全國公私立高級中學 103 學年度學科能力測驗第四次聯合模擬考試

數學考科解析

考試日期：103 年 12 月 18~19 日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	4	1	2	5	3	2345	124	245	124	345	1234	8	3	7
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	6	−	2	0	1	5	0	1	2	1	1	3	9	1
31														
1														

第壹部分：選擇題

一、單選題

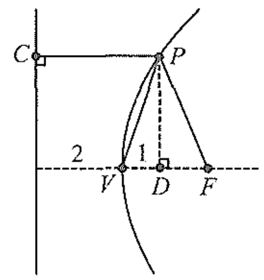
1. a_1個位數爲1、a_2個位數爲0、a_3個位數爲3、a_4個位數爲4，……之後是 1、0、3、4 循環出現

2. $\dfrac{4\times 2!\times 2!}{4!}=\dfrac{2}{3}$

3. $\begin{vmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ 3a-2c & 3b-2d \end{vmatrix}\times\dfrac{3}{2}=\begin{vmatrix} \dfrac{13}{2}a & \dfrac{13}{2}b \\ 3a-2c & 3b-2d \end{vmatrix}$

$=\dfrac{13}{2}\times\begin{vmatrix} a & b \\ -2c & -2d \end{vmatrix}=-13K$

4. 如圖，由拋物線的定義可知



$\overline{PF}=\overline{PC}=2+1=3$

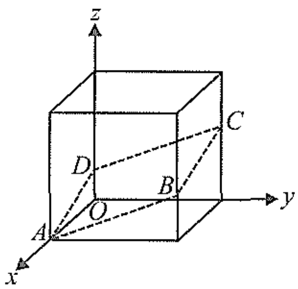
$\therefore \Delta PVF$ 的腰長爲 3，底邊長爲 2

可求得面積爲 $2\sqrt{2}$

5. 如圖，建立坐標系，令

$A(1,0,0)$、$B(1,1,\dfrac{1}{2})$

$C(0,1,\dfrac{2}{3})$



$ABCD$ 所在平面的方程式爲

$x-3y+6z=1$

故 D 點座標爲 $(0,0,\dfrac{1}{6})$

【另解】因 $ABCD$ 是個平行四邊形，所以

$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}=(1,0,0)+(-1,0,\dfrac{1}{6})=(0,0,\dfrac{1}{6})$

6. $\because f(x)$

$=f(1)\dfrac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}+f(2)\dfrac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}+f(3)\dfrac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$

$\therefore f(5)=3f(1)-8f(2)+6f(3)$

【另解】設 $f(x)=ax^2+bx+c$

計算 $3f(1)-8f(2)+6f(3)=25a^2+5b+c=f(5)$

二、多選題

7. (1) 爲包含直線 AB 的平面

(5) 三平面均過 A、B 兩點，且三平面不重合，所以三平面相交於直線 AB

8. (1) $\overrightarrow{AB}=(-2,-2,1)$、$\overrightarrow{AC}=(4,1,1)$

$\cos\angle BAC=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{AC}|}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \angle BAC=135°$

(2) $\overrightarrow{AB}=(-2,-2,1)$、$\overrightarrow{AC}=(4,1,1)$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-3,6,6)$，$\therefore \Delta ABC$ 面積$=\dfrac{1}{2}|(-3,6,6)|=\dfrac{9}{2}$

(3) $\overrightarrow{AD}=(2,k-1,2k+2)\perp(-3,6,6)\Rightarrow k=0$

(4) $k=1\Rightarrow\overrightarrow{AD}=(2,0,4)$ 所求爲 $|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}|=18$

(5) 題意即爲 $\overrightarrow{CD}\perp\overrightarrow{AC}\Rightarrow(-2,k-2,2k+1)\cdot(4,1,1)=0$

$\Rightarrow k=3$

9. (1) 因 $f(-i+2)=f(i+2)=0$，且 $f(x)=0$ 的第三根爲實根

$\therefore f(i-2)\neq 0$

(2) $f(i^3)=f(-i)=\overline{f(i)}=\overline{2-i}=2+i$

(3) $f(x)$ 未必爲整係數多項式

(4) $f(x)=a(x-1)(x^2-4x+5)=a(x^3-5x^2+9x-5)$

$\therefore b=-5a=d$

(5) 由題意可知方程式 $f(x)=0$ 恰有一實根

且 $f(-2)<f(0)$，所以 $f(x)$ 是個遞增函數

因此 $f(-4)<f(-2)<0$

【另解】由題意知方程式 $f(x)=0$ 恰有一實根

設 $f(-4)>0$，$\therefore f(-4)\times f(-2)<0$ 又 $f(-2)\times f(0)<0$

由勘根定理可知方程式 $f(x)=0$ 有實根介於 -4 到 -2 之間與 -2 到 0 之間(矛盾)

10. (1)(2) 由圖可知可行解區域在 $ax-by=c$ 的右下方

$\therefore a>0$，$b>0$

(3) $ax-by=c$ 與 x 軸交於 $(\dfrac{c}{a},0)$，$\therefore \dfrac{c}{a}<0\Rightarrow c<0$

(4) 在 B 點產生最小值，在 A 點產生最大值

$\therefore$越右邊越大$\Rightarrow p\geq 0$ ($p=0$ 爲水平線，也符合題意)

(5) $-2\leq\dfrac{p}{q}\leq 0$ 又 $q<0\Rightarrow p+2q\leq 0$

11. (1) 圓 C 的圓心爲 $(-1,-1)$

(2) $\begin{cases}3x+4y+2=0\\x=2y\end{cases}\Rightarrow A(-\dfrac{2}{5},-\dfrac{1}{5})$

(3) $\begin{cases}x^2+y^2+2x+2y+1=0\\x=2y\end{cases}\Rightarrow B(-2,-1)$ 可得切線 PB 方程式爲 $x=-2$

(4) $\begin{cases}3x+4y+2=0\\x=-2\end{cases}\Rightarrow P(-2,1)$，$\therefore \Delta PAB$ 的面積爲 $\dfrac{8}{5}$

(5) P 點到圓心的距離爲 $\sqrt{5}$

$\therefore(\sqrt{5}-1)\leq P$ 點到圓上一點的距離 $\leq\sqrt{5}+1$，又介於 $\sqrt{5}-1$ 與 $\sqrt{5}+1$ 之間的正整數爲 2 或 3，所以圓 C 上共有 4 個點與 P 點的距離爲正整數

12. (1) Y 對 X 的迴歸直線方程式通過 $(60,70)$ 與 $(70,73)$

$\therefore (Y-70)=\dfrac{73-70}{70-60}(X-60)$

(2) $\because 0.3=0.9\times\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$，$\therefore \sigma_y=1$

(3) $\because {\sigma_y}^2=\dfrac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(y_i-70)^2=1$，$\therefore \sum_{i=1}^{10}(y_i-70)^2=10$

$\therefore$某一個 $y_i<60$ 是不可能的

(若 $y_i<60 \Rightarrow (y_i-70)<-10 \Rightarrow (y_i-70)^2>100$

與 $\sum_{i=1}^{10}(y_i-70)^2=10$ 矛盾)

(4) 相關係數不變

(5) $\because$相關係數 $=0.9$，$\therefore Y'=0.9X'$

第貳部分：選填題

A. $2^{x+3}=3^{x+1} \Rightarrow 8\times 2^x=3\times 3^x \Rightarrow (\frac{3}{2})^x=\frac{8}{3}$

B. 由題意可知介於 $1+\sqrt{2}$ 與 $a+\sqrt{2}$ 之間的正整數共有 6 個

$\therefore a=7$

C. $\begin{cases}21\le 10\log a<22\\ 42\le 20\log a<43\end{cases} \Rightarrow 2.1\le \log a<2.15$

由所附的對數表，可知 $\log 1.25<0.1 \Rightarrow \log 125<2.1$

$0.15<\log 1.42 \Rightarrow 2.15<\log 142$

正整數 a 為 126,127,…,或 141，共有 16 個

D. 由 $A-B=\begin{bmatrix}-2&0\\3&3\end{bmatrix}$，$A+B=\begin{bmatrix}2&2\\1&3\end{bmatrix}$

可得 $A=\begin{bmatrix}0&1\\2&3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix} \Rightarrow A^2-B^2=\begin{bmatrix}-1&1\\8&12\end{bmatrix}$

$\therefore$所求 $=-20$

E. (1) $AAABC$ 型：$C_1^3\times\dfrac{5!}{3!}=60$

(2) $AABBC$ 型：$C_2^3\times\dfrac{5!}{2!\times 2!}=90$

共 $60+90=150$ 種

F. 令 $\overline{PF_1}>\overline{PF_2}$ 可知 $\begin{cases}\overline{PF_1}-\overline{PF_2}=2\\ \overline{PF_1}+\overline{PF_2}=14\end{cases} \Rightarrow \overline{PF_1}=8$，$\overline{PF_2}=6$

$\because \angle F_1PF_2=60^\circ$，$\therefore \overline{F_1F_2}^2=8^2+6^2-2\times 8\times 6\times\cos 60^\circ=52$

即 $4c^2=52 \Rightarrow c^2=13$，$\therefore$所求 $k=c^2-1=12$

G. 甲要取得球號 9,19 才有可能成為贏家

乙要取得球號 8,18 才有可能成為贏家

各取一球後甲為贏家的機率有

(1) 甲取 9 號球且乙不取 18 號球：$\dfrac{1}{20}\times\dfrac{19}{20}=\dfrac{19}{400}$

(2) 甲取 19 號球且乙取任意號球：$\dfrac{1}{20}\times\dfrac{20}{20}=\dfrac{20}{400}$

$\therefore$甲為贏家的機率 $\dfrac{39}{400}$

又各取一球後甲為贏家且甲取得的球號小於乙取得的球號的機率有

(1) 甲取 9 號球且乙取大於 9 號球(不含 18 號)：$\dfrac{1}{20}\times\dfrac{10}{20}=\dfrac{10}{400}$

(2) 甲取 19 號球且乙取 20 號球：$\dfrac{1}{20}\times\dfrac{1}{20}=\dfrac{1}{400}$

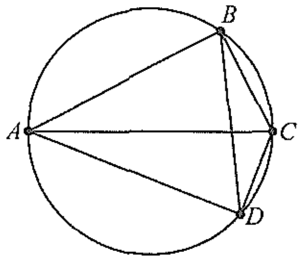
$\therefore$甲為贏家且甲取得的球號小於乙取得的球號的機率 $\dfrac{11}{400}$

故所求的條件機率為 $\dfrac{11}{39}$

H. 令 $\angle DAC=\theta$

$\because \Delta ABC$、ΔACD、ΔABD 外接圓直徑相等

由正弦定理可知



$\dfrac{4\sqrt{5}}{\sin 2\theta}=\dfrac{5}{\sin\theta}=\dfrac{\overline{BD}}{\sin(2\theta+\theta)}$

又 $\sin 2\theta=2\sin\theta\times\cos\theta$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

計算可得 $\sin 3\theta=\sin(2\theta+\theta)=\sin 2\theta\cos\theta+\cos 2\theta\sin\theta$

$=2\sin\theta\cos^2\theta+(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\sin\theta=\dfrac{11}{25}\sqrt{5}$

(註：若知道三倍角公式 $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$ 也可求得)

$\therefore \overline{BD}=11$