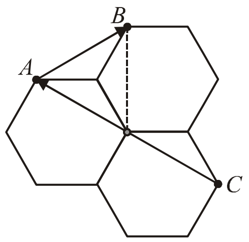
臺北區 102 學年度第一學期第三次學科能力測驗模擬考試
數學考科解析

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	4	5	1	3	4	235	235	2345	125	34	34	14	5	1
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
2	2	5	2	6	3	4	0	3	1	6	1	6	2	5
31	32	33	34											
2	7	6	3											

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=4\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\cos 120°=-12$
故選(5)



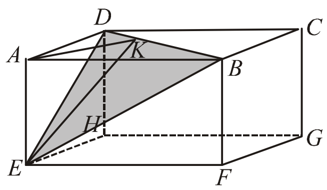
2. $\because x=1$ 爲漸近線，$\therefore a=1$ 把 $A(\frac{3}{2},0)$ 代入
$\Rightarrow 0=\log(\frac{3}{2}-1)+b=-\log 2+b$ 所以 $b=\log 2$
$a+b=1+\log 2=1.301$，故選(4)

3. (1) $2\cos^2 30°-1=\cos 60°=\frac{1}{2}$
(2) $\sqrt{\frac{1-\cos 80°}{2}}=\sin 40°>\sin 30°=\frac{1}{2}$
(3) $\frac{1+\cos 60°}{2}=\frac{3}{4}$
(4) $2\cos 25°\sin 155°=2\cos 25°\sin 25°=\sin 50°>\sin 30°=\frac{1}{2}$
(5) $2\sin 20°\cos 70°=2\sin^2 20°=1-\cos 40°$
$=1-\sin 50°<1-\sin 30°=\frac{1}{2}$
故選(5)

4. 令 $\overrightarrow{v_1}=(1,2,a)$，$\overrightarrow{v_2}=(2,7,b)$，$\because (4,1,-2)\perp\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}$，$(c,-2,d)\perp\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}$
$\therefore$向量 $(4,1,-2)$ 與向量 $(c,-2,d)$ 平行，得 $c=-8$、$d=4$
故選(1)

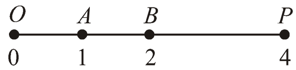
5. __②__③__⑤__⑦ or ②__③__⑤__⑦__ or ②__③__⑤__⑦
$4!+4!+C_2^4\cdot 3!\cdot 2!=120$，故選(3)

6. 作 $\overline{AK}\perp\overline{BD}$ 於點 K，由三垂線定理，知 $\overline{EK}\perp\overline{BD}$，因此平面 BDE 與平面 ABD 所夾的二面角 θ 即爲 $\angle AKE$。ΔABD 中，$\overline{AD}=6$、$\overline{AB}=8$、$\overline{BD}=10$，得 $\overline{AK}=\frac{24}{5}$
故 $\tan\theta=\frac{\overline{AE}}{\overline{AK}}=\frac{5}{4}$，故選(4)



二、多選題

7. (1) 錯，如圖，



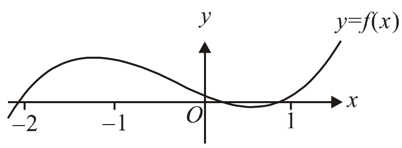
$\overrightarrow{OP}=4\overrightarrow{OA}+0\overrightarrow{OB}$
$=2\overrightarrow{OA}+1\overrightarrow{OB}$
$=0\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$
(4) 錯，$\overline{AP}:\overline{BP}=|y|:|x|$
故選(2)(3)(5)

8. $\Gamma_1:\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=1$ 的焦點爲 $(\pm\sqrt{m^2+n^2},0)$，漸近線爲 $nx\pm my=0$
$\Gamma_2:\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=-1$ 的焦點爲 $(0,\pm\sqrt{m^2+n^2})$，漸近線爲 $nx\pm my=0$
$\Gamma_3:\frac{x^2}{n^2}-\frac{y^2}{m^2}=1$ 的焦點爲 $(\pm\sqrt{m^2+n^2},0)$，漸近線爲 $mx\pm ny=0$
$\Gamma_4:\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=2$ 的焦點爲 $(\pm\sqrt{2(m^2+n^2)},0)$，漸近線爲 $nx\pm my=0$，故選(2)(3)(5)

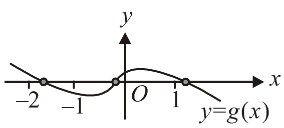
9. $\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+y^2}=8$ 的圖形是以 $F_1(-1,0)$、$F_2(3,0)$ 爲焦點，長軸爲 $2a=8$ 的橢圓，故 $a=4$、$c=2$、$b=\sqrt{a^2-c^2}=2\sqrt{3}$
因此橢圓 Γ 以點 $(1,0)$ 爲對稱中心，以直線 $x=1$ 及 x 軸爲對稱軸
Γ 上的動點 P 到中心點 $(1,0)$ 的距離最小值爲 $b=2\sqrt{3}$
Γ 上的動點 P 到焦點 $(3,0)$ 的距離最小值爲 $a-c=2$
線段 $\overline{PQ}$ 爲橢圓 Γ 上的弦，弦長 $\overline{PQ}$ 的最大值爲 $2a=8$
故選(2)(3)(4)(5)

10. (1) $a_3=2>\frac{31}{16}=T_5$
(2) $S_{n+1}-S_n$ 即爲 a_{n+1}，又公差爲正，故正確
(3) $T_{n+1}-T_n$ 即爲 b_{n+1}，當 $0<r<1$ 時不合
(4) 若 $d=r=2$，則 $a_3=5$、$b_3=4$
(5) 若 $0<r<1$，則 $a_n>1>b_n$
故選(1)(2)(5)

11. (1)(2) 不妨假設 $a<b<c$，由圖知 $a<-2$、$0<b<c<1$，所以 $a+b+c<0$，$abc<0$



(3) 見圖

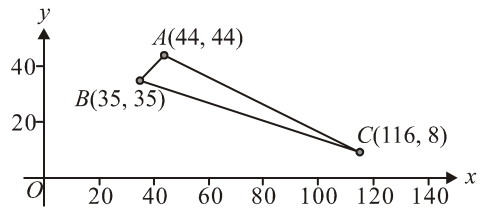


，或可利用勘根定理：

$g(-2)g(-1)<0$、$g(-1)g(0)<0$、$g(1)g(2)<0$，可知有三實根
(4) 由(3)知恰有一正根
(5) 由圖知，$g(x)=0$ 的根與 $f(x)=0$ 的根不同
故選(3)(4)

12. 偶數點時，有 $\frac{1}{3}$ 的機率跳躍一單位，因此有 $\frac{1}{3}$ 的機率從偶數到奇數，有 $\frac{2}{3}$ 的機率從偶數到偶數。在奇數點時，有 $\frac{1}{2}$ 的機率跳躍一單位，因此有 $\frac{1}{2}$ 的機率從奇數到偶數，有 $\frac{1}{2}$ 的機率從奇數到奇數
(1) 從原點(即偶數點)出發，經過一次跳躍後，停留在偶數點，機率為 $\frac{2}{3}$，因此選項(1)錯誤
(2) 經過兩次跳躍後，它停留在坐標 3 的情況可能為 1 步＋2 步，或者 2 步＋1 步，機率為 $(\frac{1}{3}\times\frac{1}{2})+(\frac{2}{3}\times\frac{1}{2})=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$。因此選項(2)錯誤
(3) 經過三次跳躍後，它停留在坐標 3 的情況可能為 1 步＋1 步＋1 步，機率為 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$，因此選項(3)正確
(4) 若我們將狀態矩陣假設為 $\begin{bmatrix}偶\\奇\end{bmatrix}$，則轉移矩陣為 $\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，此機器人從原點出發，狀態矩陣為 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，經一次跳躍後的狀態矩陣為 $\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}$。經兩次跳躍後的狀態矩陣為 $\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{11}{18}\\ \frac{7}{18}\end{bmatrix}$，它停留在偶數點的機率為 $\frac{11}{18}$
經三次跳躍後的狀態矩陣為 $\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{11}{18}\\ \frac{7}{18}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{65}{108}\\ \frac{43}{108}\end{bmatrix}$，因此它停留在偶數點的機率為 $\frac{65}{108}$
因此選項(4)正確，選項(5)錯誤，綜合以上故選(3)(4)

13. 依題意：
$x\ge y\ge z\ge 8$ 又 $x+3y-z=132\Rightarrow x+3y-132=z$
$\Rightarrow x\ge y\ge x+3y-132\ge 8$ 即 $\begin{cases}x-y\ge 0\\ x+2y\le 132\\ x+3y\ge 140\end{cases}$，(4)正確，(5)錯誤



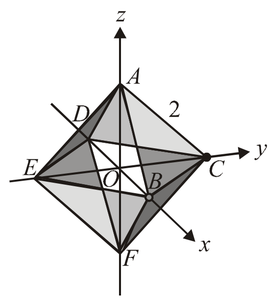
$x+y+z=x+y+(x+3y-132)=2x+4y-132$
當 $(x,y,z)=(35,35,8)$ 時，可得最小值 78，(1)正確
當 $(x,y,z)=(44,44,44)$ 或 $(50,41,41)$ 或……或 $(116,8,8)$ 均可得最大值 132
知(2)(3)錯誤，故選(1)(4)

第貳部分：選填題

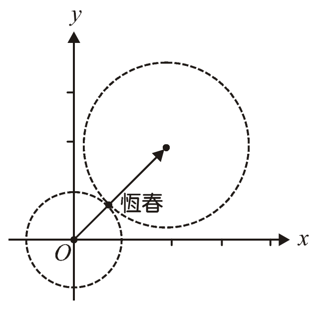
A. 現在之冰原覆蓋率為
$A=100\times(\frac{3}{4})^{-2000k}=64\Rightarrow(\frac{3}{4})^{-2000k}=0.64$
1000 年後之冰原覆蓋率為
$A'=100\times(\frac{3}{4})^{-3000k}=100\times(0.64)^{\frac{3}{2}}=51.2$

B. 方法(一)：$\vec{x}$ 和 $\vec{y}$ 在 $\vec{z}$ 上的正射影相同，表示 $(\overrightarrow{x-y})\perp\vec{z}$，
$(a-1,7-2a,-2)\cdot(1,-3,a)=0$，得 $a=\frac{22}{5}$
方法(二)：$\vec{x}$ 在 $\vec{z}$ 上的正射影為 $(\frac{\vec{x}\cdot\vec{z}}{|\vec{z}|^2})\vec{z}$，$\vec{y}$ 在 $\vec{z}$ 上的正射影為 $(\frac{\vec{y}\cdot\vec{z}}{|\vec{z}|^2})\vec{z}$，兩者相同，故 $\vec{x}\cdot\vec{z}=\vec{y}\cdot\vec{z}$，得 $a=\frac{22}{5}$

C. 如圖，建立坐標系，ΔOAB、ΔOBC、ΔOAC 皆為等腰直角三角形。$\overline{AB}=2$
$\therefore\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\sqrt{2}$
因此點 $B(\sqrt{2},0,0)$、$C(0,\sqrt{2},0)$、$A(0,0,\sqrt{2})$。平面 ABC 的方程式為 $x+y+z=\sqrt{2}$。同理，平面 DEF 的方程式為 $x+y+z=-\sqrt{2}$。兩平行面的距離為 $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$



D. 坐標化如圖，



設颱風中心一開始的坐標為 $(0,0)$、恆春 $(100\sqrt{2},100\sqrt{2})$
t 小時後，颱風的暴風圈滿足方程式
$(x-20\sqrt{2}t)^2+(y-20\sqrt{2}t)^2=(200+10t)^2$
若恆春在暴風圈中，則
$(100\sqrt{2}-20\sqrt{2}t)^2+(100\sqrt{2}-20\sqrt{2}t)^2\le(200+10t)^2$
$\Rightarrow 3t^2-40t\le 0\Rightarrow t(3t-40)\le 0$
$\Rightarrow 0\le t\le\frac{40}{3}$
恆春從最初接觸到最後離開暴風圈將會持續 $\frac{40}{3}$ 小時
【另解】
設所求為 t 小時
則 $\underbrace{200}_{原暴風半徑}+\underbrace{(200+10t)}_{t\text{小時後的暴風半徑}}=40t\Rightarrow t=\frac{40}{3}$
故恆春從最初接觸到最後離開暴風圈將會持續 $\frac{40}{3}$ 小時

E. ΔOAB 的面積爲 $\frac{1}{2}ab\sin 45° = \frac{\sqrt{2}ab}{4}(\overline{OA} = a , \overline{OB} = b)$

ΔOAB 中，餘弦定理：

$8^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 45° \Rightarrow a^2 + b^2 = 64 + \sqrt{2}ab$

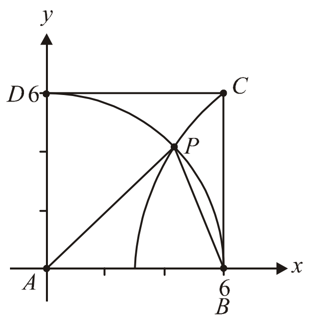
又 $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab \Rightarrow 64 + \sqrt{2}ab \geq 2ab \Rightarrow ab \leq \frac{64}{2 - \sqrt{2}}$

故 ΔOAB 的最大面積爲 $16 + 16\sqrt{2}$

F. $\underbrace{C_0^4(\frac{2}{3})^4(\frac{1}{2})^4}_{\text{第一回合對0題}} + \underbrace{C_1^4(\frac{1}{3})^1(\frac{2}{3})^3(\frac{1}{2})^3}_{\text{第一回合對1題}} + \underbrace{C_2^4(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^2(\frac{1}{2})^2}_{\text{第一回合對2題}}$

$+\underbrace{C_3^4(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})^1(\frac{1}{2})^1}_{\text{第一回合對3題}} = \frac{5}{27}$

G. 如圖，



先坐標化，以 A 點爲原點，$\overline{AB}$ 及 $\overline{AD}$ 分別爲 x 軸正向及 y 軸正向。點 P 滿足線段 $\overline{PB}$ 長等於 P 點到線段 $\overline{AD}$ 的距離，故點 P 落在以 B 點爲焦點，線段 $\overline{AD}$ 爲準線的拋物線上，則 $P(x , y)$ 滿足方程式 $y^2 = 4 \times 3 \times (x - 3)$

又 ΔABP 爲等腰三角形，點 P 位於正方形 $ABCD$ 內部(即不含邊界)，所以 $\overline{PA}$ 恆大於 $\overline{PB}$，$\overline{AB}$ 也恆大於 $\overline{PB}$ ($\because \overline{PB} = d(P , \overline{AD})$)，$\overline{PB}$ 不可能爲等腰三角形的腰，因此等腰三角形 ΔABP 的兩腰爲 $\overline{AP}$ 與 $\overline{AB}$

$\overline{AP} = \overline{AB}$，$P(x , y)$ 滿足方程式 $x^2 + y^2 = 36$，且 $0 \leq x \leq 6$，$0 \leq y \leq 6$

解聯立方程式 $\begin{cases} y^2 = 12(x-3) \\ x^2 + y^2 = 36 \end{cases}$，得 $x = -6 + 6\sqrt{3}$

$x = d(P , \overline{AD}) = \overline{PB}$，$\overline{PA} = \overline{AB} = 6$

故 $\overline{PA} + \overline{AB} = -6 + 6\sqrt{3} + 6 = 6\sqrt{3}$