

# 全國公私立高級中學

## 104 學年度學科能力測驗第三次聯合模擬考試

考試日期：104 年 11 月 5~6 日

### 數學考科

#### — 作答注意事項 —

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 4 題，多選題 6 題，選填題第 A 至 J 題共 10 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是  $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是  $\frac{3}{8}$ ，則考生必

須分別在答案卡上的第 18 列的  $\frac{3}{\square}$  與第 19 列的  $\frac{\square}{8}$  畫記，如：

18	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若第 C 題的答案格式是  $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是  $\frac{-7}{50}$  時，則考生必須分別在答案

卡的第 20 列的  $\frac{-}{\square}$  與第 21 列的  $\frac{7}{\square}$  畫記，如：

20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

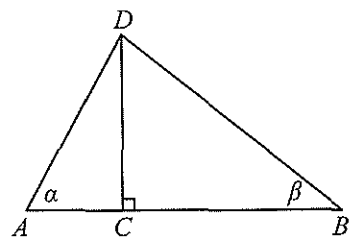
※ 試題後附有參考公式及可能用到的數值

### 第壹部分：選擇題（占 50 分）

#### 一、單選題（占 20 分）

說明：第 1 題至第 4 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 已知  $f(x)$ 、 $g(x)$  分別是實係數偶函數和奇函數，且  $f(x)-g(x)=x^3+x^2+1$ ，則  $f(1)+g(1)=?$ 
  - (1) -3
  - (2) -1
  - (3) 0
  - (4) 1
  - (5) 3
  
2. 若將數列  $1, 1+3, 3+5+7, 5+7+9+11, 7+9+11+13+15, \dots$  記為  $\{a_n\}$ ，則  $a_{2016}$  的個位數字為何？
  - (1) 0
  - (2) 2
  - (3) 4
  - (4) 6
  - (5) 8
  
3. 如圖(1)，某工廠要在  $A$ 、 $B$  兩地連線上的定點  $C$  建造廣告牌  $CD$ ，其中  $D$  為頂端，且  $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ ， $AC$  長 35 公尺， $BC$  長 80 公尺。設  $A$ 、 $B$  在同一水平面上，從  $A$  和  $B$  看  $D$  的仰角分別為  $\alpha$  和  $\beta$ 。若要求  $\alpha \geq 2\beta$ ，則  $\overline{CD}$  最大值最靠近哪一個整數？
  - (1) 27
  - (2) 28
  - (3) 29
  - (4) 30
  - (5) 31



圖(1)

4. 設  $x$ 、 $y$  皆大於 0， $xy+3y=15$ ，則  $xy^2$  之最大值為何？

- (1) 12
- (2)  $\frac{63}{4}$
- (3) 18
- (4)  $\frac{75}{4}$
- (5)  $\frac{49}{4}$

## 二、多選題 (占 30 分)

說明：第 5 題至第 10 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇 (填) 題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

5.  $x$ 、 $y$  皆為實數，且滿足  $|x-1| \leq 3$  且  $|2y+7| \leq 3$ ，選出下列各式之範圍何者正確？

- (1)  $0 \leq x - y \leq 9$
- (2)  $-20 \leq xy \leq 10$
- (3)  $-2 \leq \frac{x}{y} \leq 1$
- (4)  $4 \leq x^2 \leq 16$
- (5)  $4 \leq y^2 \leq 25$

6. 設  $f(x)$  為一個次數不超過三次的實係數多項式，滿足  $f(-1)=1$ ， $f(1)=5$ ， $f(3)=9$ ，且常數項為  $a$ 。請選出正確的選項。

- (1)  $f(x) = \frac{a}{3}(x+1)(x-1)(x-3) + \frac{-1}{8}x(x-1)(x-3) - \frac{5}{4}x(x+1)(x-3) + \frac{3}{8}x(x+1)(x-1)$
- (2) 可以找到實數  $a$ ，使得多項式  $y=f(x)$  為二次多項式
- (3) 對任意的實數  $a$ ，方程式  $f(x)=0$  恆有實數解
- (4) 對任意大於 3 的實數  $a$ ，方程式  $f(x)=0$  在 1 與 3 之間一定沒有實根
- (5) 設  $g(x)$  為四次實係數多項式，且滿足  $g(-1)=1$ ， $g(1)=5$ ， $g(3)=9$ ， $g(0)=a$ ，則  $g(x)$  除以  $x(x+1)(x-1)(x-3)$  的餘式為  $f(x)$

7. 關於指數函數或對數函數圖形的敘述，請選出正確的選項。

- (1)  $y = -\log_{2016} x$  與  $y = 2016^{-x}$  兩函數的圖形對稱於直線  $y = x$
- (2)  $y = \log_{2016} x$  與  $y = 2016^x$  兩函數的圖形交於一點
- (3) 在  $y = 2016^x$  的圖形上任取相異兩點  $A$ 、 $B$ ，則直線  $AB$  的斜率必為正
- (4)  $y = \log_{2016}(x^2 - 12x + 40)$  的圖形與  $x$  軸相交
- (5)  $y = 2016^x$  的圖形恆在  $y = 2016^{-x}$  的上方

8. 設  $a = \log_3 6$ ， $b = \log_5 10$ ， $c = \log_7 14$ ，請選出正確的選項。

- (1)  $c > b > a$
- (2)  $a > b > c$
- (3)  $a > c > b$
- (4)  $a > 1.5$
- (5)  $c > 1.5$

9. 設每個工作日甲、乙、丙、丁 4 人需使用某種設備的機率分別為 0.6、0.5、0.5、0.4，4 人是否需使用設備互相獨立。請選出正確的選項。

- (1) 今已知甲需使用設備，則當日至少 2 人需使用設備的機率為 0.85
- (2) 今已知甲需使用設備，則當日至少 3 人需使用設備的機率為 0.4
- (3) 今已知甲需使用設備，則當日只有 2 人需使用設備的機率為 0.45
- (4) 今已知丙需使用設備，則當日只有 2 人需使用設備的機率為 0.38
- (5) 今已知甲、乙皆需使用設備，則當日至少 3 人需使用設備的機率為 0.7

10. 已知某班學生的化學成績 ( $X$ ) 與生物成績 ( $Y$ ) 的算術平均數分別為  $\bar{x}=70$ ， $\bar{y}=75$ ，且其相關係數為  $r=0.8$ 。若  $Y$  對  $X$  的迴歸直線過點  $(10, 35)$ ，請選出正確的選項。
- (1)  $y$  對  $x$  的迴歸直線必過點  $(70, 75)$
- (2)  $y$  對  $x$  的迴歸直線斜率為  $0.8$
- (3)  $x$  的標準差是  $y$  的標準差的  $1.2$  倍
- (4)  $x$  的標準差是  $y$  的標準差的  $1.5$  倍
- (5) 若已知該班某位同學化學成績高於  $70$  分，則他的生物成績必高於  $75$  分

### 第貳部分：選填題 (占 50 分)

說明：1. 第 A 至 J 題，將答案畫記在答案卡之「選擇 (填) 題答案區」所標示的列號 (11-32)。

2. 每題完全答對得 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 已知不等式方程組  $\begin{cases} x \geq 0 \\ x+3y \geq 3 \\ 3x+2y \leq 6 \end{cases}$  所表示的平面區域被直線  $y=kx+2$  分成面積比是  $1:1$  的兩部分，則  $k$  的值為  $\frac{\textcircled{11} \textcircled{12} \textcircled{13}}{\textcircled{14} \textcircled{15}}$ 。(化為最簡分數)

- B. 已知  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{60}$  是由正數組成的等比數列，公比為  $r$ ，且  $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{60} = r^{60}$ ，若  $a_3 \cdot a_6 \cdot a_9 \cdot \dots \cdot a_{60} = r^n$ ，則  $n$  為  $\textcircled{16} \textcircled{17}$ 。

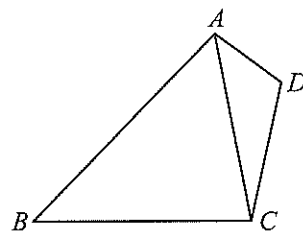
C. 某大學志工協會有 6 名男學生，4 名女學生。在這 10 名同學中，有 3 名同學來自國文系，其餘 7 名同學來自英文、歷史等其他互不相同的七個學系，現欲選取 3 名同學到希望小學任教(每位同學被選到的機率相同)，則選出的 3 名同學來自不相同學系的選法有 1819 種。

D.  $(\frac{x}{\sqrt{y}} - \frac{y}{\sqrt{x}})^8$  的展開式中  $x^2y^2$  的係數為 2021。

E. 甲乙兩人進行圍棋比賽，約定先連勝兩局者直接贏得比賽。假設每局甲獲勝的機率為  $\frac{2}{3}$ ，乙獲勝的機率為  $\frac{1}{3}$ ，各局比賽結果相互獨立，則甲在 4 局以內(含 4 局)贏得比賽的機率為  $\frac{\text{22}}{\text{24}} \frac{\text{23}}{\text{25}}$ 。(化為最簡分數)

F. 輔導老師將班上同學的性向測驗成績當  $x$  值，成就測驗成績當  $y$  值，求出  $y$  對  $x$  的迴歸直線為  $y = 0.81x + 3.3$ 。若該班導師將成就測驗成績當  $x$  值，性向測驗成績當  $y$  值，求出  $y$  對  $x$  的迴歸直線為  $y = 0.64x + 31.6$ ，若性向測驗成績及成就測驗成績的相關係數為  $r$ ，則  $100r$  為 2627。

- G. 如圖(2)，四邊形  $ABCD$ ， $\overline{AD}=1$ ， $\overline{CD}=2$ ， $\overline{AC}=\sqrt{7}$ ，  
若  $\cos \angle BAD = -\frac{\sqrt{7}}{14}$ ， $\sin \angle CBA = \frac{\sqrt{21}}{6}$ ，則  $\overline{BC} = \underline{\textcircled{28}}$ 。



圖(2)

- H. 圓  $x^2 + y^2 = 4$  的切線與  $x$  軸正向、 $y$  軸正向圍成一個三角形，則該三角形面積最小值為  $\underline{\textcircled{29}}$ 。

- I. 已知  $A$ 、 $B$ 、 $C$  為圓  $O$  上的三點， $O$  為圓心，若  $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ ，則  $\overrightarrow{AB}$  與  $\overrightarrow{AC}$  的夾角為  $\underline{\textcircled{30}\textcircled{31}}$  度。

- J. 在  $\triangle ABC$  中，內角  $A$ 、 $B$ 、 $C$  的對邊分別為  $a$ 、 $b$ 、 $c$  且  $a > c$ 。已知  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 2$ ， $\cos B = \frac{1}{3}$ ， $b = 3$ ，則  $a - b + c = \underline{\textcircled{32}}$ 。

參考公式及可能用到的數值

1. 一元二次方程式  $ax^2+bx+c=0$  的公式解： $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

2. 平面上，兩點  $P_1(x_1, y_1)$ ， $P_2(x_2, y_2)$  間的距離為  $\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$   
點  $(x_0, y_0)$  到直線  $ax+by+c=0$  的距離為  $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

3.  $\triangle ABC$  的和角公式： $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$

差角公式： $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$

倍角公式： $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$

4.  $\triangle ABC$  的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ ， $R$  為  $\triangle ABC$  的外接圓半徑

$\triangle ABC$  的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

5. 等差數列  $\langle a_n \rangle$  的前  $n$  項和為  $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = \frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$ ，其中  $d$  為公差

6. 相關係數：資料  $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，資料  $Y: y_1, y_2, \dots, y_n$ ，則  $X$ 、 $Y$  的相關係數

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}, \text{ 其中 } \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}$$

7. 算幾不等式

(1) 設  $a \geq 0$ 、 $b \geq 0$ ，則  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

(2) 當  $a=b$  時， $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ ；當  $a \neq b$  時， $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$

8.  $Y$  對  $X$  的迴歸直線為  $y = \mu_Y + r \times \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X)$ ，其中  $X$  與  $Y$  的相關係數  $r$ ，算術平均數  $\mu_X$ 、

$\mu_Y$ ，標準差  $\sigma_X$ 、 $\sigma_Y$

9.  $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ， $\log 7 \approx 0.8451$