臺中區國立高級中學105學年度學科能力測驗第二次聯合模擬考試

數學考科解析

考試日期：105年12月20~21日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	4	1	3	25	24	13	23	1234	235	123	1	1	5	4
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27			
5	0	8	4	3	1	3	2	8	2	1	2			

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 依題意列式 $(\cos 8^\circ)^n = 0.5$，$n\cdot\log(\cos 8^\circ)=\log 0.5$

$n=\dfrac{-0.3010}{0.9956-1}\approx 68$，故選(5)

2. 由題意可知轉移矩陣爲 $\begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix}$

令 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ 爲穩定狀態的機率，其中 x 爲在 A 點的機率，y 爲在 B 點的機率，z 爲在 C 點的機率，滿足 $\begin{cases} \frac{3}{5}y+\frac{1}{2}z=x \\ \frac{3}{5}x+\frac{1}{2}z=y \\ x+y+z=1 \end{cases}$

$\therefore x=y=\dfrac{5}{14}$，$z=\dfrac{4}{14}$，故選(4)

3. 因爲 $2\log_x y-\log_y x+1=0$，又 $\log_y x=\dfrac{1}{\log_x y}$

所以 $2\log_x y-\dfrac{1}{\log_x y}+1=0 \Rightarrow 2(\log_x y)^2+\log_x y-1=0$

$\Rightarrow (2\log_x y-1)(\log_x y+1)=0 \Rightarrow \log_x y=\dfrac{1}{2},-1$，即 $y=x^{\frac{1}{2}},x^{-1}$

但 $x>1$，$y>1$，所以 $y=x^{\frac{1}{2}}$ (x^{-1} 不合)

所求 $x^2-4y^2+3=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$

當 $x=2$ 有最小值 -1，故選(1)

4. 原式 $=\sum_{k=1}^{10}[(2k-1)+k^2]=2\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}1+\sum_{k=1}^{10}k^2$

$=2\times\dfrac{10\times 11}{2}-10+\dfrac{10\times 11\times 21}{6}=485$，故選(3)

二、多選題

5. (1)(2) $\because f(x)$ 爲四次實係數多項式，且 $f(-1)=f(i-1)=0$

由虛根成對定理可知 $f(-i-1)=0$，$f(i)\neq 0$

(3) 令 $f(x)=(ax+b)(x+1)(x-i+1)(x+i+1)$

$=(ax+b)(x+1)(x^2+2x+2)$

又 $f(0)=2$，$f(1)=-10$，可得 $(a,b)=(-2,1)$

$\therefore f(x)=(-2x+1)(x+1)(x^2+2x+2)\Rightarrow f(2)=-90$

(4) $\because f(x)\leq 0$，$\therefore f(x)=(-2x+1)(x+1)(x^2+2x+2)\leq 0$

$\Rightarrow (2x-1)(x+1)\geq 0 \Rightarrow x\geq\dfrac{1}{2}$ 或 $x\leq -1$

(5) 令 $f(x)=0$ 可得 $x=\dfrac{1}{2},-1$

所以 $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸交於兩點

故選(2)(5)

6. 因爲 $f(x)=x^4-2px^3+x^2-qx-2$ 有整係數的一次因式

由牛頓一次因式檢驗法可知一次因式可能爲 $x\pm 1$，$x\pm 2$

若 $x+1$ 爲因式，則 $f(-1)=2p+q=0$ 不合 $(p,q\in N)$

若 $x-1$ 爲因式，則 $f(1)=-2p-q=0$ 不合 $(p,q\in N)$

若 $x+2$ 爲因式，則 $f(-2)=18+16p+2q=0$ 不合 $(p,q\in N)$

若 $x-2$ 爲因式，則 $f(2)=18-16p-2q=0\Rightarrow (p,q)=(1,1)$

則

(1) $p=q$

(2) $p+q=2$ 爲質數

(3) p 爲奇數

(4) $2p-q=1$

(5) $f(x)$ 除以 $x+1$ 的餘式爲 $f(-1)=3$

故選(2)(4)

7. 因爲 $S_1=a_1=3k+3$，$S_2=a_1+a_2=7k+3$

$S_3=a_1+a_2+a_3=13k+3$

所以 $a_1=3k+3$，$a_2=4k$，$a_3=6k$，又 $\langle a_n\rangle$ 爲等差數列

(1) 因爲 $a_1+a_3=9k+3=8k=2a_2\Rightarrow k=-3$

所以 $a_1=-6$，公差 $d=-6$

(2) $a_4=a_1+3d=-24$

(3) $S_5=\dfrac{5(2a_1+4d)}{2}=-90$

(4) $d=-6$

(5) $\sum_{i=1}^{10}\dfrac{(i+1)a_{i+1}-ia_i}{6}=\dfrac{1}{6}\sum_{i=1}^{10}[(i+1)a_{i+1}-ia_i]$

$=\dfrac{1}{6}[(2a_2-a_1)+(3a_3-2a_2)+\cdots+(11a_{11}-10a_{10})]=\dfrac{1}{6}(11a_{11}-a_1)$

$=\dfrac{1}{6}(-720)=-120$

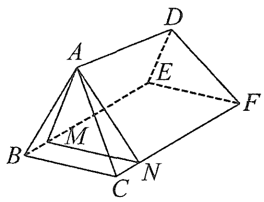
故選(1)(3)

8. (1)(2) 由 A 點對 $\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 作垂線交於 M、N

則 $\theta_1=\angle MAN$、$\theta_2=\angle AMN$

由畢氏定理可求出

$\overline{AM}=\overline{AN}=\sqrt{3}$



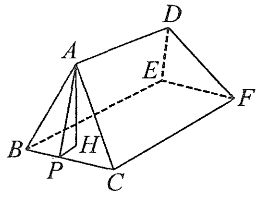
$\cos\theta_1=\dfrac{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2-2^2}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{2}$

$\therefore \theta_1>60^\circ$

$\cos\theta_2=\dfrac{2^2+(\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2}{2\cdot 2\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}>\dfrac{1}{2}$

$\therefore \theta_2<60^\circ$

(3) 如下圖



$\theta_3 = \angle APH$，$\overline{PH} = \dfrac{6-4}{2} = 1$

由畢氏定理可求出 $\overline{AP} = \sqrt{3}$

$\cos\theta_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} > \dfrac{1}{2}$，$\therefore \theta_3 < 60^\circ$

(4) ΔABF 的三邊長爲 $2, 2\sqrt{7}, 2\sqrt{10}$

先求 $\cos\angle ABF = \dfrac{2^2 + (2\sqrt{10})^2 - (2\sqrt{7})^2}{2\cdot 2\cdot 2\sqrt{10}} = \dfrac{2}{\sqrt{10}}$

則 ΔABF 的面積爲 $\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sqrt{10}\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}} = 2\sqrt{6}$

(5) 最短行進路徑必須在展開圖中走直線才行

若走的路徑是經過 $ABED$ 、 $ACFD$

則路徑長爲 $\sqrt{6^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4\sqrt{3}$

若走的路徑是經過 ABC 、 $ACFD$

則路徑長爲 $\sqrt{7^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{13}$

所以最短行進路徑長爲 $4\sqrt{3}$

故選(2)(3)

9. (1) $AB = BA = \begin{bmatrix} 28 & 18 \\ 36 & 19 \end{bmatrix}$，因此矩陣 A 、 B 符合乘法交換律

(2) 因爲矩陣 A 、 B 符合乘法交換律，所以成立

(3) $(AB)(A^{-1}B^{-1}) = (BA)(A^{-1}B^{-1}) = BIB^{-1} = I$

(4) 因爲 $\det A \neq 0$，所以 A^{-1} 存在，則 $X = A^{-1}O = O$

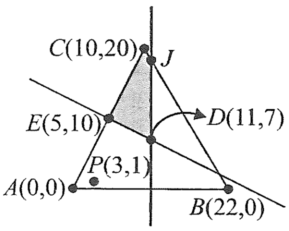
(5) $(A-C)X = O$，$A - C = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$

因爲 $\det(A-C) = 0$，所以 X 不只一解

反例可取 $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -8 \end{bmatrix}$

故選(1)(2)(3)(4)

10. 如下圖所示



(1) 在 Ω 中，x 坐標的範圍是 $5 < x < 11$

(2) Ω 的面積爲 $\Delta CED + \Delta CJD = \dfrac{259}{6}$

(3) $P(3,1)$ 到直線 $\overleftrightarrow{DE}$：$x + 2y + 25 = 0$ 的距離爲

$\dfrac{|3 + 2\cdot 1 + 25|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = 4\sqrt{5}$

(4) 各邊斜率最小爲 $-\dfrac{20}{11}$

(5) $\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的最小値爲發生在 D 點，此時 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = 8$

故選(2)(3)(5)

11. (4) 因爲 $x_i = 7 - 3y_i$，所以中位數也符合此關係式

(5) 因所有數據落在斜率爲正的直線上，所以 $r = 1$

故選(1)(2)(3)

第貳部分：選填題

A. 因爲方程式 $9^x - 4\cdot 3^x + 1 - \log_2 k = 0$ 有實根，所以 $D \geq 0$

即 $16 - 4(1 - \log_2 k) \geq 0 \Rightarrow \log_2 k \geq -3 \Rightarrow k \geq \dfrac{1}{8}$

又 k 爲正整數，則 k 最小値爲 1

B. 令 $C(2t, -t^2)$

$\Delta ABC = \left| \begin{vmatrix} 2t & -t^2 - 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \right| = |4t^2 + 2t + 4| = |4(t + \frac{1}{4})^2 + \frac{15}{4}|$

當 $t = -\dfrac{1}{4}$ 時，最小面積爲 $\dfrac{15}{4}$

C. 設 P：$\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 1 + 2t,\ t \in [0, 1] \\ z = 2 - t \end{cases}$

$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{DP}$

$= (t - 9, 2t + 1, -t + 4)\cdot(t - 5, 2t - 1, -t + 6)$

$= 6t^2 - 24t + 68 = 6(t - 2)^2 + 44$，當 $t = 1$ 時，最小値爲 50

D. 柯西不等式

$[1^2 + 1^2 + 1^2][(x-1)^2 + (2y-3)^2 + (z-5)^2] \geq (x + 2y + z - 9)^2$

題目條件符合柯西不等式的等號成立

因此 $x - 1 = 2y - 3 = z - 5$

令 $x - 1 = 2y - 3 = z - 5 = t$

$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}t \\ z = 5 + t \end{cases}$，$x^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{9}{4}t^2 + \dfrac{27}{2}t + \dfrac{113}{4} = \dfrac{9}{4}(t + 3)^2 + 8$

E. 因 $L_1 \perp L_2 \Rightarrow (a, 1, 3)\cdot(2, 1, -3) = 0 \Rightarrow a = 4$

設垂點 P 爲 $(4t + 5, t + 1, 3t + 4)$ 代入 L_2

$\dfrac{4t + 5 - b}{2} = \dfrac{t}{1} = \dfrac{3t + 6}{-3}$

由 $\dfrac{t}{1} = \dfrac{3t + 6}{-3}$，解得 $t = -1$，再代回解出 $b = 3$

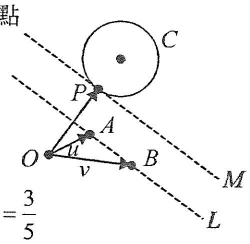
F. $P = \dfrac{\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3} + \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{3}$

G. 如右圖，所求 P 點爲 M 與圓 C 的切點

其中 $M \,//\, L$ 且 $L = \overleftrightarrow{AB}$，可求得

L：$3x + 4y - 10 = 0$

M：$3x + 4y - 20 = 0$，故 $k = 2$



H. 令 $\alpha = \angle POQ$，$\beta = \angle QOR$

利用餘弦定理知 $\cos\alpha = \dfrac{25 + 144 - 97}{2\cdot 5\cdot 12} = \dfrac{3}{5}$

並有 $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$，$\cos\beta = \dfrac{12}{13}$，$\sin\beta = \dfrac{5}{13}$

由 $\cos(\alpha - \beta) = \dfrac{12}{13}\cdot\dfrac{3}{5} + \dfrac{5}{13}\cdot\dfrac{4}{5} = \dfrac{56}{65}$

得 $\overline{PR}^2 = 25 + 169 - 2\cdot 5\cdot 13\cdot\cos(\alpha - \beta) = 82$，$\overline{PR} = \sqrt{82}$

I. 令第 k 秒的 x 坐標爲 x_k，第 1 秒時，$\overline{OP}$ 與 x 軸的夾角爲

α，有 $\mu = \dfrac{1}{36}\cdot\sum_{k=1}^{36} x_k = \dfrac{1}{36}\sum_{k=1}^{36}(\cos(\alpha + k\cdot 10^\circ))$

$= \dfrac{1}{36}\sum_{k=1}^{18}(\cos(\alpha + k\cdot 10^\circ) + \cos(180^\circ + \alpha + k\cdot 10^\circ))$

$= \dfrac{1}{36}\sum_{k=1}^{18}(\cos(\alpha + k\cdot 10^\circ) - \cos(\alpha + k\cdot 10^\circ)) = 0$

以及 $\sum_{k=1}^{36} {x_k}^2 = \sum_{k=1}^{36}(\cos(\alpha + k\cdot 10^\circ))^2 = 2\cdot\sum_{k=1}^{18}(\cos(\alpha + k\cdot 10^\circ))^2$

$= 2\cdot\sum_{k=1}^{9}[(\cos(\alpha + k\cdot 10^\circ))^2 + (\cos(90^\circ + \alpha + k\cdot 10^\circ))^2]$

$= 2\cdot\sum_{k=1}^{9}[(\cos(\alpha + k\cdot 10^\circ))^2 + (\sin(\alpha + k\cdot 10^\circ))^2] = 18$

因此 $\sigma^2 = \dfrac{1}{36}\cdot\sum_{k=1}^{36} {x_k}^2 - \mu^2 = \dfrac{1}{2}$