\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\times(2\overrightarrow{AE})$

$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{t}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3t}\overrightarrow{AE}$

$\because P.D.E$ 共線 $\therefore \frac{1}{t}+\frac{2}{3t}=1$

$t=\frac{5}{3}$

$\overrightarrow{AP}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AQ}$

$=\frac{3}{5}(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC})$

$=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$

[法二] $P\begin{cases}\overleftrightarrow{DE}: y=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}\\ \overleftrightarrow{AQ}: y=\frac{1}{2}x\end{cases}$

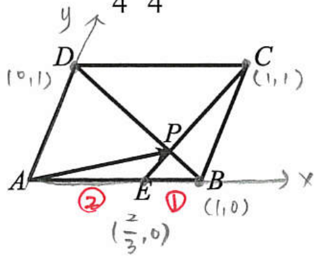
$\frac{1}{2}x=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$

$\frac{5}{4}x=\frac{1}{2}$，$x=\frac{2}{5}$，$y=\frac{1}{5}$

EXAMPLE 12

如圖，平行四邊形$ABCD$中，$\overline{AE}:\overline{EB}=2:1$，$\overline{DB}$與$\overline{CE}$交於$P$點。已知$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，求$x,y$值。

答案：$\frac{3}{4},\frac{1}{4}$



[法一]

$\because P.B.D$ 共線

$\therefore x+y=1$

$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$

$=x(\frac{3}{2}\overrightarrow{AE})+y(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})$

$=x(\frac{3}{2}\overrightarrow{AE})+y(\overrightarrow{AC}+(\frac{-3}{2}\overrightarrow{AE}))$

$=(\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}y)\overrightarrow{AE}+y\overrightarrow{AC}$

$\therefore \frac{3}{2}x-\frac{3}{2}y+y=1$

$\begin{cases}x+y=1 \cdots ①\\ \frac{3}{2}x-\frac{1}{2}y=1 \cdots ②\end{cases}$

$4x=3$，$x=\frac{3}{4}$，$y=\frac{1}{4}$

[法二] $\begin{cases}x+y=1\\ y=3(x-\frac{2}{3})\end{cases}$

$4x=3$，$x=\frac{3}{4}$，$y=\frac{1}{4}$

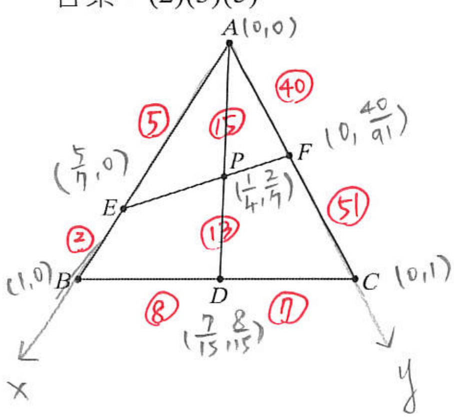
EXAMPLE 12

如圖，設P為ΔABC內部一點，且$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{7}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BE}=\frac{2}{7}\overrightarrow{BA}$。已知$\overline{AP}$的延長線交$\overline{BC}$於$D$，$\overline{EP}$的延長線交$\overline{AC}$於$F$，則下列敘述何者正確的？

(1) $\overline{BD}:\overline{DC}=7:8$ (2) $\overline{AP}:\overline{PD}=15:13$ (3) $\overrightarrow{AD}=\frac{7}{15}\overrightarrow{AB}+\frac{8}{15}\overrightarrow{AC}$ (4) $\overline{AF}:\overline{FC}=4:5$

(5) $\frac{\Delta AEP\text{的面積}}{\Delta ABC\text{的面積}}=\frac{10}{49}$。

答案：(2)(3)(5)



[法一]

$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AD}=\frac{7}{28}\overrightarrow{AB}+\frac{8}{28}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AD}=\frac{7}{28t}\overrightarrow{AB}+\frac{8}{28t}\overrightarrow{AC}$

$\frac{7}{28t}+\frac{8}{28t}=1$，$t=\frac{15}{28}$

$\overrightarrow{AD}=\frac{7}{15}\overrightarrow{AB}+\frac{8}{15}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AP}=(\frac{7}{28}\times\frac{7}{5})\overrightarrow{AE}+(\frac{8}{28}\times s)\overrightarrow{AF}$

$\frac{7}{20}+\frac{2s}{7}=1$，$s=\frac{13}{20}\times\frac{7}{2}=\frac{91}{40}$

$\frac{\Delta AEP\text{面積}}{\Delta ABC\text{面積}}=\frac{8}{15}\times\frac{5}{7}\times\frac{15}{28}=\frac{10}{49}$ #

[法二] $F\begin{cases}x=0\\ y=\frac{\frac{2}{7}}{\frac{1}{4}-\frac{5}{7}}(x-\frac{5}{7})\end{cases}$

$\Rightarrow y=\frac{2}{7}\times\frac{28}{-13}\times\frac{-5}{7}=\frac{40}{91}$

$D\begin{cases}x+y=1\\ y=\frac{\frac{2}{7}}{\frac{1}{4}}x=\frac{8}{7}x\end{cases}$

$\therefore x=\frac{7}{15}$，$y=\frac{8}{15}$

3-4 三角形的四心

1. 重心：ΔABC 的重心為 G，O 為任意點

   (1) $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$

   (2) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$

   (3) $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

2. 內心：ΔABC 的內心為 I，O 為任意點

   (1) $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{a+b+c}(a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC})$

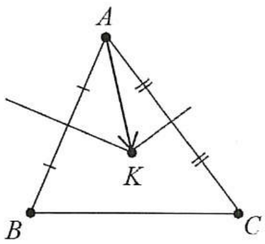
   (2) $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$

   (3) $\overrightarrow{AI}=\frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$

3. 外心：ΔABC 的外心為 K

   (1) $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{\overline{AB}^2}{2}$

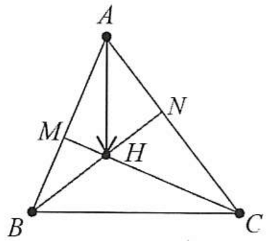
   (2) $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{\overline{AC}^2}{2}$



4. 垂心：ΔABC 的垂心為 H

   $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

   $=\frac{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}{2}$



EXAMPLE 1

設一圓之圓心坐標為(8,15)，ΔABC 為此圓上之一內接正三角形，O 為原點，求 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|$。

答案：51

設G(8,15)是正三角形外心(外接圓心)

也是正三角形的重心.

$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$

$\therefore |\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|=|3\overrightarrow{OG}|=3\times17=51$

EXAMPLE 2

設 O 為原點，若點 $G(3,-1)$ 為 ΔABC 的重心，且 $|\overrightarrow{GA}|=3$，$|\overrightarrow{GB}|=4$，$|\overrightarrow{GC}|=\sqrt{11}$，求 $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}$

答：-7

$\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=-7$

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=-\overrightarrow{GC}$

$|\overrightarrow{GA}|^2+2\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}+|\overrightarrow{GB}|^2=|\overrightarrow{GC}|^2$

$9+2\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}+16=11$

EXAMPLE 3

設 I 為 ΔABC 的內心且 $\overrightarrow{AI}=\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，若 $\overline{BC}=10$，求 $\overline{AB}$ 的長度為。

答案：15

$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{a+b+c}(b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC})$

$\overline{BC}=a=10$

$\begin{cases}\frac{b}{10+b+c}=\frac{4}{9}\cdots① \\ \frac{c}{10+b+c}=\frac{3}{9}\cdots②\end{cases}$

$\frac{①}{②}$：$\frac{b}{c}=\frac{4}{3}$

令 $b=4t$，$c=3t$

$\frac{4t}{10+7t}=\frac{4}{9}$，$36t=40+28t$

$8t=40$，$t=5$

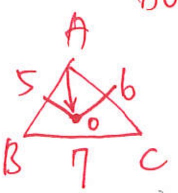
$\overline{AB}=c=3t=15$

EXAMPLE 4

ΔABC 中，已知 $\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=6$，$\overline{BC}=7$，且 O 是 ΔABC 的外心，設 $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，求 x。

答：$\frac{19}{48}$

$\begin{cases}\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=x|\overrightarrow{AB}|^2+y\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+y|\overrightarrow{AC}|^2\end{cases}$



$\begin{cases}\frac{5}{2}\times5=25x+6y\cdots① \\ 3\times6=6x+36y\cdots② \\ 3=x+6y\end{cases}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=5\times6\times\frac{5^2+6^2-7^2}{2\times5\times6}$

$=\frac{12}{2}=6$

①−②：

$24x=\frac{19}{2}$

$\therefore x=\frac{19}{48}$

3-5 行列式

1. 二階行列式的定義：

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \underline{ad-bc}$$

2. 行列式的性質

(1)行與列互換，其值不變，即 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$。

(2)任一行(列)乘以一數 k 加入另一行(列)，其值不變。

如：$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & ka+b \\ c & kc+d \end{vmatrix}$ ；$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}_{\times k} = \begin{vmatrix} kc+a & kd+b \\ c & d \end{vmatrix}$

$\times k$

(3)任意兩行(列)對調，其值變號。

如：$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$

(4)任一行(列)可提出同一數。

如：$\begin{vmatrix} ka & b \\ kc & d \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ；$\begin{vmatrix} a & b \\ kc & kd \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

(5)任意兩行(列)成比例時，其值為 0。

如：$\begin{vmatrix} a & ka \\ b & kb \end{vmatrix} = 0$ ；$\begin{vmatrix} ka & kb \\ a & b \end{vmatrix} = 0$

(6)行列式的加法：某行(列)各元拆成兩項相加等於原行列式。

如：$\begin{vmatrix} a+e & b+f \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & f \\ c & d \end{vmatrix}$ ；$\begin{vmatrix} a+e & b \\ c+f & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}$

EXAMPLE 1

若 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1$，求 $\begin{vmatrix} 2a+3b & 4a-5b \\ 2c+3d & 4c-5d \end{vmatrix}$ 的值。

答案：-22

[法一] $\begin{vmatrix} 2a+3b & 4a-5b \\ 2c+3d & 4c-5d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a+3b & -11b \\ 2c+3d & -11d \end{vmatrix}$

$\times(-2)$

$= -11\begin{vmatrix} 2a+3b & b \\ 2c+3d & d \end{vmatrix} = -11\begin{vmatrix} 2a & b \\ 2c & d \end{vmatrix}$

$\times(-3)$

$= -22\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -22$

[法二] $a=d=1$, $b=c=0$

所求 $= \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -10-12=-22$

EXAMPLE 2

已知 $\begin{vmatrix} 2a+3b & 5a-6b \\ 2c+3d & 5c-6d \end{vmatrix} = -81$，求 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 之值。

答案：3

$\begin{vmatrix} 2a+3b & 5a-6b \\ 2c+3d & 5c-6d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a+3b & 9a \\ 2c+3d & 9c \end{vmatrix}$

$\times 2$ $\quad -\frac{2}{9}$

$= \begin{vmatrix} 3b & 9a \\ 3d & 9c \end{vmatrix} = 27\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = -27\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -81$

故 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 3$

EXAMPLE 3

已知 $\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix}=2$，下列選項中行列式之數值，何者最大？

(1) $\begin{vmatrix} \frac{2}{3}a & \frac{1}{3}b \\ 2x & y \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 9x & 9y \\ a & b \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 2a & b+5a \\ 2x & y+5x \end{vmatrix}$ (4) $\begin{vmatrix} a & b \\ 3x-5a & 3y-5b \end{vmatrix}$ (5) $\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 5a & 5b \end{vmatrix}$

答案：(4)

(1) $\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 2a & b \\ 2x & y \end{vmatrix}=\frac{2}{3}\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix}$

(2) $9\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix}=-9\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix}$

(3) $2\begin{vmatrix} a & b+5a \\ x & y+5x \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix}$ $\times(-5)$

(4) $\begin{vmatrix} a & b \\ 3x & 3y \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix}$

(5) 0

選 (4) #

EXAMPLE 4

下列有關行列式的敘述，何者正確？

(1) $\begin{vmatrix} 2021a & 2021c \\ 2021b & 2021d \end{vmatrix}=2021\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2021a+c & 2021b+d \\ c & d \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}=0$

(4) $\begin{vmatrix} a-5 & c-6 \\ b-7 & d-8 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$ (5) $\begin{vmatrix} a-5b & b+3a \\ c-5d & d+3b \end{vmatrix}=48\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

答案：(3)

(1) $\begin{vmatrix} 2021a & 2021c \\ 2021b & 2021d \end{vmatrix}=2021\times2021\times\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ (×)

(2) $\begin{vmatrix} 2021a+c & 2021b+d \\ c & d \end{vmatrix}$ $\times(-1)$ $=\begin{vmatrix} 2021a & 2021b \\ c & d \end{vmatrix}=2021\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ (×)

(3) $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ (○)

(4) $\begin{vmatrix} a-5 & c-6 \\ b-7 & d-8 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a-5 & c \\ b-7 & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a-5 & -6 \\ b-7 & -8 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -5 & c \\ -7 & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & -6 \\ b & -8 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -5 & -6 \\ -7 & -8 \end{vmatrix}$ (×)

(5) $\begin{vmatrix} a-5b & b+3a \\ c-5d & d+3b \end{vmatrix}$ $\times5$

$=\begin{vmatrix} 16a & b+3a \\ 16c & d+3b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 16a & b \\ 16c & d \end{vmatrix}$ $\times\frac{-3}{16}$

$=16\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ (×)

EXAMPLE 5

已知 $\overrightarrow{v}=(a, b)$、$\overrightarrow{w}=(x, y)$為非零之二向量，下列四個條件中，共有幾個條件可以確保向量 $\overrightarrow{v}$ 平行向量 $\overrightarrow{w}$。條件① $\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix}=0$。條件② $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=3$。條件③ $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}=0$。條件④ $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}=-1$。

(1) 0 個 (2) 1 個 (3) 2 個 (4) 3 個 (5) 4 個。

答案：(3)

① $\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \frac{a}{x}=\frac{b}{y} \Rightarrow$ 平行

② $\frac{a}{x}=\frac{b}{y} \Rightarrow$ 平行

③ $\vec{v}\cdot\vec{w}=0 \Rightarrow$ 垂直

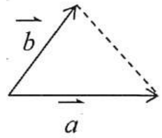
④ $ax+by=-1$ 無法判定

選 (2)

3-6 三角形面積公式

1. 三角形面積公式

(1)由 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 所張成的三角形面積為 $\underline{\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2-(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2}}$



(2)由 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$ 所張成的三角形面積為 $\underline{\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\right|}$

(3) ΔABC面積 $=\underline{\dfrac{1}{2}\times\text{底}\times\text{高}}=\underline{\dfrac{1}{2}ab\sin\theta}=\underline{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}=\underline{\dfrac{abc}{4R}}=\underline{rs}$

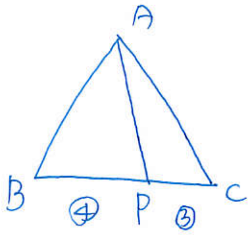
(兩邊一夾角)　　(三邊長)

其中，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$，R 為外接圓半徑，r 為內切圓半徑

EXAMPLE 1

設 $A(0,0)$，$B(-6,12)$，$C(-12,-4)$，且 $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{7}\overrightarrow{AC}$，求$\Delta ABP$的面積。

答案：48



P在 $\overline{BC}$ 上且

$\overline{BP}:\overline{PC}=4:3$

ΔABC面積

$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AC}\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-6 & 12\\ -12 & -4\end{vmatrix}\right|$

$=\frac{1}{2}\times(24+144)=84$

ΔABP面積 $=\frac{4}{7}\times\Delta ABC$面積 $=\frac{4}{7}\times84=48$

EXAMPLE 2

$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 為平面上兩向量，且 $2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}$ 所張成的平行四邊形面為 20，求 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 所張成的平行四邊形面積。

答案：4

$\times2\left|\begin{vmatrix}2\vec{a}-\vec{b}\\ \vec{a}+2\vec{b}\end{vmatrix}\right|=20$

$\times\frac{-2}{5}\ \Rightarrow\left|\begin{vmatrix}2\vec{a}-\vec{b}\\ 5\vec{a}\end{vmatrix}\right|=20$

$\Rightarrow\left|\begin{vmatrix}-\vec{b}\\ 5\vec{a}\end{vmatrix}\right|=20$

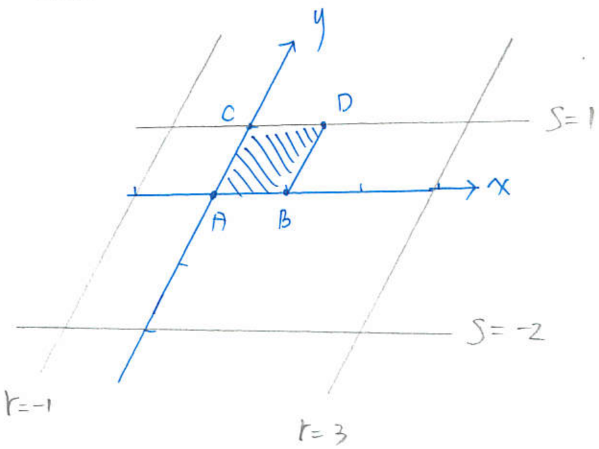
$\Rightarrow 5\left|\begin{vmatrix}\vec{a}\\ \vec{b}\end{vmatrix}\right|=20$

$\Rightarrow\left|\begin{vmatrix}\vec{a}\\ \vec{b}\end{vmatrix}\right|=4$

EXAMPLE 3

設平面上三點 $A(-1,4)$、$B(3,-2)$、$C(2,5)$，若 $\overrightarrow{AP}=r\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$，其中 r,s 為實數，其中 $-1\leq r\leq3$，$-2\leq s\leq1$，求 P 點所形成的區域面積。

答案：264



P点所形成區域面積為 $4\times3\times$ ▱ABDC面積

▱ABDC面積 $=\left|\begin{vmatrix}4 & -6\\ 3 & 1\end{vmatrix}\right|=22$

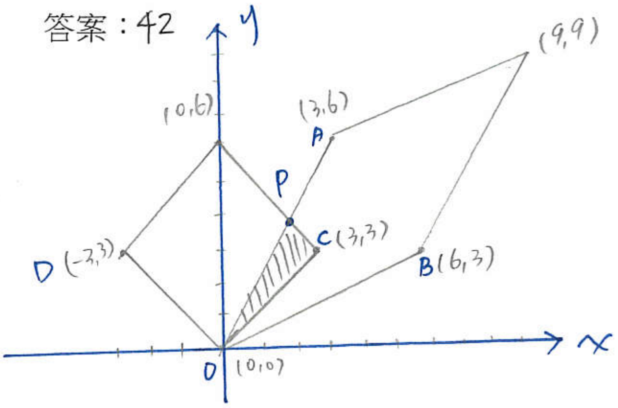
所求 $=12\times22=264$

EXAMPLE 4

坐標平面上，設 O 為原點，$\overrightarrow{a}=(3,6)$，$\overrightarrow{b}=(6,3)$，$\overrightarrow{c}=(3,3)$，$\overrightarrow{d}=(-3,3)$，$P$ 為平面上的動點，若點集合 $A=\{P \mid \overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}$，其中 $0\le x\le 1$，且 $0\le y\le 1\}$，

點集合 $B=\{P \mid \overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{c}+y\overrightarrow{d}$，其中 $0\le x\le 1$，且 $0\le y\le 1\}$，求區域 $A\cup B$ 的面積。

答案：42



$P\begin{cases}\overleftrightarrow{OA}: y=2x \\ \overleftrightarrow{CP}: y=-x+6\end{cases}$

$\therefore P(2,4)$

$\triangle OCP$ 面積 $=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}3&3\\2&4\end{vmatrix}\right|$

$=3$

所求 $= A+B-A\cap B$

$=\left|\begin{vmatrix}3&6\\6&3\end{vmatrix}\right|+\left|\begin{vmatrix}3&3\\-3&3\end{vmatrix}\right|-3$

$=27+18-3$

$=42$

EXAMPLE 5

$\triangle ABC$ 中 $\overline{AB}=3$、$\overline{AC}=4$，且 $\angle BAC$ 為鈍角，若 $\triangle ABC$ 面積為 5，求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$。

答案：$-2\sqrt{11}$

$\triangle ABC$ 面積 $=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$

$5=\frac{1}{2}\sqrt{3^2\times 4^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$

$100=144-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2$

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\pm\sqrt{44}$

$\because \angle BAC$ 為鈍角 $\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-2\sqrt{11}$

EXAMPLE 6

在 $\triangle ABC$ 中，設 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=10$，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=6$，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=15$，求 $\triangle ABC$ 面積。

答案：$5\sqrt{3}$

$\begin{matrix}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=10\\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=6\end{matrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})=16 \Rightarrow |\overrightarrow{AB}|=4$

$\begin{matrix}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=10\\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=15\end{matrix} \Rightarrow \overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=25 \Rightarrow |\overrightarrow{AC}|=5$

$\triangle ABC$ 面積 $=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{4^2\times 5^2-10^2}=\frac{1}{2}\times 10\sqrt{3}=5\sqrt{3}$

EXAMPLE 7

$\triangle ABC$ 內部有一點 O，滿足 $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\sqrt{3}\,\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$，且 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$，則以下哪些選項是正確的？

(1) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-\frac{1}{2}$ (2) $\triangle OAB$ 的面積為 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $\triangle OAC$ 的面積為 $\frac{1}{2}$ (4) O 點是 $\triangle ABC$ 的重心

(5) $\triangle OAB$ 的面積為 $\triangle ABC$ 的面積為 $\frac{1}{3}$ 倍。

答案：(1)(3)

(1) $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}=-\sqrt{3}\,\overrightarrow{OC}$

平方 $\Longrightarrow |\overrightarrow{OA}|^2+4\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+4|\overrightarrow{OB}|^2=3|\overrightarrow{OC}|^2$

$\Rightarrow \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$

$\therefore \angle AOB=120^\circ$

(2) $\triangle OAB$ 面積 $=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{1^2\times 1^2-\left(\frac{-1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

(3) $\triangle OAC$ 面積 $=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OC}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC})^2}$

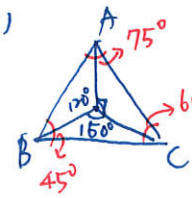
$=\frac{1}{2}\times\sqrt{1\times 1}=\frac{1}{2}$

$\left(\begin{matrix}\overrightarrow{OA}+\sqrt{3}\overrightarrow{OC}=-2\overrightarrow{OB},\ |\overrightarrow{OA}|^2+2\sqrt{3}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+3|\overrightarrow{OC}|^2=4|\overrightarrow{OB}|^2\\ \therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=0,\ 即\ \angle AOC=90^\circ\end{matrix}\right)$

(4) $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$

O是 $\triangle ABC$ 之外心

(5)



$\triangle OBC=\frac{1}{2}\times 1\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

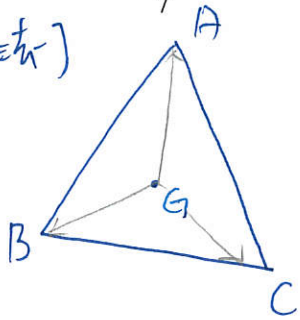
選(1)(3)

EXAMPLE 8

已知 $7\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b}+2\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}$，若 $\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$ 所張成的三角形面積為 10，求 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{c}$ 所張成的三角形面積。

答案：$\dfrac{30}{7}$

[法一]



$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$

$\triangle GAB=\triangle GBC=\triangle GCA$

$\triangle GBC$ 即為 $3\vec{b}$、$2\vec{c}$ 所張成之三角形面積 $=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}3\vec{b}\\2\vec{c}\end{vmatrix}\right|$

$=\frac{1}{2}\times 3\times 2\times\left|\begin{vmatrix}\vec{b}\\\vec{c}\end{vmatrix}\right|=6\times 10=60$

$\triangle GAC$ 即為 $7\vec{a}$、$2\vec{c}$ 所張成之三角形面積.

$60=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}7\vec{a}\\2\vec{c}\end{vmatrix}\right| \Rightarrow \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\vec{a}\\\vec{c}\end{vmatrix}\right|=\frac{60}{7\times 2}=\frac{30}{7}$

[法二]

$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\vec{a}\\\vec{c}\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\frac{3}{7}\vec{b}-\frac{2}{7}\vec{c}\\\vec{c}\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\times\left|\begin{vmatrix}\frac{3}{7}\vec{b}\\\vec{c}\end{vmatrix}\right|=\frac{3}{7}\times 10=\frac{30}{7}$

EXAMPLE 9

平面上兩向量 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 滿足 $|2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=|3\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b}|=3$，且 $(2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\perp(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})$，求 $(\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b})$、$(3\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})$ 兩向量所決定的平行四邊形面積。

答案：7

由 $|2\vec{a}+\vec{b}|=3$，$|\vec{a}-\vec{b}|=1$

且 $(2\vec{a}+\vec{b})$、$(\vec{a}-\vec{b})$ 互相垂直得知

$2\vec{a}+\vec{b}$、$\vec{a}-\vec{b}$ 所圍成之平行四邊形面積為 3.

即 $\left|\begin{vmatrix}2\vec{a}+\vec{b}\\\vec{a}-\vec{b}\end{vmatrix}\right|\overset{\times 1}{=}3 \Rightarrow \left|\begin{vmatrix}2\vec{a}+\vec{b}\\3\vec{a}\end{vmatrix}\right|=3 \Rightarrow \left|\begin{vmatrix}\vec{a}\\\vec{b}\end{vmatrix}\right|=1$

所求 $=\left|\begin{vmatrix}\vec{a}+2\vec{b}\\3\vec{a}-\vec{b}\end{vmatrix}\right|\overset{\times(-3)}{=}\left|\begin{vmatrix}\vec{a}+2\vec{b}\\-7\vec{b}\end{vmatrix}\right|$

$=7\left|\begin{vmatrix}\vec{a}\\\vec{b}\end{vmatrix}\right|=7\times 1=7$

EXAMPLE 10

試問下列哪些選項是正確的？

(1)行列式 $\begin{vmatrix}109 & 2021\\110 & 2020\end{vmatrix}$ 的值為 -2130 (2)若 $\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}=4$，則 $\begin{vmatrix}a^2 & b^2\\c^2 & d^2\end{vmatrix}=16$

(3)若 $\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}=4$，則 $\begin{vmatrix}2a & 2c\\3b & 3d\end{vmatrix}=24$

(4)若 $\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}=4$，則以 $O(0，0)$，$X(a，b)$，$Y(c，d)$ 這三個點為頂點所形成的 $\triangle OXY$ 面積為 2

(5)若以 $O(0，0)$，$X(a，b)$，$Y(c，d)$ 這三個點為頂點所形成的 $\triangle OXY$ 面積為 2，則 $\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}=4$。

答案：(1)(3)(4)

(1) $\begin{vmatrix}109 & 2021\\110 & 2020\end{vmatrix}\times(-1)=\begin{vmatrix}109 & 2021\\1 & -1\end{vmatrix}$

$=-109-2021=-2130$ (o)

(2) $\begin{vmatrix}1 & 1\\2 & 6\end{vmatrix}=4$ $\begin{vmatrix}1^2 & 1^2\\2^2 & 6^2\end{vmatrix}=32\neq 16$ (x)

(3) $\begin{vmatrix}2a & 2c\\3b & 3d\end{vmatrix}=2\times 3\begin{vmatrix}a & c\\b & d\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}=24$ (o)

(4) OXY 面積 $=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{OX}\\\overrightarrow{OY}\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}\right|=2$ (o)

(5) $\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}\right|=2$，$\left|\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}\right|=4$，$\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}=\pm 4$ (x)

3-7 柯西不等式

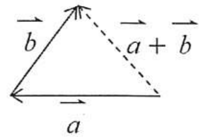
1. 柯西不等式⇒ 相加、相加 求最大(小)值

 (1)[向量形式] $|\vec{a}\cdot\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|$ ，等號成立時， $\vec{a}\,//\,\vec{b}$ 。

 (2)[一般形式] $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\ge(ac+bd)^2$ ，等號成立時， $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$ 。

2. 三角不等式

 $|\vec{a}|+|\vec{b}|\ \le\ |\vec{a}+\vec{b}|$ ，等號成立時， $\vec{a},\vec{b}$ 同向 。



EXAMPLE 1

設 x,y 為實數，已知 $x^2+4y^2-2x+8y-8=0$，求：

(1)$3x-4y$ 的最大值

(2)承上題，此時 $x=\alpha$，$y=\beta$，求數對(α,β)。

答案：(1) 20 (2)$(4,-2)$

$(x-1)^2+4(y+1)^2=13$

$3x-3-4y-4$

$[(x-1)^2+(2y+2)^2](3^2+(-2)^2)\ge(3x-4y-7)^2$

2次 1次

$\Rightarrow 13\times13\ge(3x-4y-7)^2$

$\Rightarrow -13\le 3x-4y-7\le 13\Rightarrow -6\le 3x-4y\le 20$

∴ 當 $3x-4y=20$ (最大值) 時，

$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{2y+2}{-2}=t\Rightarrow\begin{cases}x=3t+1\\y=-t-1\end{cases}$

$3(3t+1)-4(-t-1)=20\Rightarrow 13t=13,\ t=1$

$(\alpha,\beta)=(4,-2)$

EXAMPLE 3

已知 $\vec{a}$ ，$\vec{b}$ 為兩個不平行的向量，且$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=\sqrt{2}$，下列何者不可能為$|\vec{a}-\vec{b}|$的長度？

(1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) $2-\sqrt{3}$ (5) $1+\sqrt{3}$

答案：(4)

$|\vec{a}|-|\vec{b}|\le|\vec{a}-\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|\Rightarrow 3-\sqrt{2}\le|\vec{a}-\vec{b}|\le 3+\sqrt{2}$

$\approx 1.\cdots$ $\approx 4.\cdots$

選(4)

EXAMPLE 2

已知 $x+y=6$，求$\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}$的最小值。

答案：$\dfrac{3}{2}$

$((\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2)((\tfrac{1}{\sqrt{x}})^2+(\tfrac{2}{\sqrt{y}})^2)\ge(1+2)^2$

倒數

$\Rightarrow 6(\frac{1}{x}+\frac{4}{y})\ge 9\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\ge\frac{3}{2}$

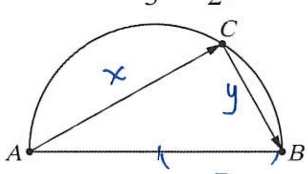
EXAMPLE 4

如圖，小成在一半徑為 2 公里的半圓形湖游泳，他先由湖畔的 A 點沿直線採蛙式游到湖邊的某個點 C，再沿直線採自由式游到 B 點，其中 $\overline{AB}$ 為湖的直徑。已知他游蛙式速度為每小時 1.5 公里，游自由式速度為每小時 2 公里，若小成的運動時間總共為 t 小時，且游蛙式的距離(即 $\overline{AC}$)為 x 公里與自由式的距離(即 $\overline{CB}$)為 y 公里。

(1)若 $t=ax+by$，數對(a,b)。 (2) t 的最大值

答案：(1)$\dfrac{2}{3}$；$\dfrac{1}{2}$ (2)$\dfrac{10}{3}$

(1) $t=\dfrac{x}{1.5}+\dfrac{y}{2}=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{2}y$



(2) $x^2+y^2=4^2=16$

$(x^2+y^2)((\tfrac{2}{3})^2+(\tfrac{1}{2})^2)\ge(\tfrac{2}{3}x+\tfrac{1}{2}y)^2$

2次 1次

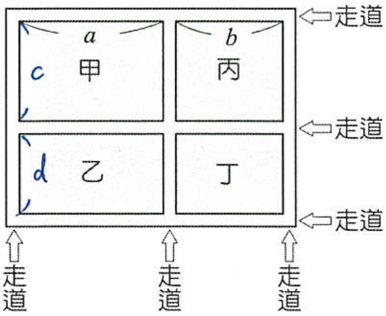
$\Rightarrow 16\times\dfrac{25}{36}\ge(\tfrac{2}{3}x+\tfrac{1}{2}y)^2$

$\Rightarrow -\dfrac{10}{3}\le\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{2}y\le\dfrac{10}{3}$

EXAMPLE 5

某工廠為配合政府的節水抗旱政策，擬在廠房附近尋覓一塊長方形土地，並規劃開設寬度 1 公尺且分別平行土地之長與寬邊的走道各 3 條，走道恰將土地分成四區，設計圖如下。在此甲、乙，丙、丁四區均挖設深度 2 公尺的沉澱池，基於各區功能需求，甲區需具 294 立方公尺容量，丁區需具 150 立方公尺容量，乙、丙則無容量限制。今有房產仲介推薦了一筆長度為 21 公尺的長方形土地，以此數據計算後發覺若欲達該工廠上述要求，此土地寬度至少需為多少公尺。

答案：27



$a+b+3=21$, $a+b=18$

甲 $= ac\cdot 2 \geq 294$

丁 $= bd\cdot 2 \geq 150$

求 $c+d+3$ 最小值。

$\left((\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2\right)\left((\sqrt{c})^2+(\sqrt{d})^2\right) \geq \left(\sqrt{ac}+\sqrt{bd}\right)^2$

$18(c+d) \geq (ac+bd+2\sqrt{acbd})$

$\geq 147+75+2\sqrt{147\times 75}=432$

$\Rightarrow c+d \geq \frac{432}{18}=24$, $c+d+3 \geq 27$ #

EXAMPLE 6

關於三角不等式之敘述，下列選項中哪些是正確的？

(1)對於任意兩實數 a，b，不等式 $|a|+|b| \geq |a+b|$ 恆成立，且當 $ab \geq 0$ 時，等號成立

(2)對於兩實數 $a=x-1$，$b=x-3$，存在實數 x，使得 $|a|+|b|=0$

(3)任意兩向量 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ ，不等式 $|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}| \geq |\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|$ 恆成立，當 $\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}$ 時，等號成立

(4)對於兩向量 $\overrightarrow{a}=(x-1，2)$，$\overrightarrow{b}=(x-3，4)$存在實數 x，使得 $|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|=6$

(5)當 $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$ 時，$|\overrightarrow{a}|^2+|\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2$

答案：(1)(5)

(1) 正確

(2) $|x-1|+|x-3|=|x-1|+|3-x| \geq |(x-1)+(3-x)|=2$ (×)

(3) $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 同方向 (×)

(4) $|\vec{a}|+|\vec{b}| \geq |\vec{a}+\vec{b}|=|(2x-4, 6)|$

$=\sqrt{(2x-4)^2+6^2} \geq 6$

當 $x=2$ 時，$\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(-1,4)$ $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$

故 "=" 不成立，$|\vec{a}|+|\vec{b}|>6$ (×)

(5) $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$ (O)

選(1)(5) #

EXAMPLE 7

$\overrightarrow{a}$ 和 $\overrightarrow{b}$ 為平面上兩個非零向量，且 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ 和 $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 也都不是零向量，下列哪些項是正確的？

(1) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}| \geq 0$

(2)$2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=(|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2-|\overrightarrow{a}|^2-|\overrightarrow{b}|^2)$

(3)若 $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|$ ，則 $\overrightarrow{a}$ 和 $\overrightarrow{b}$ 是兩個互相垂直的向

(4)若 $\overrightarrow{a}$ 和 $\overrightarrow{b}$ 是兩平行向量，則 $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|$

(5)若 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上的正射影的長度等於 $\overrightarrow{b}$ 在 $\overrightarrow{a}$ 上的正射影的長度，則 $|\overrightarrow{a}|=|\overrightarrow{b}|$ 。

答案：(1)(2)(3)

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b} \geq -|\vec{a}||\vec{b}| \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}||\vec{b}| \geq 0$ (O)

(2) $|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

$=2\vec{a}\cdot\vec{b}$ (O)

(3) $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}-\vec{b}|^2 \Rightarrow |\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$, $\vec{a}\perp\vec{b}$ (O)

(4) 若 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 同向，$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$

反向，$|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|$ (×)

(5) $|\vec{a}|\cdot\cos\theta=|\vec{b}|\cos\theta$

$\Rightarrow |\vec{a}|=|\vec{b}|$ 或 $\cos\theta=0$ (×)

$\Downarrow$

$\vec{a}\perp\vec{b}$