110 年試辦考試
數學 A 考科非選擇題評分原則

數學 A 的題型有選擇（填）與混合題或非選擇題。非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理論證過程。數學科非選擇題的解法通常不只一種，且有些解法並不屬於高中課程範圍，在此提供屬於高中課程，且多數考生可能採用的解法以供各界參考。不管採取哪種解法，均需於答題卷上清楚表達推理或解題過程，且得到正確答案，方可得到滿分。若過程中列式正確，但計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數。以下提供非選擇題參考答案，以及評分原則，至於學生的作答與無法得到滿分的情形，請參閱本中心將於 11 月 15 日出刊的第 327 期《選才電子報》。

第 19 題

一、滿分參考答案：

【解法一】

由於線性變換將直線映射到直線上，故可考慮直線 $y=x+1$ 上的兩點 $(0,1),(-1,0)$

經由 T 作用後分別為 $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix},\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix}$

因點在直線 $y=5x+13$ 上，可得 $\begin{cases} a+5b=13 \\ 5a-b=13 \end{cases}$

因此得 $a=3,b=2$

【解法二】

直線 $y=x+1$ 上的點的參數式為 $(t,t+1)$，經 T 作用後為

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t \\ t+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} at-bt-b \\ bt+at+a \end{bmatrix}$$

因點在直線 $y=5x+13$ 上，可得 $bt+at+a=5(at-bt-b)+13$，

即 $(4a-6b)t+13-5b-a=0$。

因對所有實數 t 皆成立，故得 $\begin{cases} 4a-6b=0 \\ a+5b=13 \end{cases}$

因此得 $a=3, b=2$

【解法三】

T將斜率為 1 的直線轉換成斜率為 5，$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a-b \\ b+a \end{bmatrix}$，

故由 $\dfrac{a+b}{a-b}=5$ 得 $2a=3b$，由 18 題知 $\begin{cases} 2a-3b=0 \\ a+5b=13 \end{cases}$，

故 $\begin{cases} 2a-3b=0 \\ a+5b=13 \end{cases}$，解聯立得 $a=3, b=2$

二、評分原則：

(一)根據題意，列出正確的數學式，例如利用直線的參數式寫出經 T 作用的點。

(二)列出正確的聯立方程組。

(三)解出正確 a 、 b 的值。

第 20 題

一、滿分參考答案：

【解法一】

設 $P=(x_1, y_1), Q=(x_2, y_2)$，

依題意得 $P'=(ax_1-by_1, bx_1+ay_1), Q'=(ax_2-by_2, bx_2+ay_2)$

$\overline{P'Q'}=\sqrt{(a(x_1-x_2)-b(y_1-y_2))^2+(b(x_1-x_2)+a(y_1-y_2))^2}$

$=\sqrt{(a^2+b^2)(x_1-x_2)^2+(a^2+b^2)(y_1-y_2)^2}$

$=\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$=\sqrt{a^2+b^2}\,\overline{PQ}$

將第 19 題的 $a=3,b=2$ 代入，得 $\dfrac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}}=\sqrt{13}$。

【解法二】

因 $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}=\sqrt{a^2+b^2}\begin{bmatrix} \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \dfrac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{bmatrix}=\sqrt{a^2+b^2}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$，

其中 $\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

故 T 為旋轉 θ 角合成伸縮 $\sqrt{a^2+b^2}$ 倍。

若 O 為原點，則 $\Delta OP'Q'$ 與 ΔOPQ 為相似三角形，且 $\Delta OP'Q'$ 邊長為 ΔOPQ 的 $\sqrt{a^2+b^2}$ 倍。將第 19 題的 $a=3,b=2$ 代入，得 $\dfrac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}}=\sqrt{13}$。

一、評分原則：

(一)根據題意，列出正確的數學式。例如假設 P, Q 兩點坐標，並正確寫出經 T 作用的點。

(二)正確說明兩個長度的比為定值。

(三)解出正確的定值。