全國公私立高級中學 104 學年度學科能力測驗第四次聯合模擬考試

數學考科解析

考試日期：104 年 12 月 16~17 日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	2	4	5	3	4	13	134	345	124	135	135	7	3	8
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
9	2	6	9	0	6	0	2	7	7	1	–	8	2	4

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. $\dfrac{9}{16+9}=\dfrac{9}{25}=0.36$，$\because \dfrac{3}{10}<0.36<\dfrac{4}{10}$

   $\therefore$由$\overline{CD}$段剪斷，才可能達成(或$\overline{FG}$亦可)

2. T 集合中之元素的算術平均數爲 $\dfrac{(-3)+1+11+15+x}{5}=\dfrac{24+x}{5}$

   ① $x=3\Rightarrow\dfrac{24+x}{5}=\dfrac{27}{5}=5.4$

   ② $x=4\Rightarrow\dfrac{24+x}{5}=\dfrac{28}{5}=5.6$

   ③ $x=5\Rightarrow\dfrac{24+x}{5}=\dfrac{29}{5}=5.8$

   ④ $x=6\Rightarrow\dfrac{24+x}{5}=\dfrac{30}{5}=6$

   ⑤ $x=7\Rightarrow\dfrac{24+x}{5}=\dfrac{31}{5}=6.2$

   ⑥ $x=8\Rightarrow\dfrac{24+x}{5}=\dfrac{32}{5}=6.4$

   $\because S\cap T=\phi$，$\therefore x$ 不可爲 7，即算術平均數不可能爲(2) 6.20

3. 前 n 分鐘內所走的距離爲 $\dfrac{60[1-(\frac{3}{4})^n]}{1-\frac{3}{4}}=240[1-(\frac{3}{4})^n]$

   考慮 $240[1-(\frac{3}{4})^n]\geq 200\Rightarrow(\frac{3}{4})^n\leq\frac{1}{6}$

   當 $n=6$ 時 $(\frac{3}{4})^6=\dfrac{729}{4096}>\dfrac{1}{6}$，當 $n=7$ 時 $(\frac{3}{4})^7=\dfrac{2187}{16384}<\dfrac{1}{6}$

   $\therefore$小李在第 7 分鐘內到達學校

4. $\begin{cases}B_2=Ax^2\cdots①\\B_3=Ax^3\cdots②\\B_5=Ax^5\cdots③\end{cases}$

   由②③得 $x^2=\dfrac{B_5}{B_3}$ 代入①

   $A=\dfrac{B_2}{x^2}=\dfrac{B_2}{\frac{B_5}{B_3}}=\dfrac{B_2\times B_3}{B_5}=\dfrac{982\times1056}{1220}\approx 850$

5. 第 n 列的數字和爲 $(1+1)^{n-1}$

   $\therefore$第十列的數字和爲 $(1+1)^9=2^9=512$

6. 假設羅馬、翡冷翠、威尼斯、米蘭、羅馬依序住宿 x、y、z、u、w 日

   依題意 $x\geq1$、$y\geq2$、$z\geq3$、$1\leq u\leq2$、$w\geq1$

   且 $x+y+z+u+w=14$

   考慮下列兩種情形

   ① $u=1$ 時，$x+y+z+w=13$

   $\Rightarrow(x-1)+(y-2)+(z-3)+(w-1)=6$

   有 $H_6^4=C_6^9=\dfrac{9!}{6!3!}=84$ (種)

   ② $u=2$ 時，$x+y+z+w=12$

   $\Rightarrow(x-1)+(y-2)+(z-3)+(w-1)=5$

   有 $H_5^4=C_5^8=\dfrac{8!}{5!3!}=56$ (種)

   由①②可得共 $84+56=140$ 種可能

二、多選題

7. (1) ○：$f(i)=i^3+ai+b=0\Rightarrow -i+ai+b=0$

   $\Rightarrow(a-1)i+b=0\Rightarrow\begin{cases}a-1=0\\b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}(a\,,b\in R)$

   (2) ×：應爲 $b=0$

   (3) ○：$f(x)=x^3+x$

   由 $f(-x)=(-x)^3+(-x)=-(x^3+x)=-f(x)$，$\therefore f(x)$ 是奇函數

   (4) ×：$f(x)=x^3+x=(x-1)(x^2+x+2)+2$

   商式爲 x^2+x+2，餘式爲 2

   (5) ×：$\begin{cases}y=f(x)=x^3+x\\y=x\end{cases}\Rightarrow x^3+x=x\Rightarrow x^3=0\Rightarrow x=0\,,0\,,0$

   $\therefore y=f(x)$ 與 $y=x$ 恰有一個交點

   故選項(1)(3)正確

8. (1) ○：$(\sqrt{2})^{-1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\log_{\sqrt{2}}1=0\Rightarrow(\sqrt{2})^{-1}>\log_{\sqrt{2}}1$

   (2) ×：$(\sqrt{2})^2=2$，$\log_{\sqrt{2}}2=\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2})^2=2\Rightarrow(\sqrt{2})^2=\log_{\sqrt{2}}2$

   (3) ○：$(\sqrt{2})^4=4$，$\log_{\sqrt{2}}4=\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2})^4=4\Rightarrow(\sqrt{2})^4=\log_{\sqrt{2}}4$

   (4) ○：$(\sqrt{2})^8=16$，$\log_{\sqrt{2}}8=\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2})^6=6\Rightarrow(\sqrt{2})^8>\log_{\sqrt{2}}8$

   (5) ×：$(\sqrt{2})^{\sqrt{8}}<(\sqrt{2})^3<(1.42)^3\fallingdotseq 2.86$

   $\log_{\sqrt{2}}\sqrt{8}=\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2})^3=3\Rightarrow(\sqrt{2})^{\sqrt{8}}<\log_{\sqrt{2}}\sqrt{8}$

   故選(1)(3)(4)

9. (1) ×：$P(X_1=1)=\dfrac{C_4^8}{C_5^9}=\dfrac{5}{9}$

   (2) ×：$P(X_5=9)=\dfrac{C_4^8}{C_5^9}=\dfrac{5}{9}$

   (3) ○：$P(X_5=9\,|\,X_1=1)=\dfrac{C_3^7}{C_4^8}=\dfrac{1}{2}$

   (4) ○：$P(X_3=5)=\dfrac{C_2^4\times C_2^{n-5}}{C_5^n}=\dfrac{6\times\frac{(n-5)!}{2!(n-7)!}}{\frac{n!}{5!(n-5)!}}$

   $=\dfrac{360(n-5)(n-6)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$

   (5) ○：$\dfrac{P_9}{P_{10}}=\dfrac{\frac{360\times4\times3}{9\times8\times7\times6\times5}}{\frac{360\times5\times4}{10\times9\times8\times7\times6}}=\dfrac{6}{5}>1\Rightarrow P_9>P_{10}$

   故選(3)(4)(5)

10. (1) ○：$A(3\,,3)$，$B(-1\,,5)$，$C(5\,,5)$

    $\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(-4\,,2)$，$\overrightarrow{AC}=(2\,,2)$

ΔABC 面積 $=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-4 & 2\\ 2 & 2\end{vmatrix}\right|=6$

(2) ○：皆在直線 $y=5$ 上

(3) ×：$A(3,2)$，$B(-1,5)$，$C(5,5)$，作圖可知 $\angle B$、$\angle C$ 必爲銳角。考慮 $\overrightarrow{AB}=(-4,3)$，$\overrightarrow{AC}=(2,3)$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=+1>0$

$\therefore \angle BAC$ 爲銳角，ΔABC 爲銳角 Δ

(4) ○：$\overrightarrow{BH}=(4,4)$，$\overrightarrow{AC}=(2,5-a)$

H 爲 ΔABC 垂心 $\Rightarrow$ $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

$\Rightarrow (4,4)\cdot(2,5-a)=0 \Rightarrow 8+4(5-a)=0 \Rightarrow a=7$

(5) ×：$\overline{AC}$ 中點 $M(4,\dfrac{a+5}{2})$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{KM}=(2,\dfrac{a-7}{2})$ 又 $\overrightarrow{AC}=(2,5-a)$

若 K 爲 ΔABC 之外心 $\Rightarrow$ $\overrightarrow{KM}\perp\overrightarrow{AC}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

$\Rightarrow (2,\dfrac{a-7}{2})\cdot(2,5-a)=0 \Rightarrow a=3$ 或 9

11. (1) ○：資料 X 的算術平均數

$\mu_X=\dfrac{1}{6}(76+82+86+80+88+92)=84$

(2) ×：資料 X 的標準差 σ_X

$=\sqrt{\dfrac{1}{6}[(76-84)^2+(82-84)^2+(86-84)^2+(80-84)^2+(88-84)^2+(92-84)^2}$

$=2\sqrt{7}>5$

(3) ○：$x_2=82$ 標準化爲 $x_2{}'=\dfrac{x_2-\mu_X}{\sigma_X}=\dfrac{82-84}{2\sqrt{7}}<0$

(4) ×：相關係數 $r(X,Z)=r(X,Y)=r$

(5) ○：$m=r\cdot\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}$，資料 Z 對於資料 X 的迴歸直線

斜率 $=r\cdot\dfrac{\sigma_Z}{\sigma_X}=r\cdot\dfrac{\frac{1}{2}\sigma_Y}{\sigma_X}=\dfrac{1}{2}m$

故選(1)(3)(5)

12. (1) ○：$\overrightarrow{AB}=(2,-1,3)$，$\overrightarrow{AC}=(t+1,4-t^2,1)$

$\because \overline{AB}\perp\overline{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \Rightarrow 2(t+1)+(-1)(4-t^2)+3=0$

$\Rightarrow t^2+2t+1=0 \Rightarrow (t+1)^2=0 \Rightarrow t=-1$

(2) ×：$\overrightarrow{AB}=(2,-1,3)$，$\overrightarrow{AC}=(0,3,1)$

外積 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{vmatrix})=(-10,-2,6)$

(3) ○：以 $(-10,-2,6)$ 爲法向量平面方程式

$(-10)(x+1)+(-2)(y-0)+6(z+1)=0$

$\Rightarrow 5x+y-3z+2=0$

(4) ×：$\overrightarrow{AO}=(1,0,1)$，$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-10,-2,6)$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{AO}\cdot(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{-4}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{140}}=\dfrac{-2}{\sqrt{70}}$

(5) ○：四面體 $OABC$ 體積

$=\dfrac{1}{6}|\overrightarrow{AO}\cdot(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})|=\dfrac{1}{6}|(1,0,1)\cdot(-10,-2,6)|$

$=\dfrac{1}{6}|-4|=\dfrac{2}{3}$

故選(1)(3)(5)

第貳部分：選填題

A. $\sqrt[3]{1536}+\dfrac{4}{3}\sqrt[6]{9}+\sqrt[3]{-\dfrac{1}{9}}=\sqrt[3]{2^9\times 3}+\dfrac{4}{3}\sqrt[6]{3^2}+\sqrt[3]{-\dfrac{3}{27}}$

$=8\sqrt[3]{3}+\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{3}-\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{3}=9\sqrt[3]{3}=3^2\times 3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{7}{3}}$

B. 依規律，分數 $\dfrac{1}{16}$ 所在位置爲 $(16,1)$

$\Rightarrow$ 分數 $\dfrac{9}{16}$ 所在位置爲 $(8,9)$

C. L_1 參數式 $\begin{cases}x=1+t\\ y=2+2t\\ z=3+at\end{cases}$，$t\in R$，$L_2$ 參數式 $\begin{cases}x=-3+3s\\ y=-1+s\\ z=-1+bs\end{cases}$，$s\in R$

L_1 與 L_2 必相交於一點

解 $\begin{cases}1+t=-3+3s\\ 2+2t=-1+s\\ 3+at=-1+bs\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}t=-1\\ s=1\\ a+b=4\end{cases}$

又 L_1 及 L_2 的方向向量分別爲 $\overrightarrow{\ell_1}=(1,2,a)$，$\overrightarrow{\ell_2}=(3,1,b)$

$L_1\perp L_2 \Rightarrow \overrightarrow{\ell_1}\perp\overrightarrow{\ell_2} \Rightarrow \overrightarrow{\ell_1}\cdot\overrightarrow{\ell_2}=0 \Rightarrow (1,2,a)\cdot(3,1,b)=0$

$\Rightarrow ab=-5$

解 $\begin{cases}a+b=4\\ ab=-5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=5\\ b=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-1\\ b=5\end{cases}$，所求 $a^2+b^2=26$

D. 內積公式 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cdot\cos 60^\circ=2\times 4\times\dfrac{1}{2}=4$

又 $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}}=\sqrt{2^2+4^2-2\times 4}=\sqrt{12}$

考慮 $\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}||\vec{a}-\vec{b}|\cdot\cos\phi$

$\Rightarrow |\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{a}-\vec{b}|\cdot\cos\phi$

$\Rightarrow 2^2-4=2\times\sqrt{12}\times\cos\phi \Rightarrow \cos\phi=0 \Rightarrow \phi=90^\circ$

E.

新＼原	甲	乙
甲	0.6	0.6
乙	0.4	0.4

$\Rightarrow$ 轉移矩陣 $A=\begin{bmatrix}0.6 & 0.6\\ 0.4 & 0.4\end{bmatrix}$

假設長期穩定狀態 $X=\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}$，其中 $a\ge 0, b\ge 0, a+b=1$

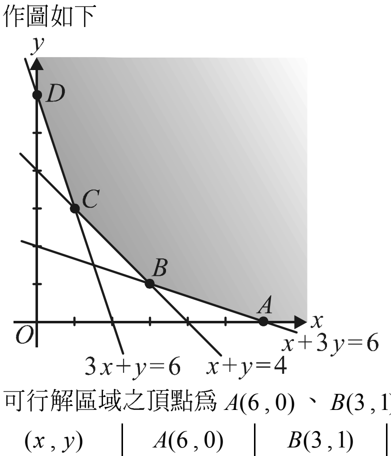
考慮 $X=AX \Rightarrow \begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.6 & 0.6\\ 0.4 & 0.4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases}a=0.6a+0.6b\\ b=0.4a+0.4b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2a=3b\\ 2a=3b\end{cases}$

解 $\begin{cases}a+b=1\\ 2a=3b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=0.6=60\%\\ b=0.4=40\%\end{cases}$

$\therefore$ 長期穩定狀態下，甲店的市場占有率爲 60%

F. 作圖如下



可行解區域之頂點爲 $A(6,0)$、$B(3,1)$、$C(1,3)$、$D(0,6)$

(x,y)	$A(6,0)$	$B(3,1)$	$C(1,3)$	$D(0,6)$
$5x+12y$	30	27	41	72

$\therefore 5x+12y$ 之最小值爲 27

G. $\overline{AC}=\sqrt{3^2+4^2}=5$，令 $\angle CAD=\alpha$ ，則 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$， $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$

$\overline{BC}=\overline{AC}\cdot\sin(60^\circ-\alpha)=5\cdot(\sin60^\circ\cos\alpha-\cos60^\circ\sin\alpha)$

$=5(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{4}{5}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{5})=2\sqrt{3}-\dfrac{3}{2}$

$\overline{AB}=\overline{AC}\cdot\cos(60^\circ-\alpha)=5(\cos60^\circ\cos\alpha+\sin60^\circ\sin\alpha)$

$=5(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{5}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{3}{5})=2+\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$

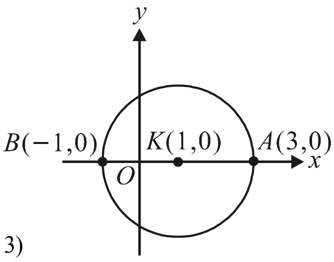
$\therefore\ \overline{BC}+\overline{AB}=(2\sqrt{3}-\dfrac{3}{2})+(2+\dfrac{3}{2}\sqrt{3})=\dfrac{7}{2}\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{7\sqrt{3}+1}{2}$

H. 圓 C 之圓心爲 $K(1,0)$

半徑爲 2

拋物線 Γ 開口向左或向右

如圖：



①若拋物線 Γ 開口向左

則以 $K(1,0)$ 爲焦點

$A(3,0)$ 爲頂點

$\Rightarrow$ 方程式 $(y-0)^2=4(-2)(x-3)$

$\Rightarrow y^2=-8x+24$

②若拋物線 Γ 開口向右

則以 $K(1,0)$ 爲焦點， $B(-1,0)$ 爲頂點

$\Rightarrow$ 方程式 $(y-0)^2=4(2)(x+1)\Rightarrow y^2=8x+8$

依題意 Γ ： $y^2=ax+b$ ，其中 $ab<0$

$\therefore\ \Gamma$ ： $y^2=-8x+24$

所求數對 $(a,b)=(-8,24)$