全國公私立高級中學

103 學年度學科能力測驗第三次聯合模擬考試

考試日期：103 年 11 月 4~5 日

數學考科

—作答注意事項—

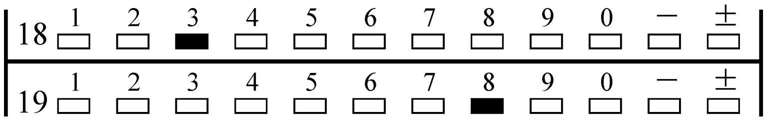
考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 6 題，多選題 6 題，選填題第 A 至 H 題共 8 題

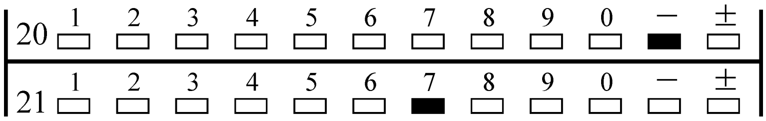
作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\dfrac{⑱}{⑲}$，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\overset{3}{\square}$ 與第 19 列的 $\overset{8}{\square}$ 畫記，如：



例：若第 C 題的答案格式是 $\dfrac{⑳㉑}{50}$，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\overset{-}{\square}$ 與第 21 列的 $\overset{7}{\square}$ 畫記，如：



※試題後附有參考公式及可能用到的數值

第壹部分：選擇題（占 60 分）

一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

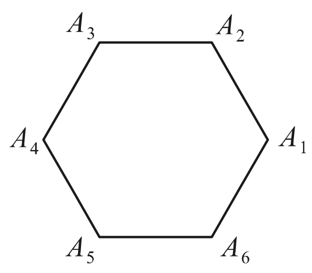
1. 求 $\left|\sqrt{5}-\pi\right|+\left|2-\pi\right|+\sqrt{8-\sqrt{60}}=$？

(1) $2\sqrt{5}-2$
(2) $2\sqrt{5}-2-\sqrt{3}$
(3) $2-\sqrt{3}$
(4) $2\pi-2-\sqrt{3}$
(5) $2(\pi-\sqrt{5})$

2. 在直角坐標系中，將 Γ：$y=2^x$ 的圖形以 $y=x$ 爲對稱軸畫出線對稱圖形，接著以 $x=0$ 爲對稱軸畫出線對稱圖形，最後再以 $y=x$ 爲對稱軸畫出線對稱圖形 Γ_1，則該線對稱圖形 Γ_1 爲下列哪一個函數的圖形？

(1) $y=2^x$
(2) $y=-2^x$
(3) $y=2^{-x}$
(4) $y=\log_2 x$
(5) $y=-\log_2 x$

3. 如右圖，平面上有一正六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$：由圖形中心 O 分別連到六個頂點構成六條有向線段 $\overrightarrow{OA_1}$、$\overrightarrow{OA_2}$、…、$\overrightarrow{OA_6}$。今依序投擲六枚公正硬幣，對於 $k=1,2,\cdots,6$，若第 k 次投擲硬幣爲正面，則令 $\overrightarrow{u_k}=\overrightarrow{OA_k}$，如爲反面，則令 $\overrightarrow{u_k}=-\overrightarrow{OA_k}$。試問：此六向量和 $\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}+\overrightarrow{u_3}+\overrightarrow{u_4}+\overrightarrow{u_5}+\overrightarrow{u_6}=\overrightarrow{0}$ 的機率爲何？



(1) $\frac{3}{32}$
(2) $\frac{1}{8}$
(3) $\frac{5}{32}$
(4) $\frac{11}{64}$
(5) $\frac{7}{32}$

4．設 x、y 滿足聯立不等式 $\begin{cases}(x+2y+2)(2x+y-2)\le 0\\ 0\le x\le 4\end{cases}$，則 $x-y$ 的最大值為何？

(1) -2

(2) 1

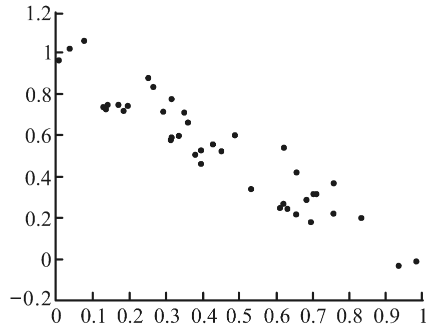
(3) 4

(4) 7

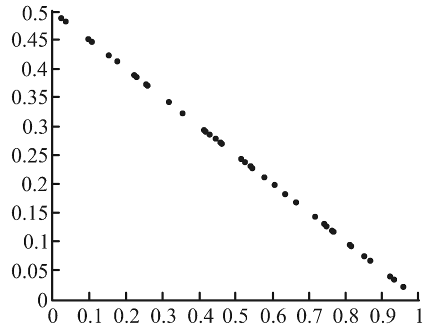
(5) 10

5．下列各圖為兩變數 X,Y 的散布圖，則何者的相關係數 r_{XY} 最小？

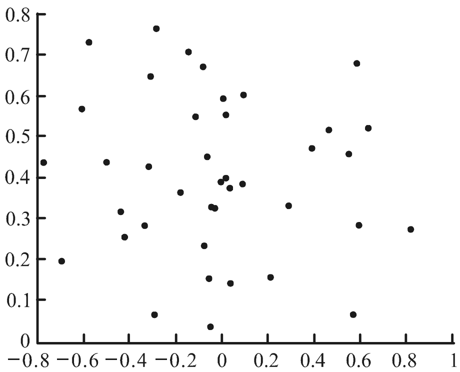
(1)



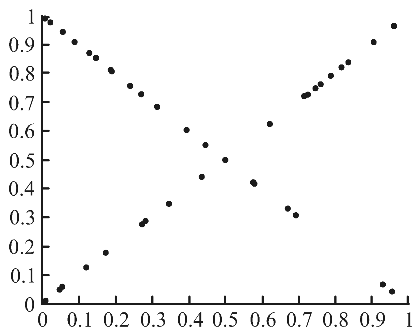
(2)



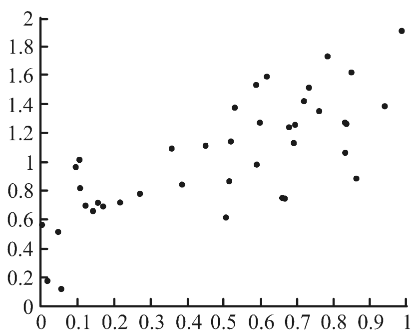
(3)



(4)



(5)



6. 在直角坐標系中，有一個二次函數 $y=a(x-2)^2+b$，其圖形和 x 軸所交之兩點距離爲 s，將該圖形往下移 4 單位之後，所得圖形和 x 軸所交之兩點距離變爲 $2s$，若接著再將圖形往下移 4 單位，所得圖形和 x 軸所交之兩點距離變爲 ks，則 $k=$？

(1) $\sqrt{7}$

(2) $2\sqrt{2}$

(3) 3

(4) $2+\sqrt{2}$

(5) 4

二、多選題（占 30 分）

說明：第 7 題至第 12 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7. 設函數 $f(x)$，對所有實數 x，皆有 $f(2x)=3f(|x|)$，且 $f(1)=1$，請選出正確的選項。

(1) $f(x)$爲奇函數

(2) $f(x)$爲偶函數

(3) $f(0)=0$

(4) $f(x)$爲常數函數

(5) $f(x)$爲一次函數

8. 設 $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$，$g(x)=2x^3+6x^2+6x+2$ 爲實係數三次多項式，請選出正確的選項。

(1) $f(x)=0$ 至少有一實根

(2) $g(x)=0$ 至少有一實根

(3) $g(x)=0$ 有三相異實根

(4) 若 $f(1)=0$，則 $x+1$ 是 $f(x)$ 的因式

(5) 若 $g(0)=2f(0)$、$g(1)=2f(1)$、$g(2)=2f(2)$、$g(3)=2f(3)$，則 $g(4)=2f(4)$

9. 設兩集合 A、B 為 $A=\{x\,|\,x^2-x-2<0\}$，$B=\{x\,|\,\dfrac{x}{x-2}<1\}$，請選出正確的選項。

(1) $A\cap B=\phi$

(2) $A\cup B=A$

(3) $A\subset B$

(4) $A-B=\{2\}$

(5) $(0\,,0)\in A\times B$

10. 已知 $(x_0\,,y_0)$ 為聯立方程組 $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$ 之唯一解，則 $(x_0\,,y_0)$ 必為下列哪些聯立方程組的解？

(1) $\begin{cases}(a_1+b_1)x+b_1y=c_1\\(a_2+b_2)x+b_2y=c_2\end{cases}$

(2) $\begin{cases}a_1x+(a_1+b_1)y=c_1+a_1y_0\\a_2x+(a_2+b_2)y=c_2+a_2y_0\end{cases}$

(3) $\begin{cases}a_1x+b_1y=a_1x_0+b_1y_0\\a_2x+b_2y=a_2x_0+b_2y_0\end{cases}$

(4) $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_1x+b_1y=c_1\end{cases}$

(5) $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1+1\\a_1x+b_1y=c_1-1\end{cases}$

11. 設 n 為自然數，則下列哪些數列 $<a_n>$ 的第 100 項 a_{100} 大於 1？

(1) $a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{1-a_n}$

(2) $a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+1)$

(3) $a_1=1$，$a_{n+1}=-(a_n+1)$

(4) $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+(-1)^{n-1}$

(5) $a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

12. 設 $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ 為平面上的三個非零向量，請選出正確的選項。

(1) 若 $\vec{u}\,//\,\vec{v}$ 且 $\vec{v}\perp\vec{w}$，則 $\vec{u}\perp\vec{w}$

(2) 若 $\vec{u}\,//\,\vec{v}$ 且 $\vec{v}\,//\,\vec{w}$，則 $\vec{u}\,//\,\vec{w}$

(3) 若 $\vec{u}\perp\vec{v}$ 且 $\vec{v}\perp\vec{w}$，則 $\vec{u}\perp\vec{w}$

(4) 若 $\vec{u}\,//\,\vec{v}$，則 $|\vec{u}\cdot\vec{v}|=|\vec{u}||\vec{v}|$

(5) 若 $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$，則 $\vec{u}\perp\vec{v}$

第貳部分：選填題（占 40 分）

說明：1.第 A 至 H 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號(13–33)。
2.每題完全答對得 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 設 A、B、C 為三事件，其中 B、C 為互斥事件，$5P(B)=4P(C)>0$。若有 $P(A|B)=\dfrac{1}{3}$ 且 $P(A|C)=\dfrac{1}{4}$，則 $P(A|B\cup C)=\dfrac{⑬⑭}{⑮⑯⑰}$。(化為最簡分數)

B. 在 ΔABC 中，$\angle A=135°$、$\overline{AB}=\sqrt{2}$、$\overline{AC}=2$。設 G 為 ΔABC 的重心，則 $\overline{AG}=\dfrac{\sqrt{⑱}}{⑲}$。

(化為最簡根式)

C. 設平面上 5 點 A,B,C,B',C' 共圓，若 $\angle ABC+\angle AB'C'=90°$，$\overline{AC}=1$ 且 $\overline{AC'}=\sqrt{3}$，則 $\angle ABC=$ ⑳㉑°。

D. 在 ΔABC 中，$\angle A = 45°$、$\angle B = 60°$，天宇和永淳兩人分別從 A、B 出發，沿直線行走，之後相遇於 ΔABC 的內心 I，則永淳行走速率為天宇行走速率之 $\sqrt{㉒-\sqrt{㉓}}$ 倍。(化為最簡根式)

E. 在坐標平面上的原點上有一大樓，今欣語在大樓附近散步，在第 t 分鐘時的位置 (x, y) 可表示成 $\begin{cases} x = -1 + 2\cos(60°t) \\ y = 2\sin(60°t) \end{cases}$。欣語在第 3 分鐘時仰望大樓頂端，發現仰角為 30°，在第 5 分鐘時再度仰望大樓頂端，發現仰角為 θ，則 $\tan\theta =$ ㉔ 。

F. 坐標平面上，紫柔沿著直線 $y = 2x$ 上行走，走了一小段路後左轉，走了 5 單位再左轉，而後便在直線 $y = 2x + k$ 上行走，則 $|k| =$ ㉕$\sqrt{㉖}$ 。(化為最簡根式)

G. 坐標平面上有一圓 C_1，其圓心為 O_1。畫出圓 C_2，通過 O_1 且和 C_1 相切，其圓心為 O_2。接著對於 $k = 3, 4, \cdots, 10$，依序畫出圓 C_k，通過 O_{k-1} 且和 C_{k-1} 相切，如此可得 10 個圓。對於 $k = 1, 2, \cdots, 10$，設圓 C_k 的半徑為 r_k，圓心為 O_k，若已知 $r_{10} = 1$，則 $\sum_{k=1}^{10} r_k =$ ㉗㉘㉙㉚ 。

H. 非凡和巍霆兩人預計從 A 點走到 B 點，再從 B 點走到 C 點，已知 A 到 B 之間有 4 條路相連、B 到 C 之間有 5 條路相連。若從 A 走到 B 時凡、霆兩人不能走同一條路，從 B 走到 C 時則沒有限制，試問兩人從 A 走到 B，再走到 C 的方法有 ㉛㉜㉝ 種。

參考公式及可能用到的數值

1. 一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的公式解： $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

2. 平面上，兩點 $P_1(x_1,y_1)$， $P_2(x_2,y_2)$ 間的距離爲 $\overline{P_1P_2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

   點 (x_0,y_0) 到直線 $ax+by+c=0$ 的距離爲 $\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

3. ΔABC 的和角公式： $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

   差角公式： $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

4. ΔABC 的正弦定理： $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，$R$ 爲 ΔABC 的外接圓半徑

   ΔABC 的餘弦定理： $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

5. 等比數列 $<a_n>$ 的前 n 項和爲 $S_n=\dfrac{a_1(r^n-1)}{r-1}$， $r\neq 1$

6. 相關係數：資料 X： $x_1,x_2,\cdots,x_n$，資料 Y： $y_1,y_2,\cdots,y_n$，則 X、Y 的相關係數

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$$

，其中 $\overline{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ ， $\overline{y}=\dfrac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}$