

# 臺北區 103 學年度第一學期 第二次學科能力測驗模擬考試

## 數學考科

### — 作答注意事項 —

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 6 題，多選題 7 題，選填題第 A 至 G 題共 7 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是  $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是  $\frac{3}{8}$ ，則考生

必須分別在答案卡的第 18 列的  $\overset{3}{\square}$  與第 19 列的  $\overset{8}{\square}$  畫記，如：

18	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±

例：若第 C 題的答案格式是  $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是  $\frac{-7}{50}$  時，則考生必須分別在

答案卡的第 20 列的  $\overset{-}{\square}$  與第 21 列的  $\overset{7}{\square}$  畫記，如：

20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
21	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±

※ 試題後附有參考公式及可能用到的數值

## 第壹部分：選擇題（占 65 分）

### 一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 若  $1 \leq n \leq 1000$ ，求使  $\log_8 n$  為一有理數之所有自然數  $n$  的總和為下列何者？
  - (1) 585
  - (2) 1023
  - (3) 2047
  - (4) 250500
  - (5) 500500
  
2. 甲、乙、丙三人相約測量星星高中操場上鉛直旗竿的高度，三人在操場上與旗竿底距離相同的相異三點  $A$ 、 $B$ 、 $C$  測得  $\angle BCA = 45^\circ$ ， $\angle ABC = 105^\circ$ ， $\overline{BC} = 4$  公尺，且由  $A$  點測得旗竿頂端的仰角為  $60^\circ$ ，則旗竿的高度最接近下列何者？
  - (1) 5 公尺
  - (2) 5.5 公尺
  - (3) 6 公尺
  - (4) 6.5 公尺
  - (5) 7 公尺
  
3. 某高中高三之三個班，分別為普通班 45 人，數理實驗班 30 人，語文實驗班 25 人，在第二次升學模擬考的數學測驗中，此三班依序分別有 15 人、2 人、5 人，成績低於三個班全體考生的平均。若不分班級從這三個班所有學生中，任取 1 人（選人機會均等），已知此人的數學平均低於三個班全體平均，求此人來自數理實驗班的機率為多少？
  - (1)  $\frac{1}{7}$
  - (2)  $\frac{1}{9}$
  - (3)  $\frac{1}{11}$
  - (4)  $\frac{2}{9}$
  - (5)  $\frac{2}{11}$

4. 已知  $a$ 、 $b$  為實數，則  $\begin{cases} x+ay=a^2+1 \\ x+by=b^2+1 \end{cases}$  之解 不可能 是下列哪一種情形？

- (1) 無解
- (2) 恰有一解
- (3) 無限多解
- (4) 有非  $(0,0)$  之解
- (5) 有  $x>0$  且  $y>0$  之解

5. 一筆統計資料有 11 個數據如下(不完全依大小排列)：2,4,4,5,5,6,7,8,11, $x$  和  $y$ ，已知這些數據的算術平均數和中位數都是 6。請問此筆數據資料的標準差比較接近哪一個整數？

- (1) 5
- (2) 4
- (3) 3
- (4) 2
- (5) 1

6. 已知在  $a \leq x \leq b$  之條件下，會有兩個  $x$  值使得二次函數  $f(x)=2x^2+(k-3)x+6k$  產生最大值，且  $a+b=6$ ，試問方程式  $f(x^2)=0$  之實根個數有幾個？

- (1) 0
- (2) 1
- (3) 2
- (4) 3
- (5) 4

## 二、多選題 (占35分)

說明：第7題至第13題，每題有5個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得5分；答錯1個選項者，得3分；答錯2個選項者，得1分；答錯多於2個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7.  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$  為坐標平面上的三個非零向量，則下列敘述何者錯誤？

- (1) 若  $\vec{a} \perp \vec{b}$  且  $\vec{b} \perp \vec{c}$ ，則  $\vec{a} \perp \vec{c}$
- (2) 若  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ ，則  $\vec{b} = \vec{c}$
- (3) 若  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ，則  $\vec{a} = \vec{0}$  或  $\vec{b} = \vec{0}$
- (4) 若  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ ，則  $\vec{a} \perp \vec{b}$
- (5)  $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$

8. 關於實數  $x$ 、 $y$ 、 $z$ ，下列敘述何者正確？

- (1) 若  $x > |y|$ ，則  $x + y > 0$
- (2) 若  $xy > 0$ ，則  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}$
- (3) 若  $x + y$  為有理數，且  $xy$  亦為有理數，則  $x - y$  必為有理數
- (4) 若  $x$ 、 $y$ 、 $z$  均為正實數，且  $x + 2\sqrt{y} = y + 2\sqrt{z}$ ，則  $x = y = z$
- (5) 若  $f(x) = |x + 1| + |x + 5|$ ，則找不到實數值  $x$ ，滿足不等式  $f(x) \leq 3$

9. 已知  $\sin \theta = -\frac{3}{4}$  且  $\cos \theta > 0$ ，請問下列哪些選項正確？

- (1)  $\tan \theta < 0$
- (2)  $\tan(90^\circ + \theta) = \frac{\sqrt{7}}{3}$
- (3)  $\sin \theta + \cos \theta > 0$
- (4)  $\cos 2\theta = \frac{1}{8}$
- (5) 標準位置  $\theta$  和  $2\theta$  角的終邊位於不同的象限

10. 設有一組資料  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n)$ ，其中變數  $X$  的算術平均數  $\mu_x = 60$ ，標準差  $\sigma_x = 4$ ，且其  $XY$  相關係數  $r_{xy} = \frac{4}{5}$ 。若  $Y$  對  $X$  的最佳迴歸直線為  $y = -2 + \frac{6}{5}x$ 。現以

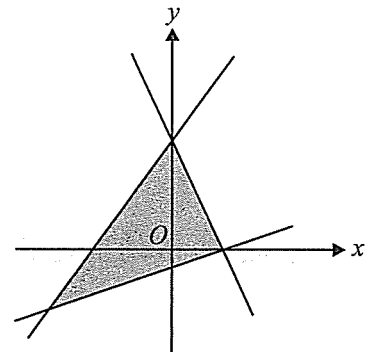
線性轉換  $z_i = \frac{x_i - 60}{4}$ ，則下列敘述哪些正確？

- (1)  $Y$  的算術平均數  $\mu_y = 70$   
 (2)  $Y$  的標準差  $\sigma_y = 6$   
 (3)  $Z$  的算術平均數  $\mu_z = 0$   
 (4)  $Z$  的標準差  $\sigma_z = 1$   
 (5)  $Y$  和  $Z$  的相關係數  $r_{yz} = \frac{4}{5}$
11. 設  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 10$ ， $g(x) = x^2 + x + 1$ ，則下列哪個選項是正確的？
- (1) 多項式  $f(x)g(x)$  除以  $(x-2)$  的餘式是 28。  
 (2) 方程式  $f(x) = 0$  至少有一個實根在 2 和 3 之間。  
 (3) 方程式  $f(2^x) + 4 = 0$  有一個實根為 1。  
 (4) 對任意的實數  $x$ ， $g(x) > 0$  恆成立。  
 (5) 對任意的實數  $x$ ， $g(2^x) \geq 3$  恆成立。

12. 已知聯立不等式 
$$\begin{cases} ax + by + b \geq 0 \\ x - 2y + c \leq 0 \\ dx + ey + f \geq 0 \end{cases}$$
 之解的範圍如圖(1)，請判斷下

列選項何者正確？

- (1)  $b < 0$   
 (2)  $c < 0$   
 (3)  $de < 0$   
 (4)  $f < 0$   
 (5)  $a, b, c, d, e, f$  中恰有三個正數



圖(1)

13. 設  $f(x) = (x^2 - 2x)^{100}$ ，則下列敘述哪些是正確的？
- (1) 多項式  $f(x)$  展開後所有係數總和為 1
  - (2) 整數  $f(3)$  的個位數字為 1
  - (3) 多項式  $f(x)$  除以  $(x-1)^2$  餘式為 1
  - (4) 多項式  $f(x)$  除以  $(x-1)^4$  之餘式為  $1 - 100(x-1)^2$
  - (5) 多項式  $f(x)$  展開後  $x^{101}$  的係數為 -200

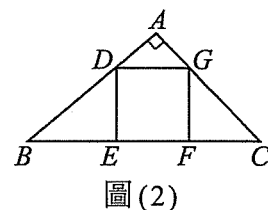
### 第貳部分：選填題（占 35 分）

說明：1. 第 A 至 G 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號(14-34)。  
2. 每題完全答對得 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。  
3. 如有分數請約分至最簡分數。

- A. 已知數列  $\langle a_n \rangle$  的首項  $a_1 = \frac{2}{3}$ ， $a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 1}$ ， $n = 1, 2, 3, \dots$ ，則  $a_7 = \frac{\textcircled{14} \textcircled{15} \textcircled{16}}{\textcircled{17} \textcircled{18} \textcircled{19}}$ 。
- B. 在  $\triangle ABC$  的兩邊  $\overline{AB}$  和  $\overline{AC}$  上各取一點  $D$  和  $E$ ，使得  $\overline{AD} : \overline{DB} = 2 : 1$ ； $\overline{AE} : \overline{EC} = 3 : 2$ 。若點  $G$  為  $\triangle ABC$  的重心，可得  $\overrightarrow{AG} = \alpha \overrightarrow{AD} + \beta \overrightarrow{AE}$ ，則  $(\alpha, \beta) = \left( \frac{\textcircled{20}}{\textcircled{21}}, \frac{\textcircled{22}}{\textcircled{23}} \right)$ 。
- C. 假設  $a, b$  均為實數且  $(a-4)^2 + (b-3)^2 = 4$ ，則  $(a-1)^2 + (b+1)^2$  的最大值為 ②④②⑤。

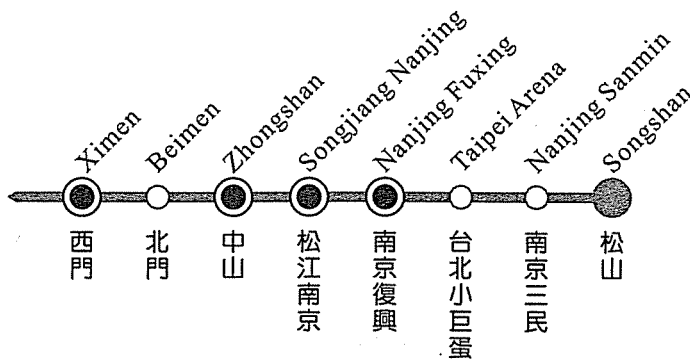
- D. 假設 SARS 病毒之直徑為  $x$  米，且  $\log x = -7.0458$ ；而伊波拉病毒之直徑為  $y$  米，已知  $10^{-9} \leq y \leq 10^{-8}$ ，且  $\log y$  之尾數為與  $\log x$  尾數的一半，則  $10^8(x-y)$  數值最接近的整數是 26。

- E. 如圖(2)， $\triangle ABC$  中， $\angle A = 90^\circ$ ，正方形  $DEFG$  的邊長為 4，且  $\overline{BC} = 14$ ，則  $\tan B + \tan C = \frac{\textcircled{27}}{\textcircled{28}}$ 。



- F. 將三支最新款相同的高階智慧型手機和二副相同的立體音效耳機任意分給四個人(物件要全部分完)，若每個人至少得 1 件，求不同的分法有 2930 種。

- G. 台北捷運系統松山線，預定將於今年 2014 年底通車，松山至西門全線共有 8 個站，如圖(3)：



圖(3)

其中同心雙圓者為可轉搭其它路線的轉運站，共有四個；非轉運站(含松山)有四個。小明和小華兩人想在此路線免費試乘期間先搭乘體驗，若要求兩人分別從 4 個轉運站的其中任意 2 個進入，且任意從不同的兩個捷運站(轉運站或非轉運站均可)出去，但同一個人不能從同一個捷運站進出，若兩人各進出捷運站一次，且滿足條件的各站被選機會均等，則兩人都是從中山和南京復興兩站進或出的機率為  $\frac{\textcircled{31}}{\textcircled{32}\textcircled{33}\textcircled{34}}$ 。

### 參考公式及可能用到的數值

1. 首項為  $a$ ，公差為  $d$  的等差數列前  $n$  項之和為  $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為  $a$ ，公比為  $r (r \neq 1)$  的等比數列前  $n$  項之和為  $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

3.  $\triangle ABC$  的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$  ( $R$  為  $\triangle ABC$  外接圓半徑)

$\triangle ABC$  的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

4. 一維數據  $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，算術平均數  $\mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

$$\text{標準差 } \sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} ((\sum_{i=1}^n x_i^2) - n\mu_X^2)}$$

5. 二維數據  $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，相關係數  $r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

迴歸直線(最適合直線)方程式  $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$

6. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732, \sqrt{5} \approx 2.236, \sqrt{6} \approx 2.449, \pi \approx 3.142$

7. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010, \log_{10} 3 \approx 0.4771, \log_{10} 5 \approx 0.6990, \log_{10} 7 \approx 0.8451$