數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
答案	(4)	(5)	(4)	(2)	(3)	(5)	(2)(3)(4)(5)	(4)(5)	(1)(4)(5)
題號	10.	11.	12.						
答案	(2)(4)(5)	(1)(4)	(2)(3)(5)						

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (4)

出處：第一冊第一章〈數與式〉

目標：討論去絕對值

解析：① $x \geq 2 \Rightarrow 5 < 2x \leq 10$

$\Rightarrow \frac{5}{2} < x \leq 5$

$\Rightarrow x=3，4，5$

② $-2 \leq x < 2 \Rightarrow 5 < 4 \leq 10$(不合)

③ $x < -2 \Rightarrow 5 < (2-x)+(-2-x) \leq 10$

$\Rightarrow 5 < -2x \leq 10$

$\Rightarrow -5 \leq x < -\frac{5}{2}$

$\Rightarrow x=-3，-4，-5$

由①、②、③知 x 有 6 個整數解

故選(4)。

2. (5)

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：矩陣的反矩陣運算

解析：$A^{-1}=\frac{1}{3b-2a}\begin{bmatrix} b & -a \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

由 $A+A^{-1}=\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$，即 $\begin{bmatrix} 3 & a \\ 2 & b \end{bmatrix}+\frac{1}{3b-2a}\begin{bmatrix} b & -a \\ -2 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} 3b-2a=1 \\ 3+b=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=7 \\ b=5 \end{cases} \quad \therefore a+b=12$

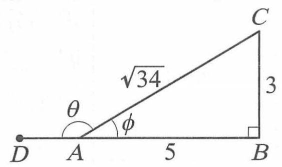
故選(5)。

3. (4)

出處：第三冊第一章〈三角〉

目標：廣義角的三角函數、二倍角

解析：$\because \overline{AB}=5，\overline{BC}=3 \quad \therefore \overline{AC}=\sqrt{34}$



$\sin\theta=\sin(180^\circ-\phi)=\sin\phi=\frac{3}{\sqrt{34}}$

$\cos\theta=\cos(180^\circ-\phi)=-\cos\phi=-\frac{5}{\sqrt{34}}$

$\therefore \sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

$=2\cdot\frac{3}{\sqrt{34}}\cdot\left(-\frac{5}{\sqrt{34}}\right)=-\frac{15}{17}$

故選(4)。

〈另解〉

$\theta+\phi=180^\circ \Rightarrow 2\theta=360^\circ-2\phi$

$\sin 2\theta=\sin(360^\circ-2\phi)=-\sin 2\phi=-2\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right)\cdot\left(\frac{5}{\sqrt{34}}\right)=-\frac{15}{17}$。

4. (2)

出處：第三冊第一章〈三角〉

目標：餘弦定理

解析：設 $\overline{AD}=x$

$\because \triangle ABD$ 的周長為 16

$\therefore \overline{BD}=9-x$

$\cos\angle ADB=-\cos\angle ACB$

$=-\dfrac{5^2+6^2-7^2}{2\cdot5\cdot6}=-\dfrac{1}{5}$

$\overline{AB}^2=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2-2\overline{AD}\cdot\overline{BD}\cdot\cos\angle ADB$

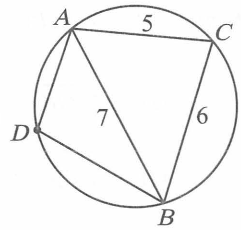
$\therefore 7^2=x^2+(9-x)^2-2\cdot x\cdot(9-x)\cdot\left(-\dfrac{1}{5}\right)$

$\Rightarrow x^2-9x+20=0$

$\Rightarrow x=4$ 或 5 (不合)

$\therefore \overline{AD}=4$

故選(2)。



5. (3)

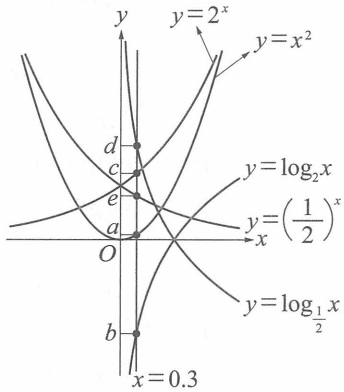
出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：指數圖形、對數圖形

解析：由右圖各曲線與 $x=0.3$ 的交點位置判斷 a，b，c，d，e 的大小

可知 $b<a<e<c<d$

故選(3)。



6. (5)

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：利用斜率法判別極值

解析：原目標函數 $m_1=\dfrac{-a}{b}$ ，在 A 點發生最小值

$\Rightarrow 0<\dfrac{-a}{b}<1$ 且 $a<0$，$b>0$

新目標函數 $m_2=\dfrac{-b}{a}\Rightarrow m_2>1$ 且 $-b<0$

$\therefore$新目標函數的最大值會發生於 F 點

故選(5)。

二、多選題

7. (2)(3)(4)(5)

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：首數與尾數的應用

解析：$A=10^{9.61}$，$B=10^{4.82}$

(1) ╳：$\because \log 2B=\log 2+\log B\approx 0.3010+4.82=5.121$

$\therefore A>2B$

(2) ○：$\log AB=\log A+\log B=14.43$

AB 整數部分為 $14+1=15$ 位數

(3) ○：承(2)，$\log 2<0.43<\log 3$

$\therefore AB$ 的整數部分最高位數字為 2

(4) ○：A 為 10 位數字(小數點前面)且最高位數字為 4 ($\because \log 4<0.61<\log 5$)

B 為 5 位數字(小數點前面)且最高位數字為 6 ($\because \log 6<0.82<\log 7$)

$\therefore A+B$ 為 10 位數字

(5) ○：$\log B^2=9.64\Rightarrow B^2$ 為 10 位數且最高位數字為 4

又 A 亦為 10 位數，且最高位數字為 4

$\therefore A+B^2$ 仍為 10 位數

故選(2)(3)(4)(5)。

8. (4)(5)

出處：第三冊第一章〈三角〉

目標：廣義角的三角函數、二倍角

解析：(1)╳：令 $P(x,-4)$，由 $\tan\theta=\dfrac{-4}{x}=\dfrac{-3}{4}$ $\quad\therefore x=\dfrac{16}{3}$

(2)╳：$\overline{OP}=\sqrt{\left(\dfrac{16}{3}\right)^2+(-4)^2}=\dfrac{20}{3}$

(3)╳：$\sin\theta=-\dfrac{3}{5}$，$\cos\theta=\dfrac{4}{5}$ $\quad\therefore\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{5}$

(4)○：$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{-24}{25}<0$

(5)○：$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\dfrac{7}{25}>0$

故選(4)(5)。

9. (1)(4)(5)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：虛根成對性質、勘根定理

解析：(1)○：$\because f(x)$ 為實係數多項式

$\therefore f(1+i)=f(1-i)=0$

(2)╳：$\because f(x)$ 非有理係數多項式

$\therefore 2+\sqrt{3}$ 不一定為 $f(x)=0$ 的一根

(3)╳：$\because f(x)$ 為實係數多項式

$\therefore f(2-i)=-3i-1$

(4)○：可知 $f(x)=[x-(2-\sqrt{3})]\,Q(x)$，其中 $\deg Q(x)=4$

則 $g(x)=xf(x^2)$

$=x[x^2-(2-\sqrt{3})]\,Q(x^2)$

$\therefore g(x)=0$ 至少有 3 實根

(5)○：若 $f(-1)f(0)<0$，則在 $(-1,0)$ 間至少 1 實根且為奇數個根

若 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 間有 3 個以上的實根

再加上另一實根 $2-\sqrt{3}$

則 $f(x)=0$ 至少具有 4 個實根

但 $\deg f(x)=5$ 且 $f(x)$ 已知有兩虛根

$\therefore f(x)=0$ 在 $(-1,0)$ 間恰有一實根

故選(1)(4)(5)。

10. (2)(4)(5)

出處：第四冊第一章〈空間向量〉、第四冊第二章〈空間中的平面與直線〉

目標：正射影、直線方程式

解析：設交點 $P(1+3t,-5t,-2+t)$，t 為實數

$\because P\in E\quad\therefore(1+3t)-2(-5t)-(-2+t)=15$

$\therefore t=1$，代入得 $P(4,-5,-1)$

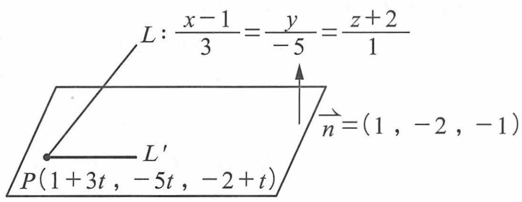
取 L 的方向向量 $\overrightarrow{v}=(3,-5,1)$

$\overrightarrow{v}$ 在 $\overrightarrow{n}$ 上的正射影為

$\dfrac{3+10-1}{6}(1,-2,-1)=(2,-4,-2)$

$\therefore L'$ 的方向向量為 $(3,-5,1)-(2,-4,-2)=(1,-1,3)$

$\therefore L':\begin{cases}x=4+s\\ y=-5-s\\ z=-1+3s\end{cases}$，$s\in R$



將各選項代入檢查後發現只有(2)(4)(5)選項正確

故選(2)(4)(5)。

C. $\dfrac{26}{33}$

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：機率

解析：m，a，t，h，e，i，c，s

m，a，t

所求為 $1-P$ (沒有母音相連)

母音最後排，先排 m，m，t，t，h，c，s

再從 8 個空隙中挑 4 個給 a，a，e，i 排

$$\therefore P(\text{沒有母音相連})=\frac{\dfrac{7!}{2!2!}\times C_4^8\times\dfrac{4!}{2!}}{\dfrac{11!}{2!2!2!}}=\frac{7}{33}$$

故所求為 $1-\dfrac{7}{33}=\dfrac{26}{33}$。

D. 385

出處：第二冊第一章〈數列與級數〉

目標：找數列規律並求和

解析：所求為 $19\times1+17\times2+15\times3+\cdots\cdots+1\times10$

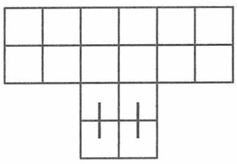
$$\begin{aligned}&=\sum_{k=1}^{10}(21-2k)\cdot k\\&=\sum_{k=1}^{10}(21k-2k^2)\\&=21\sum_{k=1}^{10}k-2\sum_{k=1}^{10}k^2\\&=21\cdot\frac{10\cdot11}{2}-2\cdot\frac{10\cdot11\cdot21}{6}\\&=385\text{。}\end{aligned}$$

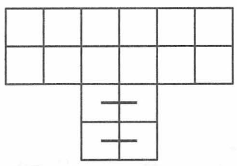
E. 30

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：討論排列解題

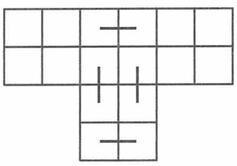
解析：①





$$\left\{\begin{array}{ll}1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 & \Rightarrow 1\text{種}\\ 1\ 1\ 1\ 1\ 2 & \Rightarrow \dfrac{5!}{4!}=5\text{種}\\ 1\ 1\ 2\ 2 & \Rightarrow \dfrac{4!}{2!2!}=6\text{種}\\ 2\ 2\ 2 & \Rightarrow 1\text{種}\end{array}\right.\Rightarrow 2(1+5+6+1)=26\ (\text{種})$$

②



$$\text{左：}\left\{\begin{array}{ll}1\ 1 & \Rightarrow 1\text{種}\\ 2 & \Rightarrow 1\text{種}\end{array}\right.\text{，右：}\left\{\begin{array}{ll}1\ 1 & \Rightarrow 1\text{種}\\ 2 & \Rightarrow 1\text{種}\end{array}\right.\Rightarrow 2\times2=4\ (\text{種})$$

由①、②可知，共有 $26+4=30$ 種。

11. (1)(4)

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：標準差

解析：(1)○：將〈x、x、y〉同時乘 (-1) 得〈$-x$、$-x$，$-y$〉

再同時加上 $(x+y)$ 得〈y、y、x〉

故〈x、x、y〉與〈y、y、x〉的標準差相同

(4)○：〈x、x、x、x、y、y〉的平均數與〈x、x、y〉的平均數相同

由標準差的定義

$$\sigma_{\langle x、x、y\rangle}=\sqrt{\frac{1}{3}(x^2+x^2+y^2)-\mu^2}$$

$$\sigma_{\langle x、x、x、x、y、y\rangle}=\sqrt{\frac{1}{6}(x^2+x^2+x^2+x^2+y^2+y^2)-\mu^2}$$

$$\therefore \sigma_{\langle x、x、y\rangle}=\sigma_{\langle x、x、x、x、y、y\rangle}$$

故選(1)(4)。

12. (2)(3)(5)

出處：第四冊第四章〈二次曲線〉

目標：判斷直線與雙曲線的相交情形

解析：(1)╳：L_1 為 Γ 的一條漸近線　∴無交點

(2)○：$\because -\frac{3}{2}\le m_{L_2}=-\frac{4}{3}\le\frac{3}{2}$　∴L_2 與 Γ 必相交

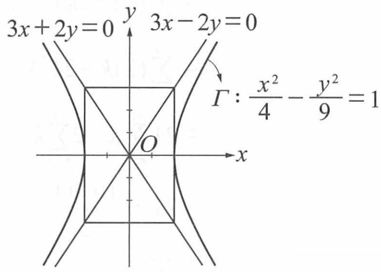
(3)○：L_3 為將漸近線 $3x-2y=0$ 向右平移　∴必相交

(4)╳：L_4 過 $(1,0)$，$(0,-3)$，由右圖可知與 Γ 無交點

(5)○：$\begin{cases}\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1\\2x+y=2\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow 7x^2-32\sqrt{2}\,x+68=0$

∵判別式 $D>0$　∴L_5 與 Γ 有相異兩交點

故選(2)(3)(5)。



第貳部分：選填題

A. $\frac{20}{3}$

出處：第四冊第一章〈空間向量〉

目標：正射影、平行六面體體積

解析：$|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}|=6\times10=60$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AD}$ 上的正射影為 $\frac{(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|^2}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{\pm60}{3^2}\overrightarrow{AD}$

$\because k>0$　$\therefore k=\frac{20}{3}$。

B. $(3,1)$

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：對數運算、方程式分解

解析：$\log x+\log y+\log 2=\log(x+y+2)$

$\Rightarrow \log(2xy)=\log(x+y+2)$

$\Rightarrow 2xy=x+y+2$

$\Rightarrow 2xy-x-y-2=0$

$\Rightarrow (2x-1)(2y-1)=5$

$\because x>y>0$

$\therefore 2x-1>2y-1>0$

$\therefore 2x-1=5$ 且 $2y-1=1$

$\therefore x=3$，$y=1$

故數對 $(x,y)=(3,1)$