數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
答案	(5)	(1)	(3)	(5)	(3)	(3)	(1)(3)(4)	(1)(2)	(1)(2)(3)(4)
題號	10.	11.	12.						
答案	(1)(2)(3)	(1)(2)(4)(5)	(3)(4)(5)						

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (5)

難易度：易

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：向量的線性組合與加減法、三點共線定理

解析：若 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$

則 $x>0$，$y>0$，$x+y>1 \Rightarrow P\in$ I

$x<0$，$y>0$，$x+y>1 \Rightarrow P\in$ II

$x<0$，$y>0$，$x+y<1 \Rightarrow P\in$ III

$x>0$，$y<0$，$x+y<1 \Rightarrow P\in$ IV

$x>0$，$y<0$，$x+y>1 \Rightarrow P\in$ V

故選(5)。

2. (1)

難易度：中

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：對數的定義與運算

解析：$(\log_9 a)(\log_9 b)-\log_9 a-\log_9 b \le 0$ 且 $b=a^2 \Rightarrow (\log_9 a)(\log_9 a^2)-\log_9 a-\log_9 a^2 \le 0$

$\Rightarrow 2(\log_9 a)^2-3\log_9 a \le 0$

$\Rightarrow (\log_9 a)(2\log_9 a-3) \le 0$

$\Rightarrow 0 \le \log_9 a \le \dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow 1 \le a \le 9^{\frac{3}{2}}$

$\Rightarrow 1<a \le 27$ ($\because$底數 $a\ne 1$)

故選(1)。

3. (3)

難易度：易

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：條件機率

解析：和為 10 之情形有 $(1,3,6)$、$(1,4,5)$、$(2,2,6)$、$(2,3,5)$、$(2,4,4)$、$(3,3,4)$，

故有 $6+6+3+6+3+3=27$ 種情形，所求機率為 $\dfrac{15}{27}=\dfrac{5}{9}$

故選(3)。

4. (5)

難易度：中

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：直線點斜式及圓方程式

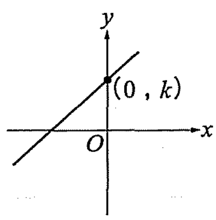
解析：① 若 $m>0$，$k>0$，如圖(一)

直線必通過一、二、三象限

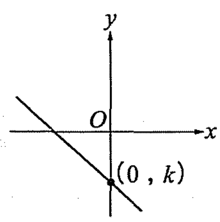
② 若 $m<0$，$k<0$，如圖(二)

直線必通過二、三、四象限

上述兩種情況發生時直線與 x 軸正向不相交亦不過原點，故選(5)。



圖(一)



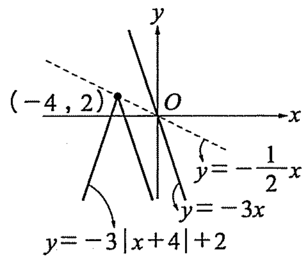
圖(二)

5. (3)

難易度：中

出處：第一冊第一章〈數與式〉、第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：絕對值概念與直線斜率的應用



解析：考慮$\begin{cases} y=-3\,|x+4|+2 \\ y=mx \end{cases}$之圖形交點

無解 $\Leftrightarrow -3 \le m < -\frac{1}{2}$。

故選(3)。

〈另解〉①$x \ge -4$ 時，$mx+3x+12-2=0$，$x=\frac{-10}{m+3}$

$\because$無解　$\therefore \frac{-10}{m+3} < -4$ 或 $m+3=0$，即$-3 \le m < -\frac{1}{2}$

②$x < -4$ 時，$mx-3x-12-2=0$，$x=\frac{14}{m-3}$

$\because$無解　$\therefore \frac{14}{m-3} \ge -4$ 或 $m-3=0$，即 $m \le -\frac{1}{2}$ 或 $m \ge 3$

$\therefore -3 \le m < -\frac{1}{2}$。

6. (3)

難易度：中

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：組合分析與排列

解析：$C_1^{10} \times (10^3-9^3)=2710$(種)

故選(3)。

〈另解〉先考慮三位主持人的數字：三同、二同一異或三異

$$C_1^{10} \times C_1^1 + \left(C_2^{10} \times 2 \times \frac{3!}{2!}\right) \times C_1^2 + (C_3^{10} \times 3!) \times C_1^3 = 10+540+2160=2710(\text{種})。$$

二、多選題

7. (1)(3)(4)

難易度：中

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：迴歸直線斜率與相關係數之關係、標準化數據之概念

解析：(1)○：觀察在 x 變大時，y 有變大的趨勢，因此 $r>0$

(2)╳：由表可知 $\sigma_y=10 \cdot \sigma_x$，又 x 與 y 不是完全正相關 $\Rightarrow 0<r<1$

$\therefore m=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}=10r<10\times 1 \Rightarrow m<10$

(3)○：將丁、戊兩人的成績交換，則數據 (x,y) 在同一直線上，為完全正相關，故相關係數為 1

(4)○：將丁、戊兩人的成績交換，(x,y) 落在 $y=10x+20$ 的直線上，此直線即為迴歸直線

$\Rightarrow$ 斜率為 10

(5)╳：因標準化後相關係數不變，又 $\sigma_{x'}=1$、$\sigma_{y'}=1$，

可知 y' 對 x' 的迴歸直線斜率 $m'=r \cdot \frac{1}{1}=r \ne m$

故選(1)(3)(4)。

8. (1)(2)

難易度：中

出處：第三冊第一章〈三角〉

目標：三角函數基本定義

解析：(1)○：若$\angle A=120^\circ$，$\angle B=60^\circ$，則不可能成為三角形　∴$\triangle ABC$為正三角形

(2)○：依題意，可取$\angle A=10^\circ$，$\angle B=10^\circ$，$\angle C=160^\circ$

(3)╳：若A為銳角且$\sin A>\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\angle A>60^\circ$，同理$\angle B>60^\circ$，則$\angle C<60^\circ$且$\sin C<\frac{\sqrt{3}}{2}$

(4)╳：若$\angle A=120^\circ$，$\angle B=30^\circ$，則$\triangle ABC$為鈍角三角形

(5)╳：∵A有可能為銳角或鈍角　∴$\cos(180^\circ+A)=\pm\frac{1}{2}$

故選(1)(2)。

9. (1)(2)(3)(4)

難易度：中

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：轉移矩陣

解析：轉移矩陣$P=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{4}&\frac{1}{3}\\ \frac{2}{5}&0&\frac{2}{3}\\ \frac{3}{5}&\frac{3}{4}&0\end{bmatrix}$，$X_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$，$X_2=PX_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\\ 0\end{bmatrix}$，$X_3=PX_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}\\ \frac{2}{15}\\ \frac{7}{10}\end{bmatrix}$

假設長期而言小明選購水餃、便當、湯麵的機率分別為a、b、c

令$X=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$，則$PX=X\Rightarrow\begin{bmatrix}0&\frac{1}{4}&\frac{1}{3}\\ \frac{2}{5}&0&\frac{2}{3}\\ \frac{3}{5}&\frac{3}{4}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$，$a+b+c=1$，故$(a,b,c)=\left(\frac{5}{22},\frac{4}{11},\frac{9}{22}\right)$

∴(1)○；(2)○；(3)○；(4)○；(5)╳

故選(1)(2)(3)(4)。

10. (1)(2)(3)

難易度：中

出處：第四冊第四章〈二次曲線〉

目標：橢圓和雙曲線的方程式與定義、三角形面積公式、外心

解析：(1)○：兩圖形的中心皆在原點$(0,0)$，

雙曲線Γ_1：半貫軸長$a=3$、半共軛軸長$b=\sqrt{7}\Rightarrow c=4$，開口左右

橢圓Γ_2：半長軸長$a'=5$、半短軸長$b'=3\Rightarrow c'=4$，長軸在x軸上

故Γ_1與Γ_2兩圖形共焦點

(2)○：∵$\overline{PF_1}-\overline{PF_2}=2a=6$(雙曲線定義)

$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a'=10$(橢圓定義)

∴$\overline{PF_1}^2-\overline{PF_2}^2=60$，其中$\overline{PF_1}=8$、$\overline{PF_2}=2$

(3)○：$\triangle PF_1F_2$為邊長8、8、2的三角形，

根據海龍公式：$\triangle PF_1F_2$面積$=\sqrt{9\times1\times1\times7}=3\sqrt{7}$

(4)╳：$\overline{PS}=\frac{2\triangle PF_1F_2\text{面積}}{\overline{F_1F_2}}\times2=\frac{3\sqrt{7}}{2}$

(5)╳：四邊形$PQRS$的外接圓圓心在原點，

而$\triangle PF_1F_2$三邊中垂線交點位在$\triangle PF_1F_2$的內部，故不為同一點

故選(1)(2)(3)。

11. (1)(2)(4)(5)

難易度：中

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：拉格朗日插值多項式的應用

解析：(1)○：$f(x)$ 通過 $(5,3)$，$(6,5)$，$(8,9)$，這三點恰在一直線上
可推得 $f(x)=2x-7$，因此圖形為一直線

(2)○：$f(x)=2x-7=0$ 恰一實根為 3.5

(3)╳：$Q(x)$ 通過 $(5,3)$，$(6,5)$，$(8,9)$，$(9,11)$，
可推得 $Q(x)=2x-7$，
因此 $f(x)$ 圖形和 $Q(x)$ 圖形重合

(4)○：餘式為 $f(7)=7$

(5)○：$2x-7<-1$，可得 $x<3$

故選(1)(2)(4)(5)。

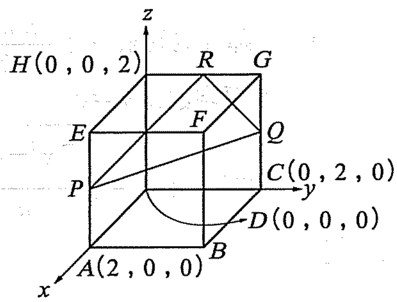
12. (3)(4)(5)

難易度：易

出處：第四冊第一章〈空間向量〉

目標：空間坐標化及其基本應用

解析：如右圖坐標化，$D(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$C(0,2,0)$，$H(0,0,2)$，
$F(2,2,2)$，$P(2,0,1)$，$Q(0,2,1)$，$R(0,1,2)$，
且 $\overrightarrow{PQ}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{PR}=(-2,1,1)$



(1)╳：$\overline{PQ}=2\sqrt{2}$

(2)╳：$\triangle PQR$ 的面積$=\dfrac{1}{2}\,|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}|=\sqrt{3}$

(3)○：$\overrightarrow{DF}=(2,2,2)\,//\,\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=(2,2,2)$

$\therefore$直線 DF 與平面 PQR 垂直

(4)○：$\overrightarrow{PQ}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{RP}=(2,-1,-1)$　$\therefore\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{RP}}{\overline{PQ}\times\overline{RP}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(5)○：PQR 平面方程式為 $x+y+z-3=0\Rightarrow d=\dfrac{|0+0+2-3|}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

故選(3)(4)(5)。

第貳部分：選填題

A. $(6,2)$

難易度：中

出處：第一冊第一章〈數與式〉

目標：評量雙重根號的化簡

解析：$\overline{CD}=\sqrt{4(2+\sqrt{3})}=\sqrt{8+2\sqrt{12}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

得 $a=6$，$b=2$，故數對 $(a,b)=(6,2)$。

B. 9

難易度：中

出處：第四冊第二章〈空間中的平面與直線〉

目標：直線方程式，空間中兩直線垂直

解析：直線 L_1：$\begin{cases}x+3y-z=3\\2x+y-z=0\end{cases}\Rightarrow x-2y=-3$，令 $y=t\Rightarrow x=-3+2t$，$z=-6+5t$，t 為實數

L_1 與 L_2 垂直　$\therefore(2,1,5)\cdot(a,4,-2)=0\Rightarrow 2a+4-10=0\Rightarrow a=3$

且 L_1 與 L_2 交於一點 $\Rightarrow\begin{cases}-3+2t=4+3s\\t=b+4s\\-6+5t=2-2s\end{cases}$，$s$ 為實數 $\Rightarrow\begin{cases}t=2\\s=-1\end{cases}\Rightarrow b=6$

$\therefore a+b=9$。

C. $\frac{205}{1024}$

難易度：易

出處：第二冊第一章〈數列與級數〉

目標：觀察規律並以等比級數求解

解析：令 S_n 為第 n 圖黑色區域的面積，則

$S_1=\frac{1}{4}$，$S_2=\frac{1}{4}-\frac{1}{16}$，$S_3=\frac{1}{4}-\frac{1}{16}+\frac{1}{64}$

可發現為首項 $\frac{1}{4}$，公比為 $-\frac{1}{4}$ 的等比級數

所以 $S_5=\dfrac{\frac{1}{4}\left[1-\left(-\frac{1}{4}\right)^5\right]}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{205}{1024}$。

D. 9

難易度：中

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：評量標準差公式運算

解析：方陣 A 的元素中有 $\frac{m(m-1)}{2}$ 個 1，m 個 0，$\frac{m(m-1)}{2}$ 個 -1，共有 m^2 個

其平均數為 $\mu=0$

標準差為 $\sigma=\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\mu^2}{n}}=\sqrt{\dfrac{m(m-1)}{m^2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\Rightarrow m=9$。

E. $\frac{49}{3}$

難易度：易

出處：第三冊第一章〈三角〉

目標：正弦定理與餘弦定理的運用

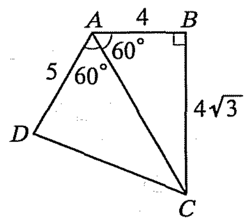
解析：直角△ABC 中，$\overline{AC}=8$，$\angle CAB=60^\circ$

△ACD 中，$\angle DAC=120^\circ-60^\circ=60^\circ$

由餘弦定理知，$\overline{CD}=\sqrt{5^2+8^2-2\cdot5\cdot8\cdot\cos60^\circ}=7$

由正弦定理知，$\frac{7}{\sin60^\circ}=2R\Rightarrow R=\frac{7}{\sqrt{3}}$

∴△ACD 的外接圓面積為 $\frac{49}{3}\pi$。



F. $(5,-1)$

難易度：中

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：向量坐標，正射影

解析：過 $(3,9)$ 且垂直於 L 的直線為 $3x-2y=-9$

A 對 L 的投影點 C：$\begin{cases}2x+3y=7\\3x-2y=-9\end{cases}\Rightarrow C(-1,3)$

若 B 對 L 的投影點 D，直線 L 的一個方向向量 $\overrightarrow{v}=(3,-2)$

$\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{v}$ 上的正射影 $=\overrightarrow{CD}=\dfrac{12\times3+5\times(-2)}{3^2+(-2)^2}(3,-2)=2(3,-2)=(6,-4)$

∵$C(-1,3)$ 且 $\overrightarrow{CD}=(6,-4)$　∴$D(5,-1)$。

G. 150

難易度：中

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：順序問題之排列方法

解析：先排○、○、○、○、衣、裙，再將 4 個○的位置安排洗臉、刷牙、吃早餐、戴隱形眼鏡四件事情，其方法共有 5 種：

牙　臉 ↑ 早餐 ↑　　或　　臉 ↑ 牙 ↑ 早餐 ↑

眼鏡

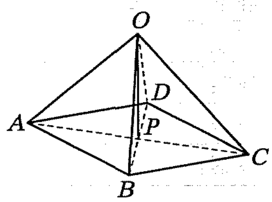
$\therefore$共 $\dfrac{6!}{4!}\times 5=150$ 種方法。

H. 2

難易度：中

出處：第四冊第一章〈空間向量〉

目標：空間概念與向量外積



解析：$\overrightarrow{AB}=(-1,4,-1)$，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{18}=\overline{OB}$

$\overrightarrow{BP}=(2,-2,-1)$，$|\overrightarrow{BP}|=3$

直角三角形 OPB 中，$\overline{PO}^2=\overline{OB}^2-\overline{BP}^2=9$

$\because \overrightarrow{PO}\,/\!/\,(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BP})\Rightarrow \overrightarrow{PO}\,/\!/\,(-6,-3,-6)\,/\!/\,(2,1,2)$

$\therefore$設頂點 $O(a,b,c)=(2t+2,t+1,2t)$，$t>0$

$\Rightarrow \overline{PO}^2=(2t)^2+t^2+(2t)^2=9\Rightarrow t=\pm 1$(負不合)$\Rightarrow t=1$

所以 $c=2t=2$。