全國公私立高級中學 102 學年度學科能力測驗第四次聯合模擬考試

數學考科解析

考試日期：102 年 12 月 19~20 日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4	4	4	2	1	45	23	123	145	3	45	1	8	8	3
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
5	5	−	2	3	1	5	2	1	−	1	−	2	1	4
31	32	33												
4	3	4												

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 原式= $\dfrac{1}{x-\dfrac{x^2-1}{\dfrac{x^2-x-2}{x-1}}}=\dfrac{1}{x-\dfrac{(x^2-1)(x-1)}{x^2-x-2}}$

$=\dfrac{1}{x-\dfrac{(x-1)(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-2)}}=\dfrac{1}{x-\dfrac{(x-1)^2}{x-2}}=\dfrac{1}{\dfrac{x(x-2)-(x-1)^2}{x-2}}$

$=\dfrac{1}{\dfrac{-1}{x-2}}=-x+2$，故選(4)

2. $\overline{AB}\times\pi=200\Rightarrow\overline{AB}\approx200\times\dfrac{7}{22}=\dfrac{700}{11}\approx63.6\approx64$，故選(4)

3. ① $x^2<10\Rightarrow x=1,2,3$

$\therefore P(A)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

②考慮 $A\cap B$ 即 $x^2<10$ 且 $x^2+y^2<40$

x	1	2	3
y	1 ~ 6	1 ~ 5	1 ~ 5

$\therefore P(A\cap B)=\dfrac{16}{6^2}=\dfrac{4}{9}$

由①②所求條件機率 $P(B|A)=\dfrac{P(B\cap A)}{P(A)}=\dfrac{\frac{4}{9}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{8}{9}$

故選(4)

4. 全體平均 $=\dfrac{29+54+78+108+182}{5}=\dfrac{451}{5}=90.2\approx90$ (萬元)

故選(2)

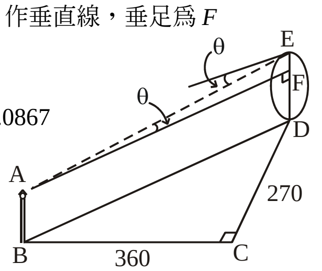
5. 如圖：連結 $\overline{BD}$，並由 A 向 $\overline{DE}$ 作垂直線，垂足為 F

$\overline{AF}=\overline{BD}=\sqrt{360^2+270^2}=450$

$\tan\theta=\dfrac{\overline{EF}}{\overline{AF}}=\dfrac{135-96}{450}=\dfrac{39}{450}\approx0.0867$

$\therefore\theta$ 最接近 5°

故選(1)



二、多選題

6. 依題意，可令等差數列 $<a_n>$ 前 3 項 $0,d,2d$

則 $b_1=f(a_1)=f(0)=2$

$b_2=f(a_2)=f(d)=d^2-d+2$

$b_3=f(a_3)=f(2d)=4d^2-2d+2$

$\because$數列 $<b_n>$ 為等比數列

$\therefore(d^2-d+2)^2=2(4d^2-2d+2)$

$\Rightarrow d^4-2d^3-3d^2=0$

$\Rightarrow d^2(d-3)(d+1)=0$

$\Rightarrow d=0,d=3,d=-1$
(不合)　　(不合)

可得數列 $<a_n>$ 前 3 項 0,3,6

數列 $<b_n>$ 前 3 項 2,8,32

(1) ╳：應為 $a_2=3$

(2) ╳：應為 $b_3=32$

(3) ╳： $a_{103}=a_1+102d=0+102\times3=306$

$b_5=b_1\times4^4=2\times4^4=512$，$\therefore a_{103}<b_5$

(4) ○：數列 $<a_n>$ 前 n 項和

$S_n=\dfrac{n}{2}[2\times0+(n-1)\times3]=\dfrac{n(3n-3)}{2}$

$S_8=\dfrac{8\times21}{2}=84<100$

$S_9=\dfrac{9\times24}{2}=108>100$，$\therefore n$ 至少為 9

(5) ○： $b_{100}=2\times4^{99}=2^{199}$

$\log b_{100}=\log2^{199}=199\log2\approx199\times0.3010=59+0.8990$

$\therefore\log b_{100}$ 的首數為 59

$\therefore b_{100}$ 為 60 位數

故選(4) (5)

7. (1) ╳：應為 $C(3,4,5)$

(2) ○： $B(3,0,5),D(0,4,5),Q(3,4,0)$

$\Rightarrow\overrightarrow{BQ}=(0,4,-5)$，$\overrightarrow{BD}=(-3,4,0)$

外積 $\overrightarrow{BQ}\times\overrightarrow{BD}$

$=\left(\begin{vmatrix}4&-5\\4&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-5&0\\0&-3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&4\\-3&4\end{vmatrix}\right)=(20,15,12)$

(3) ○：內積 $\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{BD}$

$=(0,4,-5)\cdot(-3,4,0)=16$

(4) ╳：平面 BDQ 方程式

$20(x-3)+15(y-0)+12(z-5)=0$

$\Rightarrow20x+15y+12z-120=0$

$\therefore d(C,$平面 $BDQ)$

$=\dfrac{|20\times3+15\times4+12\times5-120|}{\sqrt{20^2+15^2+12^2}}$

$=\dfrac{60}{\sqrt{769}}>\dfrac{60}{\sqrt{900}}=2$

(5) ╳： $\overrightarrow{OA}=(0,0,5)$

$\overrightarrow{OC}=(3,4,5)$

外積 $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}$

$=\left(\begin{vmatrix}0&5\\4&5\end{vmatrix},\begin{vmatrix}5&0\\5&3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&0\\3&4\end{vmatrix}\right)=(-20,15,0)$

內積 $(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{BQ}\times\overrightarrow{BD})=-175\neq0$

即平面 BDQ 與平面 OAC 的法向量沒有垂直

$\therefore$兩平面沒有互相垂直，故選(2) (3)

8. (1) ○： $\dfrac{2}{3}=\dfrac{2\times7\times4}{3\times7\times4}=\dfrac{56}{84}$

$\frac{5}{7}=\frac{5\times3\times4}{7\times3\times4}=\frac{60}{84}$

$\frac{3}{4}=\frac{3\times3\times7}{4\times3\times7}=\frac{63}{84}$

$\therefore \frac{2}{3}<\frac{5}{7}<\frac{3}{4}$

(2) ○：算幾不等式 $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}\Rightarrow(\frac{1}{2})^2>ab\Rightarrow 2ab<\frac{1}{2}$

柯西不等式

$(a^2+b^2)(1^2+1^2)>(a+b)^2\Rightarrow a^2+b^2>\frac{1}{2}$

$\therefore 2ab<\frac{1}{2}<a^2+b^2$

(3) ○： $f(x)=(0.2)^x$ 爲減函數，由 $a>b\Rightarrow(0.2)^a<(0.2)^b$

(4) ╳： $f(x)=\log_2 x$ 爲增函數

由 $a>b>0\Rightarrow 0<\frac{1}{a}<\frac{1}{b}\Rightarrow\log_2\frac{1}{a}<\log_2\frac{1}{b}$

(5) ╳： $\frac{1}{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2}$

$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2}}\Rightarrow\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}<\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2}$

故選(1) (2) (3)

9. (1) ○： $f(x)=x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$

當 $x=\frac{-1}{2}$ 時， $f(x)$ 有最小値 $\frac{3}{4}$

(2) ╳： $f(x)=x^4+x^2+1=(x^2+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$

$\because x^2+\frac{1}{2}\neq 0$ $\therefore f(x)$ 有最小値不是 $\frac{3}{4}$

(3) ╳： $f(x)=(2^x)^2+2^x+1=(2^x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$

$\because 2^x+\frac{1}{2}\neq 0$ $\therefore f(x)$ 有最小値不是 $\frac{3}{4}$

(4) ○： $f(x)=(\log_2 x)^2+(\log_2 x)+1=(\log_2 x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$

當 $\log_2 x+\frac{1}{2}=0\Rightarrow x=2^{-\frac{1}{2}}$ 時， $f(x)$ 有最小値 $\frac{3}{4}$

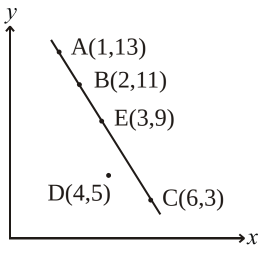
(5) ○： $f(x)=\sin^2 x+\sin x+1=(\sin x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$

當 $\sin x+\frac{1}{2}=0\Rightarrow\sin x=\frac{-1}{2}$ 時， $f(x)$ 有最小値 $\frac{3}{4}$

故選(1) (4) (5)

10. $m_{AB}=\frac{13-11}{1-2}=-2$

$m_{AC}=\frac{13-3}{1-6}=-2$



$\because m_{AB}=m_{AC}$

$\therefore A,B,C$ 三點共線，由 A,B,C 三筆資料可知 x 與 y 爲完全負相關，且 $r=-1, b=-2$ ，再由 $A(1,13)$ 代入 $L: y=a-2x$

$\Rightarrow 13=a-2\times1\Rightarrow a=15$

(1) ╳：應爲 $r=-1$

(2) ╳：應爲 $b=-2$

(3) ○： $a=15$

(4) ╳：如圖： A,B,C,D 4 筆資料中 x 與 y 的相關係數必大於 -1

(5) ╳：如圖：點 $E(3,9)$ 亦是 L 上一點， A,B,C,E 4 筆資料中， y 對於 x 的迴歸直線斜率等於 b

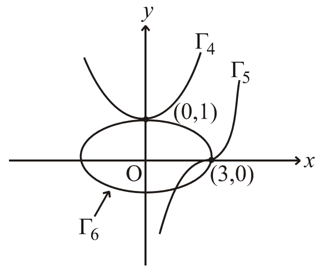
故選(3)

11. 依題意 $\Gamma_4: y=x^2+1$

$\Gamma_5: y=(x-3)^3$

$\Gamma_6: (\frac{x}{3})^2+y^2=1$

作圖如右：



(1) ╳：應爲 $\Gamma_4: y=x^2+1$

(2) ╳：應爲 $\Gamma_6: (\frac{x}{3})^2+y^2=1$

(3) ╳：解 $\begin{cases} y=x^2+1 \\ y=(x-3)^3 \end{cases}\Rightarrow x^2+1=(x-3)^3$

三次方程式至少有一實根，$\therefore \Gamma_4$ 和 Γ_5 至少有一交點

(4) ○：交點爲 $(0,1)$

(5) ○：如圖，恰有兩個交點

故選(4) (5)

第貳部分：選填題

A. $x=2+3\sqrt{5}\Rightarrow(x-2)^2=(3\sqrt{5})^2\Rightarrow x^2-4x-41=0$

$\frac{x^3-3x^2-39x-53}{x^2-4x-40}=\frac{(x+1)(x^2-4x-41)+6x-12}{(x^2-4x-41)+1}$

$=\frac{0+6x-12}{0+1}=6x-12=6(2+3\sqrt{5})-12=18\sqrt{5}$

B. 對數有意義 $\Rightarrow\begin{cases} a-3>0 \\ 4-b>0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a>3 \\ b<4 \end{cases}$

依題意

$\log(a-3)+\log(4-b)=2\log\sqrt{5}\Rightarrow(a-3)(4-b)=5$

$a-3$	1	5
$4-b$	5	1
a	4	8
b	-1	3

$\because a,b$ 均爲正整數

$\therefore$序對 $(a,b)=(8,3)$

C. ①2 紅球+另一色球 $\rightarrow C_2^2\times C_1^7=7$

②2 白球+另一色球 $\rightarrow C_2^3\times C_1^6=18$

③2 黃球+另一色球 $\rightarrow C_2^4\times C_1^5=30$

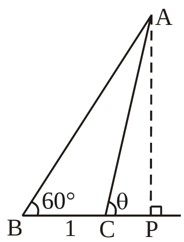
綜合①②③共有 55 種情形

D. ΔABC 面積 $=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin60^\circ=\sqrt{3}$

$\Rightarrow\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\Rightarrow\overline{AB}=4$

如圖： $\overline{AP}=4\times\sin60^\circ=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

$\overline{BP}=4\times\cos60^\circ=4\times\frac{1}{2}=2$



令 $\angle ACP=\theta$

則 $\tan\angle ACB=\tan(180^\circ-\theta)$

$=-\tan\theta=-\frac{\overline{AP}}{\overline{CP}}=-\frac{2\sqrt{3}}{1}=-2\sqrt{3}$

E.①斜率為正的有

$\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{3}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{3}{3}$

扣除相同者，剩下有 $1,2,3,\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3}$ 等 7 種

②同理，斜率為負的有

$-1,-2,-3,\frac{-1}{2},\frac{-3}{2},\frac{-1}{3},\frac{-2}{3}$ 等 7 種

③亦可斜率為 $0\to 1$ 種

綜合①②③有 15 種不同的值

F. 如圖，圓 $C: x^2+(y-1)^2=4$

與坐標軸之交點分別為

$A(\sqrt{3},0),B(-\sqrt{3},0),C(0,3),D(0,-1)$

又 $L: 2x+y=k$ 斜率為 -2

① $A(\sqrt{3},0)$ 代入

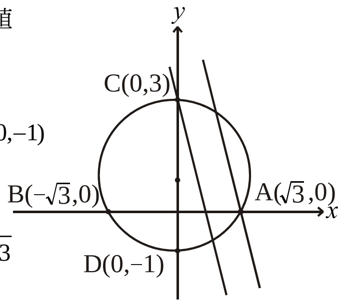
$L: 2\times\sqrt{3}+0=k \Rightarrow k=2\sqrt{3}$

② $C(0,3)$ 代入

$L: 2\times 0+3=k \Rightarrow k=3$

由①② 可知 $3<k<2\sqrt{3}$

所求 $\alpha^2+\beta^2=21$



G. $A=A^{-1}\Rightarrow A^2=I\Rightarrow\begin{bmatrix}2 & x\\ 3 & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & x\\ 3 & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}4+3x & 2x+xy\\ 6+3y & 3x+y^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{cases}4+3x=1\\ 6+3y=0\\ 2x+xy=0\\ 3x+y^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=-2\end{cases}$

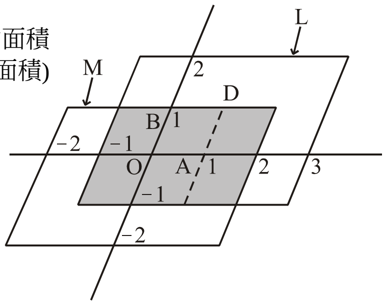
$\therefore$數對 $(x,y)=(-1,-2)$

H. 如圖：重疊區域 $L\cap M$ 的面積

$=6\times$(平行四邊形 $OADB$ 面積)

$=6\times(12\times 2)$

$=144$



I. $\Gamma: y^2+4x-6y+25=0$

$\Rightarrow(y-3)^2=-4x-16$

$\Rightarrow(y-3)^2=4(-1)(x+4)$

Γ 頂點 $(-4,3)$ 且 $c=-1$ 開口向左

$\therefore$焦點 $F(-5,3)$

所求 $\overline{OF}=\sqrt{(-5)^2+3^2}=\sqrt{34}$