

全國公私立高級中學

110 學年度學科能力測驗第三次聯合模擬考試

考試日期：110 年 11 月 3~4 日

數學 A 考科

— 作答注意事項 —

考試時間：100 分鐘

作答方式：

- 選擇(填)題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正液(帶)。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響成績並損及權益。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若答案格式是 $\frac{\textcircled{18-1}}{\textcircled{18-2}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生必須分別在答題卷上的第

18-1 列的 \square^3 與第 18-2 列的 \square^8 劃記，如：

18-1	\square^1	\square^2	\square^3	\square^4	\square^5	\square^6	\square^7	\square^8	\square^9	\square^0	\square^-	\square^\pm
18-2	\square^1	\square^2	\square^3	\square^4	\square^5	\square^6	\square^7	\square^8	\square^9	\square^0	\square^-	\square^\pm

例：若答案格式是 $\frac{\textcircled{19-1}\textcircled{19-2}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答題卷的第 19-1 列的 \square

與第 19-2 列的 \square^7 劃記，如：

19-1	\square^1	\square^2	\square^3	\square^4	\square^5	\square^6	\square^7	\square^8	\square^9	\square^0	\square^-	\square^\pm
19-2	\square^1	\square^2	\square^3	\square^4	\square^5	\square^6	\square^7	\square^8	\square^9	\square^0	\square^-	\square^\pm

選擇(填)題計分方式：

- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
 - 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\frac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
 - 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。
- ※ 試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

第壹部分、選擇（填）題（占 85 分）

一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題 5 分。

1. 請問滿足絕對值不等式 $|2x-3| \leq |x|$ 的實數 x 所形成的區間，其長度為下列哪一個選項？
- (1) 1 (2) 2
(3) 3 (4) 4
(5) 5
2. 聲音的強度是用每平方公尺多少瓦特 (W/m^2) 來衡量，一般人能感覺出聲音的最小強度為 $I_0 = 10^{-12}$ (W/m^2)；當測得的聲音強度為 I (W/m^2) 時，所產生的聲音分貝數 d ，其中 $d = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$ 。一般人高聲說話所產生的分貝數為 65，樹葉沙沙聲所產生的分貝數為 20，若一般人高聲說話所產生的強度為樹葉沙沙聲所產生強度的 m 倍，則 m 值最接近下列哪一個數值？
- (1) 10000 (2) 20000
(3) 30000 (4) 40000
(5) 50000
3. 已知 $\triangle ABC$ 的三邊長為 3, 5, 7，則該三角形的外接圓半徑為下列哪一個數？
- (1) $\frac{5\sqrt{7}}{6}$ (2) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$
(3) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ (4) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
(5) $\frac{7\sqrt{3}}{3}$

4. 某公司為激勵創新，計劃逐年加大研發資金投入。若該公司民國 110 年全年投入研發資金 500 萬元，在此基礎上，每年投入的研發資金比上一年增長 12%，則該公司全年投入的研發資金開始超過 8000 萬元的年份是民國幾年？（ $\log 1.12 \approx 0.0492$ ， $\log 2 \approx 0.3010$ ）
- (1) 126 (2) 129
(3) 132 (4) 135
(5) 138
5. 將函數 $y = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 圖形上的點 $P(\frac{\pi}{4}, t)$ 向左平移 $s (s > 0)$ 個單位長，得到點 Q ，若 Q 點在函數 $y = \sin 2x$ 的圖形上，則下列哪一個選項是正確的？
- (1) $t = \frac{1}{2}$ ， s 的最小值為 $\frac{\pi}{6}$
(2) $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， s 的最小值為 $\frac{\pi}{6}$
(3) $t = \frac{1}{2}$ ， s 的最小值為 $\frac{5\pi}{6}$
(4) $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， s 的最小值為 $\frac{5\pi}{6}$
(5) $t = \frac{1}{2}$ ， s 的最小值為 $\frac{\pi}{3}$
6. 從 1 到 500 的正整數中挑選 4 個相異的數字，使這 4 個數由小到大排列後形成一個等差數列，已知此等差數列的首項為 32，則下列哪一個數 不可能 出現在所挑選的 4 個數中？
- (1) 91 (2) 190
(3) 348 (4) 491
(5) 500

二、多選題 (占 30 分)

說明：第 7 題至第 12 題，每題 5 分。

7. 直角坐標平面上，直線 L 方程式為 $y = m(x - 1) + 3$ ，其中 m 為實數，圓 C 方程式為 $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 1$ ，圓心為 O 點，試選出正確的選項。
- (1) 當 $m = 0$ 時，直線 L 和圓 C 交一點
 - (2) 當 $m = \frac{1}{3}$ 時，直線 L 和圓 C 交二點
 - (3) 當 $m = 1$ 時，直線 L 和圓 C 交二點
 - (4) 當 $m = \frac{4}{3}$ 時，直線 L 和圓 C 交二點
 - (5) 若直線 L 與圓 C 相交 A, B 兩點時，當 $m = \frac{1}{2}$ 時， \overline{AB} 長度最大
8. 已知三次實係數多項式函數 $f(x) = 3x^3 - 9x^2 + ax + b$ 的圖形通過 $(0, 2), (2, 16)$ 兩點，試選出正確的選項。
- (1) 數對 $(a, b) = (13, 2)$
 - (2) 若 $f(x) = 3(x - 1)^3 + c(x - 1) + d$ ，則 $c + d = 14$
 - (3) 對稱中心點為 $(1, 9)$
 - (4) $f(2021) > f(2020)$
 - (5) $f(x)$ 的圖形平移後可與 $y = g(x) = 3x^3 + 5x + 9$ 的圖形重合
9. 設 $\langle a_n \rangle$ 為等差數列， $\langle b_n \rangle$ 為等比數列， $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ，且 $a_1 = b_1 = 1$ ， $a_3 + a_5 = b_3$ ， $b_2 b_4 = a_4$ 。試問下列選項哪些是正確的？
- (1) 滿足題意的數列 $\langle a_n \rangle$ 有兩種可能
 - (2) 滿足題意的數列 $\langle b_n \rangle$ 有兩種可能
 - (3) $|a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}| < 2$
 - (4) $(b_1)^2 + (b_2)^2 + \cdots + (b_{10})^2 < 2$
 - (5) 設 S_n 的最大值為 S_k ，則 $k = 4$

10. 有 30 筆數據 (x_i, y_i) , $i=1, 2, \dots, 30$, 其中平均數 $\mu_x=60$, $\mu_y=70$, x 與 y 的相關係數為 0.8, 且 y 對 x 的迴歸直線方程式通過點 $(20, 40)$, 試問下列敘述哪些是正確的。
- (1) y 對 x 的迴歸直線斜率為 0.75
 - (2) x 的標準差小於 y 的標準差
 - (3) y 對 x 的迴歸直線通過另一點 $(76, 84)$
 - (4) 若 $x'_i=3x_i+2$, $y'_i=-2y_i+10$, 則 x' 與 y' 的相關係數為 -0.8
 - (5) 承(4), y' 對 x' 的迴歸直線斜率為負數
11. 在平面直角坐標系中, 若 $A(1, 0)$, $B(-1, 0)$, 則下列哪些函數的圖形上可以找到 P 點, 使得 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$ 。
- (1) $y=x^2$
 - (2) $y=-x^2+2$
 - (3) $2x+4y=5$
 - (4) $x^2+(y-2)^2=1$
 - (5) $y=2^x$
12. 設 \vec{a}, \vec{b} 為平面上的二個非零向量, 定義一個新的運算為: $\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$, 試選出正確的選項。
- (1) $\vec{a}=(99, 100)$, $\vec{b}=(98, 99)$, 則 $\vec{a} * \vec{b} = 1$
 - (2) 對所有的 \vec{a}, \vec{b} , $\vec{a} * \vec{b} \geq 1$
 - (3) 若 $\vec{a} // \vec{b}$, 則 $\vec{a} * \vec{b} = 0$
 - (4) 若 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, 則 $\vec{a} * \vec{b}$ 的最大值為 12
 - (5) $(2\vec{a}) * (3\vec{b}) = 6(\vec{a} * \vec{b})$

三、選填題 (占 25 分)

說明：第 13 題至 17 題，每題 5 分。

13. 有一數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足遞迴關係式 $\begin{cases} a_1 = 3, a_2 = \frac{7}{4} \\ a_n + \alpha = \frac{1}{2}(a_{n-1} + \alpha), n \geq 2 \end{cases}$ ，其中 α 是常數，則

$a_4 = \frac{\textcircled{13-1} \textcircled{13-2}}{\textcircled{13-3} \textcircled{13-4}}$ 。(化為最簡分數)

14. 設直線 $y = x + 2a$ 與圓 $C: x^2 + y^2 - 2ay - 2 = 0$ 相交於 A, B 兩點，若 $\overline{AB} = 2\sqrt{3}$ ，則圓 C 的半徑為 $\textcircled{14-1}$ 。

15. 全台因為缺水問題需要停水，以下為 15 天內的停水計劃，如表(1)，月曆上 1 至 15 天，要規劃其中 3 天停水，為了民眾生活的便利性，停水的 3 天皆要不相鄰，且第 1 天，第 8 天，第 15 天也不能停水，例如：可停 2, 4, 6 或者 3, 7, 9... 等等。

試問有 $\textcircled{15-1}$ $\textcircled{15-2}$ $\textcircled{15-3}$ 種停水方式。

表(1)

月曆	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
停水	X							X							X

16. 有一百貨公司舉辦週年慶滿額抽獎活動，遊戲規則如下：參加者自箱中一次抽出兩球，確定顏色後放回。其顏色組合及可得金額如下表(2)所列：

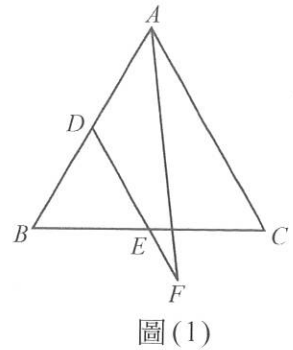
表(2)

顏色組合	二球皆為藍色	二球皆為紅色	一球為藍色， 一球為紅色	其它顏色組合
可獲折價券金額	1800 (元)	1200 (元)	600 (元)	0 (元)

已知箱中置有 2 顆藍色球及 3 顆紅色球。在抽出任一球之機率相等的條件下，主辦單位希望參加者所得折價券金額的期望值為 200 元，則主辦單位應於箱內再放入 $\textcircled{16-1}$ 顆其他顏色的球。

17. 如圖(1)， $\triangle ABC$ 是邊長為 1 的正三角形，點 D, E 分別為 $\overline{AB}, \overline{BC}$ 的中點， F 點在 DE 直線上，且 $\overline{DE} = 2\overline{EF}$ ，

試求 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{\textcircled{17-1}}{\textcircled{17-2}}$ 。(化為最簡分數)



第貳部分、混合題或非選擇題(占 15 分)

說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

18-20 題為題組

在 $\triangle ABC$ 中， $\sin^2 A + \sin^2 C = \sin^2 B + \sqrt{2} \sin A \sin C$ ，試回答下列問題：

18. $\angle B$ 的大小為多少弧度？(單選題，5 分)

(1) $\frac{\pi}{6}$

(2) $\frac{\pi}{4}$

(3) $\frac{\pi}{3}$

(4) $\frac{3\pi}{4}$

(5) $\frac{5\pi}{6}$

19. 試求 $\sqrt{2} \cos A + \cos C$ 的最大值。(非選擇題，6 分)

20. 承(19)，當 $\sqrt{2} \cos A + \cos C$ 有最大值時， $\angle C = ?$ (非選擇題，4 分)

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項的和為 $S = \frac{n[2a + (n-1)d]}{2}$ 。

首項為 $a(a \neq 0)$ ，公比為 $r(r \neq 1)$ 的等比數列前 n 項的和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ 。

2. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ （ R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑）。

$\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ 。

3. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，

算術平均數 $\mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ 。

標準差 $\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1 - \mu_X)^2 + (x_2 - \mu_X)^2 + \dots + (x_n - \mu_X)^2]} = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - n\mu_X^2]}$ 。

4. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，

相關係數 $r_{X,Y} = \frac{(x_1 - \mu_X)(y_1 - \mu_Y) + (x_2 - \mu_X)(y_2 - \mu_Y) + \dots + (x_n - \mu_X)(y_n - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$ 。

迴歸直線（最適合直線）方程式 $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$ 。

5. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$ 。

6. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ， $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ ， $\log_{10} 7 \approx 0.8451$ 。
 $10^{0.3010} \approx 2$ ， $10^{0.4771} \approx 3$ ， $10^{0.6990} \approx 5$ ， $10^{0.8451} \approx 7$ 。