

臺中區國立高級中學 103 學年度
大學入學第二次學科能力測驗聯合模擬考

數學考科

考試日期：103 年 12 月 18~19 日

— 作答注意事項 —

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 6 題，多選題 6 題，選填題第 A 至 H 題共 8 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{18}{19}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生

必須分別在答案卡的第 18 列的 $\frac{3}{\square}$ 與第 19 列的 $\frac{8}{\square}$ 畫記，如：

18	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{20\text{①}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在

答案卡的第 20 列的 $\frac{-}{\square}$ 與第 21 列的 $\frac{7}{\square}$ 畫記，如：

20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

※ 試題後附有參考公式及可能用到的數值

第壹部分：選擇題(占 60 分)

一、單選題(占 30 分)

說明：第 1 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 小明進行「運動健身大作戰」：每天上午、下午各運動一次，每次跑步或游泳擇一。若已知此作戰滿足以下四個條件：(a) 若上午游泳則當天下午跑步、(b) 共有 15 個上午跑步、(c) 共有 17 個下午跑步、(d) 共游泳 18 次。則小明上下午均跑步的天數有幾天？

- (1) 6
- (2) 7
- (3) 8
- (4) 9
- (5) 10

2. 浴財高中的梅涼辛廠商每天使用一種黑心油料理團膳食物。已知有 50%的機率使用飼料油、有 30%的機率使用餿水油、有 20%的機率使用銅葉綠素油。且飼料油團膳導致「腦殘症」有 20%的機率、餿水油團膳導致「腦殘症」有 30%的機率、銅葉綠素油團膳導致「腦殘症」有 40%的機率。若已知小明因食用團膳導致腦殘，則小明食用的是飼料油團膳的機率最接近下列哪個選項？

- (1) 0.29
- (2) 0.33
- (3) 0.37
- (4) 0.53
- (5) 0.97

3. 已知實數 x 、 y 滿足條件 $EQ: \begin{cases} x-y-1 \leq 0 \\ 2x-y-3 \geq 0 \end{cases}$ ，若目標函數 $z = ax + by$ ($a > 0, b > 0$) 在條件 EQ

下取到最小值 $2\sqrt{5}$ 時，則 $a^2 + b^2$ 的最小值為

- (1) 1
- (2) 2
- (3) $\sqrt{5}$
- (4) 4
- (5) 5

4. 已知 $x_1 > x_2 > x_3 > 0$ ，則 $a = \frac{\log_2(2x_1+2)}{x_1}$ ， $b = \frac{\log_2(2x_2+2)}{x_2}$ ， $c = \frac{\log_2(2x_3+2)}{x_3}$ 的大小關係為
- (1) $a < b < c$
 - (2) $c < b < a$
 - (3) $b < a < c$
 - (4) $c < a < b$
 - (5) $b < c < a$
5. 在平面直角坐標系中， O 為原點， $A(-1, 0)$ ， $B(0, \sqrt{3})$ ， $C(3, 0)$ ，若動點 P 滿足 $|\overrightarrow{CP}| = 1$ ，則 $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OP}|$ 的最大值為
- (1) 6
 - (2) $\sqrt{19} + 1$
 - (3) $\sqrt{19} - 1$
 - (4) $2\sqrt{7}$
 - (5) $\sqrt{7} + 1$
6. $m > 0$ ，已知直線 $y = m(x+2)$ 與拋物線 $\Gamma: y^2 = 8x$ 相交於 A 、 B 兩點， F 為 Γ 的焦點，若 $\overline{FA} = 2\overline{FB}$ ，則 m 值為
- (1) $\frac{1}{3}$
 - (2) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
 - (3) $\frac{2}{3}$
 - (4) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
 - (5) 1

二、多選題(占 30 分)

說明：第 7 題至第 12 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7. 旅美棒球投手陳偉殷，根據統計，面對每一位打者投出的第一球，好球與壞球機率相等。若前一球投出好球，則下一球是好球的機率是壞球的二倍。若前一球投出壞球，則下一球是壞球的機率是好球的二倍。若好球數累計滿三球則三振打者出局，若壞球數累計滿四球則保送打者上壘。若打者小王子在此次打擊完全不揮棒的情況下，則下列選項哪些正確？

- (1) 陳偉殷面對打者小王子第二球投好球的機率為 $\frac{1}{2}$
- (2) 小王子被三振的機率比被保送高
- (3) 陳偉殷在第四球投出第三個好球把小王子三振的機率為 $C_2^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$
- (4) 若陳偉殷第一球已投出好球，則恰用三球將小王子三振的機率為 $\frac{4}{9}$
- (5) 若陳偉殷第一球已投出壞球，則恰用四球將小王子保送的機率為 $\frac{8}{27}$

8. 若小明的 10 位同班同學的期中考數學與物理成績紀錄為 (數學, 物理) = (X, Y) 如附表，則下列選項哪些正確？

n	X	Y	$X' = \frac{(X-60)}{5}$	$Y' = \frac{(Y-60)}{5}$	X'^2	Y'^2	$X'Y'$
1	78	61	3.6	0.2	12.96	0.04	0.72
2	79	63	3.8	0.6	14.44	0.36	2.28
3	80	65	4.0	1.0	16.00	1.00	4.00
4	81	67	4.2	1.4	17.64	1.96	5.88
5	82	69	4.4	1.8	19.36	3.24	7.92
6	78	61	3.6	0.2	12.96	0.04	0.72
7	80	67	4.0	1.4	16.00	1.96	5.60
8	79	65	3.8	1.0	14.44	1.00	3.80
9	81	63	4.2	0.6	17.64	0.36	2.52
10	82	69	4.4	1.8	19.36	3.24	7.92
合計			40.0	10.0	160.80	13.20	41.36

- (1) 數學成績的算術平均 $\bar{X} = 80$
- (2) 物理成績的母體標準差 $\sigma_Y = 8$
- (3) 數學成績與物理成績的相關係數 $r = 0.85$
- (4) 物理 Y 對數學 X 的最適合直線為 $(y-65) = \frac{17}{10}(x-80)$
- (5) 若小明的數學成績為 70 分，根據同學成績的最適合直線推估小明的物理成績為 56.5 分

9. 已知 $f(x) = \begin{cases} |\log x|, & 0 < x \leq 10 \\ -\frac{1}{2}x + 6, & x > 10 \end{cases}$ ，若 $0 < a < b < c$ ，且 $f(a) = f(b) = f(c)$ ，則下列選項哪些正

確？

- (1) $\log a > 0$
- (2) $\log b > 1$
- (3) $\log c > \sqrt{2}$
- (4) $ab = 1$
- (5) c 不可能為正整數

10. 實係數三次多項式

$$f(x) = \frac{a(x+1)(x-1)(x-3)}{(2+1)(2-1)(2-3)} + \frac{b(x-2)(x-1)(x+1)}{(3-2)(3-1)(3+1)} - \frac{12(x-2)(x-1)(x-3)}{(-1-2)(-1-1)(-1-3)} + \frac{8(x-2)(x+1)(x-3)}{(1-2)(1+1)(1-3)},$$

若 $2i-1$ 為 $f(x)=0$ 的一個解，則下列選項哪些正確？

- (1) $f(i+2) = 0$
- (2) $f(2i+1) \neq 0$
- (3) $f(x)$ 的偶數次項係數和為 -6
- (4) $f(x)=0$ 有一個整數解
- (5) $2a < b$

11. 從 $A_1(1, 0, 0)$ ， $A_2(2, 0, 0)$ ， $B_1(0, 1, 0)$ ， $B_2(0, 2, 0)$ ， $C_1(0, 0, 1)$ ， $C_2(0, 0, 2)$ 這 6 個點中隨機選取 3 個點，將這 3 個點及原點 O 兩兩相連構成一個「立體」，記該「立體」的體積為 V 。體積為 V 的機率記為 $P(V)$ ，則下列選項哪些正確？

- (1) V 必定小於 1
- (2) $P(0) = \frac{3}{5}$
- (3) $P\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{20}$
- (4) $P\left(\frac{1}{3}\right) > \frac{1}{10}$
- (5) $P\left(\frac{1}{3}\right) = P\left(\frac{2}{3}\right)$

12. 設 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n)$, ($n \geq 3, n \in N$) 是橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$ 上的點，點 $P_1(10, 0)$ ，且 $a_1 = \overline{OP_1}^2, a_2 = \overline{OP_2}^2, \dots, a_n = \overline{OP_n}^2$ 構成一個公差為 $d(d \neq 0)$ 的等差數列，其中 O 為坐標原點， F, F' 為橢圓 Γ 的兩焦點。記 $S_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ ，若 $S_3 = 255$ ，則下列選項哪些正確？
- (1) $d = 15$
 - (2) $a_2 = 85$
 - (3) $S_5 = 410$
 - (4) $\left| \frac{x_3}{y_3} \right| = \sqrt{6}$
 - (5) $\Delta P_3 FF'$ 的面積為 $5\sqrt{30}$

第貳部分：選填題(占 40 分)

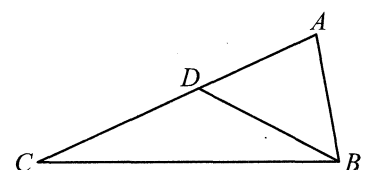
說明：1. 第 A 至 H 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號 (13-29)。

2. 每題完全答對得 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 若直線 $L_1: y = x + a$ 和 $L_2: y = x + b$ 將單位圓 $x^2 + y^2 = 1$ 的圓周長分成長度相等的四段弧長，則 $a^2 + b^2 = \underline{\textcircled{13}}$ 。

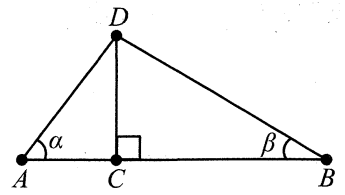
- B. 在 ΔABC 中，若已知 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \tan A$ ，且 $\angle A = 30^\circ$ ，則 ΔABC 的面積為 $\frac{\textcircled{14}}{\textcircled{15}}$ 。

- C. 如圖(1)，在 ΔABC 中， D 是 \overline{AC} 上一點，且 $\overline{AB} = \overline{AD}$ ，
 $2\overline{AB} = \sqrt{3}\overline{BD}$ ， $\overline{BC} = 2\overline{BD}$ ，則 $\sin C = \frac{\sqrt{\textcircled{16}}}{\textcircled{17}}$ 。



圖(1)

- D. 如圖(2)，某公司要在 A 、 B 兩地連線上的定點 C 處建造看板 \overline{CD} ，其中 D 為頂端， $\overline{AC}=35$ ， $\overline{CB}=80$ ，設 A 、 B 在同一水平面上，從 A 和 B 看 D 的仰角分別為 α 和 β 。 \overline{CD} 是鉛垂線段，若要求 $\alpha \geq 2\beta$ ，問 \overline{CD} 的長至多為 ⑱⑲ $\sqrt{\text{⑳}}$ 。(化為最簡根式)



圖(2)

- E. 公差為正數的等差數列 $\langle a_n \rangle$ 的前 n 項和為 S_n ，已知 $S_3 = a_2^2$ ，且 S_1, S_2, S_4 成等比數列，則 a_{50} 為 ⑳㉑。

- F. 什麼之塔遊戲中，黃道十二宮卡片有以下三種附屬功能：

- (1) 減傷卡有 {獅子、山羊、金牛、雙魚}；
- (2) 轉屬卡有 {雙子、天蠍、山羊、雙魚}；
- (3) 增攻卡有 {巨蟹、處子、天秤、人馬、白羊、水瓶}；

其中有二張卡 {山羊、雙魚} 兼具減傷與轉屬功能。

小明恰收集到一套 12 張完整的卡片，現欲從中挑出三張不同的卡片(無需考慮順序)，且需兼具三種附屬功能，則挑選方法有 ㉓㉔㉕ 種。

- G. 在平面 $E: x+y+z=3$ 上有一圓 C ，圓心為 $P(0, -2, 5)$ ，而另一點 $Q(1, 0, 2)$ 在圓 C 上，且直線 $L: \frac{x-1}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z-2}{1}$ 在平面 E 上和圓 C 相切於 Q 點，則數對 $(a, b) = (\text{㉖㉗}, \text{㉘})$ 。

- H. 時鐘的表面在一平面上，整點 $1, 2, \dots, 12$ 這 12 個數字等間隔地分布在半徑為 $\sqrt{2}$ 的圓周上，從整點 i 到整點 j 向量記為 $\overrightarrow{T_i T_j}$ ，則 $\overrightarrow{T_1 T_5} \cdot \overrightarrow{T_1 T_9} = \text{㉙}$ 。

可能用到的參考公式及數值

- 一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ， $a \neq 0$ 的公式解： $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- 平面上兩點 $P_1(x_1, y_1)$ ， $P_2(x_2, y_2)$ 間的距離為 $\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- 點 $P(x_0, y_0)$ 至直線 $L: ax + by + c = 0$ 之距離為 $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
- 通過 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 的直線斜率 $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ， $x_2 \neq x_1$
- $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$
 $\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
- 二倍角公式： $\sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta$ ， $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 = 1 - 2\sin^2 \theta$ ， $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$
- 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，算術平均數 $\mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ，
標準差 $\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \mu_X^2}$
- 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，相關係數 $r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$
 Y 對 X 最適合直線方程式為 $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$
- 柯西不等式：已知 $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ ，則 $(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2)^2$
- 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$
- 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ， $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ ， $\log_{10} 7 \approx 0.8451$