全國公私立高級中學 105 學年度學科能力測驗第四次聯合模擬考試

數學考科解析

考試日期：105 年 12 月 14~15 日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
2	1	3	2	5	4	35	2345	245	125	13	135	124	1	6	1	3
18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32		
5	4	2	4	7	5	5	1	−	2	2	1	3	3	5		

第壹部分：選擇題

一、單選題

1.

(x, y)	$(0, 0)$	$(3, 0)$	$(2, 3)$	$(0, 2)$
$P(x, y) = kx - 3y$	0	$3k$	$2k-9$	-6

$\because B$ 為最小值，$\therefore \begin{cases} 2k-9 \le 0 \\ 2k-9 \le 3k \\ 2k-9 \le -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \le \frac{9}{2} \\ k \ge -9 \\ k \le \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow -9 \le k \le \frac{3}{2}$

故選(2)

2. $(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 19^3) - (2^3 + 4^3 + \cdots + 18^3)$

$= (1^3 + 2^3 + \cdots + 19^3) - 2^3(1^3 + 2^3 + \cdots + 9^3)$

$= (\frac{19 \times 20}{2})^2 - 8 \times (\frac{9 \times 10}{2})^2 = 19900$，故選(1)

3. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 7 & -9 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 9 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$

故選(3)

4. A 和 C 的 x 差為 6，$\therefore$邊長為 6

A 在拋物線上 $\Rightarrow A(4, \frac{16}{a})$，$C$ 在拋物線上 $\Rightarrow C(-2, \frac{4}{a})$

A 和 C 的 y 差為 $\frac{16}{a} - \frac{4}{a} = 6 \Rightarrow a = 2$，故選(2)

5. 因 $(1+x)^n = C_0^n + C_1^n x + C_2^n x^2 + \cdots + C_n^n x^n$

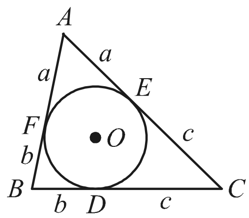
$\therefore$ 原式 $= (1 + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}})^n = [1 + (\sqrt{3} - 1)]^n = \sqrt{3}^n$

又 $\sqrt{3}^n > 10^{10} \Rightarrow 3^{\frac{n}{2}} > 10^{10} \Rightarrow \frac{n}{2}\log 3 > 10 \log 10$

$\Rightarrow \frac{n}{2} \times 0.4771 > 10 \Rightarrow n > 41.\cdots$，故選(5)

6. $\because$內切，$\therefore \overline{AF} = \overline{AE} = a$、$\overline{BF} = \overline{BD} = b$、$\overline{CD} = \overline{CE} = c$

$\begin{cases} a + b = 5 \\ b + c = 6 \\ a + c = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \\ c = 4 \end{cases}$



利用分點公式 $\overrightarrow{AD} = \frac{4}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{6}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$\therefore m = \frac{2}{3}$，$n = \frac{1}{3}$，故 $3m + 6n = 3 \times \frac{2}{3} + 6 \times \frac{1}{3} = 4$，故選(4)

二、多選題

7. (1) ×：$\frac{2}{\frac{1}{2}} \neq \frac{3}{\frac{1}{3}} \Rightarrow$ 有解

(2) ×：$\frac{3}{4} \neq \frac{4}{3} \Rightarrow$ 有解

(3) ○：$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \cdots ① \\ 8x + y - 2z = -3 \cdots ② \\ 6x - 3y - 4z = 5 \cdots ③ \end{cases}$

$\begin{matrix} 2 \times ① + ② & 10x + 5y = 5 \\ 4 \times ① + ③ & 10x + 5y = 21 \end{matrix} \Rightarrow$ 無解

(4) ×：$\begin{cases} x - 3y - 2z = 0 \cdots ① \\ 2x + y + 2z = 1 \cdots ② \\ 4x + y + 3z = 3 \cdots ③ \end{cases}$

$\begin{matrix} ① + ② & 3x - 2y = 1 \\ ① \times 3 + ③ \times 2 & 11x - 7y = 6 \end{matrix} \Rightarrow x = 5$，$y = 7 \Rightarrow z = -8 \Rightarrow$ 有解

(5) ○：$\begin{cases} x = -4 + 2t \\ y = -2t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$ 與 $\begin{cases} x = 5 - 2s \\ y = -s \\ z = -1 + 6s \end{cases}$

$\begin{cases} -4 + 2t = 5 - 2s \\ -2t = -s \end{cases} \Rightarrow t = \frac{3}{2}$，$s = 3$ 代入 z 不相等 $\Rightarrow$ 無解

故選(3)(5)

8. $H(x) = f(x) \cdot g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ 或 $g(x) = 0$

(1) ×：$f(0) \cdot f(1) > 0$ 且 $g(0) \cdot g(1) > 0 \Rightarrow$ 不一定有實根

(2) ○：$f(1) \cdot f(2) < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ 有實根

(3) ○：$f(2) \cdot f(3) < 0$ 且 $g(2) \cdot g(3) < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ 與 $g(x) = 0$ 皆有實根

(4) ○：$g(3) \cdot g(4) < 0 \Rightarrow g(x) = 0$ 有實根

(5) ○：$f(4) \cdot f(5) < 0$ 且 $g(4) \cdot g(5) < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ 與 $g(x) = 0$ 皆有實根

故選(2)(3)(4)(5)

9. (1) ×：當 $a = b = 1 \Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 0 \Rightarrow$ 一點 $(1, -2)$

(2) ○：當 $a = b = -1 \Rightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 10 \Rightarrow$ 圓

(3) ×：當 $a = 1$ 且 $b = 2 \Rightarrow (x-1)^2 + 2(y+1)^2 = -2 \Rightarrow$ 無圖形

(4) ○：當 $a = \frac{1}{2}$ 且 $b = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{1}{4}(y+8)^2 = 13$

$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{26} + \frac{(y+8)^2}{52} = 1 \Rightarrow$ 橢圓

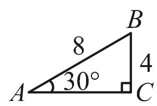
(5) ○：當 $a = 1$ 且 $b = -2 \Rightarrow (x-1)^2 - 2(y-1)^2 = -6$

$\Rightarrow -\frac{(x-1)^2}{6} + \frac{(y-1)^2}{3} = 1 \Rightarrow$ 雙曲線

故選(2)(4)(5)

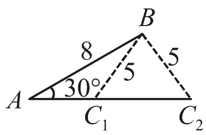
10. (1) ○：$\Delta ABC = \frac{1}{2} \times 8 \times 4 \times \sin 30° = 8$

(2) ○：



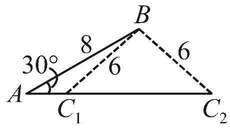
$\Rightarrow \Delta ABC = \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$

(3) ×：

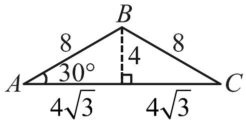


$\Rightarrow$ 兩解

(4) ×：



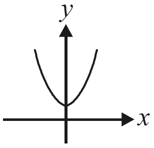
$\Rightarrow$ 兩解

(5) ○： 

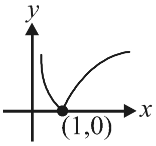
$\Rightarrow \Delta ABC=\frac{1}{2}\times 8\sqrt{3}\times 4=16\sqrt{3}$

故選(1)(2)(5)

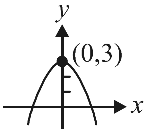
11. (1) ○：



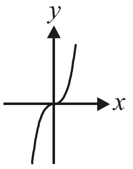
(2) ×：



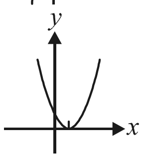
(3) ○：



(4) ×：



(5) ×：



故選(1)(3)

12. (1) ○、(2) ×：$x'=2x$，$y'=y$，$\therefore r_1=r_2$

(3) ○：$\because \sigma_x=\sigma_{x''}$ 且 $\sigma_y=\sigma_{y''}$ 又 $\Sigma(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)$

$=-\Sigma(x_i''-\mu_{x''})(y_i''-\mu_{y''})$，$\therefore r_3=-r_1$

(4) ×：$m_1=r_1\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$，$m_2=r_2\dfrac{\sigma_{y'}}{\sigma_{x'}}$

$\because r_1=r_2$，$\sigma_y=\sigma_{y'}$，$\sigma_{x'}=2\sigma_x$，$\therefore m_1=2m_2$

(5) ○：$m_1=r_1\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$，$m_3=r_3\dfrac{\sigma_{y''}}{\sigma_{x''}}$

$\because r_3=-r_1$，$\sigma_y=\sigma_{y''}$，$\sigma_x=\sigma_{x''}$，$\therefore m_3=-m_1$

故選(1)(3)(5)

13. 已知 $f(x)=(x^3-1)q_1(x)+(x^2+1)\Rightarrow f(1)=2$

$f(x)=(x^3+1)q_2(x)+(x^2-1)\Rightarrow f(-1)=0$

(1) ○：所求為 $f(1)=2$

(2) ○：$\because f(-1)=0$

(3) ×：設 $f(x)=(x^2-1)q(x)+(ax+b)$

$f(1)=a+b=2$，$f(-1)=-a+b=0$

$\therefore a=1$，$b=1$，∴餘式為 $x+1$

(4) ○：$f(x)=(x^3-1)q_1(x)+(x^2+1)$，$\because (x^3-1)$ 為 x^2+x+1 之倍式，∴餘式只看 $(x^2+1)\div(x^2+x+1)$ 之餘式為 $-x$

(5) ×：$f(x)=(x^3+1)q_2(x)+(x^2-1)$，$\because (x^3+1)$ 為 x^2-x+1 之倍式，∴餘式只看 $(x^2-1)\div(x^2-x+1)$ 之餘式為 $x-2$

故選(1)(2)(4)

第貳部分：選填題

A. $\because f(a)=\frac{1}{2}\Rightarrow \log_\pi a=\frac{1}{2}$，$\because f(b)=\frac{1}{3}\Rightarrow \log_\pi b=\frac{1}{3}$

又知 $b^2=ac$ 得 $\log_\pi b^2=\log_\pi ac\Rightarrow 2\log_\pi b=\log_\pi a+\log_\pi c$

$\Rightarrow 2\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}+\log_\pi c\Rightarrow \log_\pi c=\frac{1}{6}$

B. $ax^2-bx+c=0$ 有實數解 $\Rightarrow D\ge 0\Rightarrow b^2-4ac\ge 0\Rightarrow b^2\ge 4ac$

$b=2$ 時 $4\ge 4ac\Rightarrow 1\ge ac\Rightarrow a=1$，$c=1$，共 1 組

$b=4$ 時 $16\ge 4ac\Rightarrow 4\ge ac\Rightarrow$

a	1	2	3	4
c	1~4	1~2	1	1

共 8 組

$b=6$ 時 $36\ge 4ac\Rightarrow 9\ge ac\Rightarrow$

a	1	2	3	4	5	6
c	1~6	1~4	1~3	1~2	1	1

共 17 組

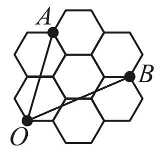
∴機率為 $\dfrac{1+8+17}{6\times 3\times 6}=\dfrac{26}{108}=\dfrac{13}{54}$

C. 利用坐標化，令正六邊形邊長為 2

則 $O(0,0)$、$A(2,4\sqrt{3})$、$B(8,2\sqrt{3})$

$\therefore \overrightarrow{OA}=(2,4\sqrt{3})$，$\overrightarrow{OB}=(8,2\sqrt{3})$

$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\dfrac{16+24}{\sqrt{52}\times\sqrt{76}}=\dfrac{10}{\sqrt{247}}$



D. $C_4^5\times(C_2^4+C_3^4+C_4^4)=5\times(6+4+1)=55$

E. [方法一]

$f(5)=pf(1)+qf(2)+rf(4)$

$\Rightarrow 25a+5b+c=p(a+b+c)+q(4a+2b+c)+r(16a+4b+c)$

$=(p+4q+16r)a+(p+2q+4r)b+(p+q+r)c$

$\therefore\begin{cases}p+4q+16r=25\\p+2q+4r=5\\p+q+r=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=1\\q=-2\\r=2\end{cases}$

[方法二]

$f(x)=f(1)\dfrac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)}+f(2)\dfrac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)}+f(4)\dfrac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)}$

$\Rightarrow f(5)=1\cdot f(1)+(-2)\cdot f(2)+2\cdot f(4)$

F. 設直線 L 與 x 軸夾角為 α

則斜率為 $\tan\alpha$

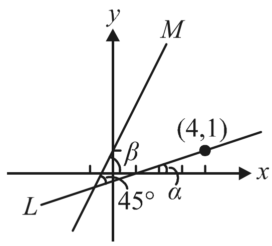
設直線 M 與 x 軸夾角為 β

則斜率為 $\tan\beta=2$

$\because \alpha=\beta-45°$

$\therefore \tan\alpha=\tan(\beta-45°)$

$=\dfrac{\tan\beta-\tan 45°}{1+\tan\beta\tan 45°}=\dfrac{1}{3}$



$\therefore L：y-1=\frac{1}{3}(x-4)\Rightarrow x-3y=1$

G. 圓心為 $C(-4,6)$，$r=\sqrt{5}$

求 $\sqrt{(x-2t-2)^2+(y-t+1)^2}$ 的最小值

視為 $P(x,y)$，$Q(2t+2,t-1)$，求 $\overline{PQ}$ 最小值

P 為圓上動點，Q 為 $L：x-2y=4$ 的動點

∴最小值為 $d(C,L)-r=\dfrac{|-4-12-4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}-\sqrt{5}=3\sqrt{5}$