臺中區國立高級中學103學年度大學入學第二次學科能力測驗聯合模擬考

數學考科解析

考試日期：103年12月18~19日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	3	4	1	5	4	1245	134	4	25	2345	245	2	1	6
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	
6	6	2	0	2	9	9	1	0	8	–	5	4	3	

第壹部分：選擇題

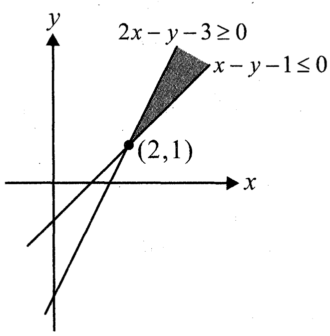
一、單選題

1. 設跑跑有 x 天、跑游有 y 天、游跑有 z 天、游游有 0 天(牴觸條件 a)

依題意可列式 $\begin{cases} x+y=15 \\ x+z=17 \\ y+z=18 \end{cases}$，解得 $x=7$。故本題選(2)

2. $\dfrac{0.5\times 0.2}{0.5\times 0.2+0.3\times 0.3+0.2\times 0.4}=\dfrac{10}{27}\doteq 0.37$，故本題選(3)

3. 可行解區域頂點 $(2,1)$



得最小值 $z=2a+b=2\sqrt{5}$

$(a^2+b^2)(2^2+1^2)\ge(2a+b)^2$

$\therefore a^2+b^2\ge 4$

等號可成立於

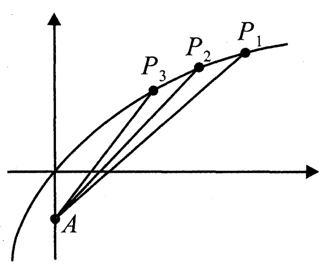
$(a,b)=(\dfrac{4\sqrt{5}}{5},\dfrac{2\sqrt{5}}{5})$

故本題選(4)

4. 【法一】

$m(x)=\dfrac{\log_2(2x+2)}{x}$

$=\dfrac{\log_2(x+1)-(-1)}{x-0}$



由 $y=\log_2(x+1)(x>0)$ 圖形上的點 $P(x,y)$ 與 $A(0,-1)$ 所決定的斜率得知

$a<b<c$

【法二】

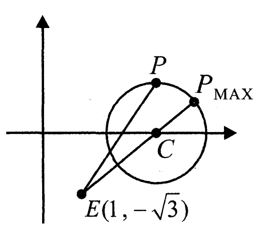
令 $x_1=7$，$x_2=3$，$x_3=1$，代入得 $a=\dfrac{4}{7}$，$b=\dfrac{3}{3}$，$c=\dfrac{2}{1}$

故 $a<b<c$

故本題選(1)

5. 設 $P(x,y)$，$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}|$

$=\sqrt{(x-1)^2+(y+\sqrt{3})^2}=\overline{PE}$，



其中 E 爲定點 $(1,-\sqrt{3})$

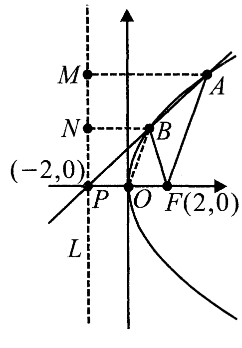
P 爲圓 $(x-3)^2+y^2=1$ 上動點

故 $\overline{PE}\le\overline{CE}+r=\sqrt{7}+1$

故本題選(5)

6. 【法一】設拋物線 Γ：$y^2=8x$ 的準線爲 L：$x=-2$，

直線 $y=m(x+2)$ 恆過定點 $P(-2,0)$



如圖，過 A、B 分別作 $\overline{AM}\perp L$ 於 M，$\overline{BN}\perp L$ 於 N

由 $\overline{FA}=2\overline{FB}$，則 $\overline{AM}=2\overline{BN}$，

點 B 爲 $\overline{AP}$ 的中點，O 爲 $\overline{PF}$ 的中點

連接 $\overline{OB}$，則 $\overline{OB}=\dfrac{1}{2}\overline{AF}$，

$\therefore\overline{OB}=\overline{BF}$，點 B 的 x 坐標爲 1，

故點 B 的座標爲 $(1,2\sqrt{2})$。

$\therefore m=\dfrac{y_B-y_P}{x_B-x_P}=\dfrac{2\sqrt{2}-0}{1-(-2)}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

【法二】

如【法一】圖，設 $A(2t^2,4t)$，$B(2k^2,4k)$，$t>k>0$

①由 $\overline{FA}=2\overline{FB}$，得 $d(A,L)=2\cdot d(B,L)$

$2t^2+2=2(2k^2+2)$，$2k^2-t^2+1=0$

②$\because$ P-B-A 三點共線，$\therefore m_{AP}=m_{BP}$，即 $\dfrac{4t-0}{2t^2+2}=\dfrac{4k-0}{2k^2+2}$

$tk^2+t=kt^2+k$，$tk^2-kt^2+t-k=0$，$tk(k-t)-(k-t)=0$

$(tk-1)(k-t)=0$，$\because t>k$，$\therefore k-t\neq 0$，$\therefore tk=1$

③由 $\begin{cases} 2k^2-t^2+1=0 \\ tk=1 \end{cases}$ 解得 $t=\sqrt{2}$，$k=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore A(4,4\sqrt{2})$，$B(1,2\sqrt{2})$，$m=\dfrac{4\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{4-1}=\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$

故本題選(4)

二、多選題

7. 好球、壞球以符號 S、B 表示之

(1) 好好＋壞好 $=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2}$

(2) 好球壞球機率相等，三振所需球數比保送少，故機率高

(3) 前三球恰二好一壞，且第四球好球

$BSSS+SBSS+SSBS$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\neq C^3_2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}$

(4) $P(SSS\mid S)=\dfrac{P(SSS)}{P(S)}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{4}{9}$

(5) $P(BBBB\mid B)=\dfrac{P(BBBB)}{P(B)}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{8}{27}$

故本題選(1)(2)(4)(5)

8. (1) $\overline{X}=\overline{X'}\times 5+60=\dfrac{40}{10}\times 5+60=80$，

$\overline{Y}=\overline{Y'}\times 5+60=\dfrac{10}{10}\times 5+60=65$

(2) $\sigma_X=\sqrt{\dfrac{\sum X'^2}{10}-(\overline{X'})^2}\times 5=\sqrt{\dfrac{160.8}{10}-(\dfrac{40}{10})^2}\times 5=\sqrt{2}$

$\sigma_Y=\sqrt{\dfrac{\sum Y'^2}{10}-(\overline{Y'})^2}\times 5=\sqrt{\dfrac{13.20}{10}-(\dfrac{10}{10})^2}\times 5=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

(3) $r=\dfrac{\sum X'Y'-n\overline{X'}\overline{Y'}}{\sqrt{\sum X'^2-n\overline{X'}^2}\sqrt{\sum Y'^2-n\overline{Y'}^2}}$

$=\dfrac{41.36-10\cdot 4\cdot 1}{\sqrt{160.8-10\cdot 4^2}\sqrt{13.2-10\cdot 1^2}}=\dfrac{1.36}{\sqrt{0.8}\sqrt{3.2}}=\dfrac{17}{20}=0.85$

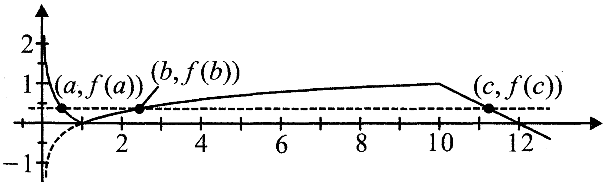
(4) 斜率 $m=r\cdot\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}=\dfrac{17}{20}\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{17}{10}$

故最適合直線爲 $(y-65)=\dfrac{17}{10}(x-80)$

(5) 將 $x=70$ 代入 $(y-65)=\dfrac{17}{10}(x-80)$ 得 $y=48$

故本題選(1)(3)(4)

9. $0<a<1<b<10<c<12$



(1) $\log a<0$

(2) $\log b<1$

(3) $\log c<\log 12=2\log 2+\log 3 \fallingdotseq 1.0791<\sqrt{2}$

(4) $|\log a|=-\log a=\log\dfrac{1}{a}=\log b$，$a=\dfrac{1}{b}$，$\therefore ab=1$

(5) c 可能為 11

故本題選(4)

10. (1) $f(-2i-1)=0$，$f(i+2)\neq 0$

(2) $f(2i+1)\neq 0$

(3) $f(-1)=-12$，$f(1)=8$

$f(x)$ 的偶數次項係數和為 $\dfrac{f(1)+f(-1)}{2}=-2$

(4)(5)設 $f(x)=(px-q)(x+1+2i)(x+1-2i)$

$=(px-q)(x^2+2x+5)$，$\because f(-1)=-12$，$f(1)=8$

$\therefore p=2$，$q=1$，$\therefore f(x)=(2x-1)(x^2+2x+5)$

$\therefore$有一實根為 $\dfrac{1}{2}$，非整數，$\therefore a=f(2)=39$，$b=f(3)=100$

$\therefore 2a<b$

故本題選(2)(5)

11. $V_{MAX}=V_{OA_2B_2C_2}=\dfrac{1}{6}\cdot 2\cdot 2\cdot 2=\dfrac{4}{3}$

V	$\frac{1}{6}\cdot 0\cdot 0\cdot 0=0$	$\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 1\cdot 2=\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 2=\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}\cdot 2\cdot 2\cdot 2=\frac{4}{3}$
$P(V)$	$\frac{C_2^3\cdot C_3^4}{C_3^6}=\frac{3}{5}$	$\frac{1}{C_3^6}=\frac{1}{20}$	$\frac{3}{C_3^6}=\frac{3}{20}$	$\frac{3}{C_3^6}=\frac{3}{20}$	$\frac{1}{C_3^6}=\frac{1}{20}$

故本題選(2)(3)(4)(5)

12. (1)(2) $a_1=100$，由 $S_3=\dfrac{3(a_1+a_3)}{2}=255=3a_2$

得 $a_3=70, a_2=85, d=-15$

(3) $S_5=5\cdot a_3=5\cdot 70=350$

(4) $\begin{cases}\dfrac{x_3^2}{100}+\dfrac{y_3^2}{25}=1\\ x_3^2+y_3^2=70\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_3^2=60\\ y_3^2=10\end{cases}$，$\left|\dfrac{x_3}{y_3}\right|=\sqrt{6}$

(5) $\Delta P_3FF'=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{FF'}\cdot|y_3|=\dfrac{1}{2}10\sqrt{3}\cdot\sqrt{10}=5\sqrt{30}$

故本題選(2)(4)(5)

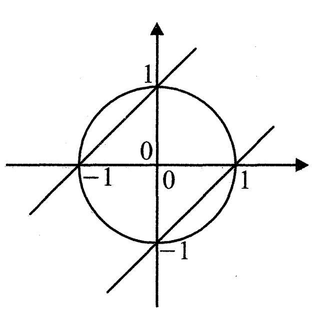
第貳部分：選填題

A. $d(0,L_1)=d(0,L_2)$

$\therefore \dfrac{|a|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|b|}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore |a|=|b|=1$

$\therefore a^2+b^2=2$



B. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\tan A$，$|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos A=\tan A$，

$|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|=\dfrac{2}{3}$

$\Delta ABC=\dfrac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$

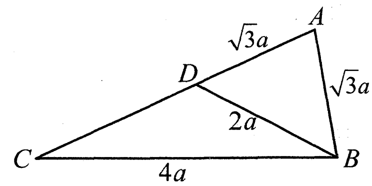
C. 設 $\overline{BD}=2a$

$\overline{BC}=4a$

$\overline{AB}=\overline{AD}=\sqrt{3}a$

$\therefore \cos A$

$=\dfrac{3a^2+3a^2-4a^2}{2\cdot\sqrt{3}a\cdot\sqrt{3}a}=\dfrac{1}{3}$



$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，由正弦定理得 $\dfrac{\sin C}{\overline{AB}}=\dfrac{\sin A}{\overline{BC}}$

$\therefore \dfrac{\sin C}{\sqrt{3}a}=\dfrac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{4a}$，$\therefore \sin C=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

D. 設 $\overline{CD}=x$，$\tan\alpha=\dfrac{x}{35}$，$\tan\beta=\dfrac{x}{80}$，

$\dfrac{\pi}{2}>\alpha\geq 2\beta>0$，$\tan\alpha\geq\tan 2\beta=\dfrac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}$

$\dfrac{x}{35}\geq\dfrac{2\cdot\frac{x}{80}}{1-\frac{x^2}{6400}}$，$\dfrac{x}{35}\geq\dfrac{160x}{6400-x^2}$，$6400-x^2\geq 35\cdot 160$

$x^2\leq 800$，得 $x\leq 20\sqrt{2}$

E. 設數列前四項為 $a-d$，a，$a+d$，$a+2d$，

由 S_1, S_2, S_4 成等比，$S_2^2=S_1S_4$，$(2a-d)^2=(a-d)(4a+2d)$

得 $2ad=3d^2$，$d=\dfrac{2a}{3}(a\neq 0, d\neq 0)$，由 $S_3=a_2{}^2$，$3a=a^2$

得 $a=3$ 或 $a=0$(不合)，$d=\dfrac{2a}{3}=2$

得此數列為 $1, 3, 5, 7, 9, \cdots$，$a_n=2n-1$，$a_{50}=99$

F. 若山羊雙魚均無，三種功能各挑一，$C_1^2\cdot C_1^2\cdot C_1^6=24$，

若山羊雙魚僅一，至少再一張增攻，$C_1^2\cdot(C_2^6+C_1^6C_1^4)=78$，

若山羊雙魚均有，第三張必為增攻，$C_2^2\cdot C_1^6=6$，

以上共 108 種

G. $\vec{n}=(1,1,1)$，$\vec{l}=(a,b,1)$，$\overrightarrow{PQ}=(1,2,-3)$，

【法一】$\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{l}=a+b+1=0\\ \overrightarrow{PQ}\cdot\vec{l}=a+2b-3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-5\\ b=4\end{cases}$

【法二】$\vec{n}\times\overrightarrow{PQ}=(-5,4,1)//(a,b,1)\Rightarrow\begin{cases}a=-5\\ b=4\end{cases}$

H. 【法一】$\overrightarrow{T_1T_5}\cdot\overrightarrow{T_1T_9}=\sqrt{3}r\cdot\sqrt{3}r\cdot\cos 60°=\dfrac{3}{2}r^2=3$

【法二】$\overrightarrow{T_1T_5}\cdot\overrightarrow{T_1T_9}=(\overrightarrow{OT_5}-\overrightarrow{OT_1})\cdot(\overrightarrow{OT_9}-\overrightarrow{OT_1})$

$=\overrightarrow{OT_5}\cdot\overrightarrow{OT_9}-\overrightarrow{OT_5}\cdot\overrightarrow{OT_1}-\overrightarrow{OT_1}\cdot\overrightarrow{OT_9}+|\overrightarrow{OT_1}|^2$

$=-r\cdot r\cos 120°+r^2=\dfrac{3}{2}r^2=3$