全國公私立高級中學110學年度學科能力測驗第三次聯合模擬考試

數學A考科解析

考試日期：110年11月3~4日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13-1	13-2	13-3
2	3	5	4	1	3	1235	134	234	145	145	13	1	3	1
13-4	14-1	15-1	15-2	15-3	16-1	17-1	17-2	18	19	20				
6	2	1	2	8	5	1	8	2						

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. 分段討論，

① $x \ge \frac{3}{2}$：$2x-3 \le x \Rightarrow x \le 3 \Rightarrow \frac{3}{2} \le x \le 3$。

② $0 \le x < \frac{3}{2}$：$-2x+3 \le x \Rightarrow x \ge 1 \Rightarrow 1 \le x < \frac{3}{2}$。

③ $x<0$：$-2x+3 \le -x \Rightarrow x \ge 3 \Rightarrow$ 無解。

由①②③可知 $\Rightarrow 1 \le x \le 3$，長度為 2，

故選(2)。

2. 設一般人高聲說話所產生的強度為 I_1，

樹葉沙沙聲所產生的強度為 I_2，所求 $m=\frac{I_1}{I_2}$。

又根據題意可得 $\Rightarrow \begin{cases} 65=10\cdot\log\frac{I_1}{I_0} \\ 20=10\cdot\log\frac{I_2}{I_0} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 65=10(\log I_1-\log I_0)\cdots① \\ 20=10(\log I_2-\log I_0)\cdots② \end{cases}$

①－②可得 $45=10(\log I_1-\log I_2) \Rightarrow 4.5=\log\frac{I_1}{I_2}$

$\Rightarrow \frac{I_1}{I_2}=10^{4.5}=10^{0.5}\times10^4$，又 $10^{0.5}=10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}\approx3.16$

$\Rightarrow \frac{I_1}{I_2}\approx3.16\times10^4$，所以 m 最接近 30000，

故選(3)。

3. $\triangle ABC$ 面積 $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{abc}{4R}$，

其中 $s=\frac{a+b+c}{2}$，$R=\triangle$外接圓半徑

$\Rightarrow \sqrt{\frac{15}{2}(\frac{15}{2}-3)(\frac{15}{2}-5)(\frac{15}{2}-7)}=\frac{3\times5\times7}{4R}$

$\Rightarrow \frac{15\sqrt{3}}{4}=\frac{105}{4R} \Rightarrow R=\frac{7\sqrt{3}}{3}$。

故選(5)。

4. 由題意可知 n 年後投入的研發資金為 $500(1+12\%)^n$ 萬元，

所以 $500(1+12\%)^n \ge 8000 \Rightarrow (1.12)^n \ge 16$

$\Rightarrow n\times\log1.12 \ge \log16$

$\Rightarrow n \ge \frac{4\times\log2}{\log1.12}=\frac{4\times0.3010}{0.0492}\approx24.47$

$\Rightarrow n$ 的最小值為 25，

即民國 $110+25=135$ 年時，始達到所求。

故選(4)。

5. ① $P(\frac{\pi}{4},t)$ 代入 $y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$

$\Rightarrow t=\sin(2\times\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3})=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$。

② Γ_1：$y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})=\sin2(x-\frac{\pi}{6})$，

將 Γ_1 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 單位，即得函數 Γ_2：$y=\sin2x$，

所以 $s=\frac{\pi}{6}+2k\pi$，$k\ge0$，$k\in\mathbb{Z}$，

故 s 的最小值為 $\frac{\pi}{6}$。

故選(1)。

6. 設 4 數為 32, $32+d$, $32+2d$, $32+3d$

$\Rightarrow 35 \le 32+3d \le 500$

$\Rightarrow 1 \le d \le 156$，$d\in\mathbb{N}$

(1) 令 $91=32+d \Rightarrow d=59$（合）。

(2) 令 $190=32+2d \Rightarrow d=79$（合）。

(3) ① $348=32+d \Rightarrow d=316$（不合），

② $348=32+2d \Rightarrow d=158$（不合），

③ $348=32+3d \Rightarrow d=\frac{316}{3}$（不合），

故 348 不可能在此 4 個數中。

(4) 令 $491=32+3d \Rightarrow d=153$（合）。

(5) 令 $500=32+3d \Rightarrow d=156$（合）。

故選(3)。

二、多選題

7. (1) ○ (2) ○ (3) ○ (4) ×：

① 令圓心 $O(3,4)$ 到直線 L：$y=m(x-1)+3$ 的距離為 d，所以 $\frac{|3m-4-m+3|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|2m-1|}{\sqrt{m^2+1}}$。

② 若直線 L 和圓 C 相交二點，即 $d<r$

$\Rightarrow \frac{|2m-1|}{\sqrt{m^2+1}}<1 \Rightarrow |2m-1|<\sqrt{m^2+1}$

$\Rightarrow 4m^2-4m+1<m^2+1 \Rightarrow 3m^2-4m<0$

$\Rightarrow 0<m<\frac{4}{3}$。

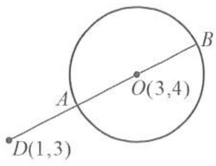
③ 又 $m=0$ 與 $m=\frac{4}{3}$ 時，直線 L 與圓 C 相切，即交一點。

(5) ○：$\overline{AB}$ 要最大，即 $\overline{AB}$ 為直徑，

即直線 L 要通過圓心 $O(3,4)$，

又直線 L 通過點 $P(1,3)$，

如右圖所示，



此時 $m=\frac{4-3}{3-1}=\frac{1}{2}$。

故選(1)(2)(3)(5)。

8. (1) ○：$f(x)=3x^3-9x^2+ax+b$ 通過 $(0,2)$ 及 $(2,16)$

$\Rightarrow \begin{cases} 2=b \\ 16=24-36+2a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=2 \\ a=13 \end{cases}$，

所以數對 $(a,b)=(13,2)$。

(2) ×：$f(x)=3x^3-9x^2+13x+2$

$=3(x^3-3x^2+3x-1)+4x+5$

$=3(x-1)^3+4(x-1)+9$，

所以 $c=4$，$d=9 \Rightarrow c+d=13$。

(3) ○：由(2)可知對稱中心為$(1,9)$。

(4) ○：① $f(2021)=3\times2020^3+4\times2020+9$，
② $f(2020)=3\times2019^3+4\times2019+9$，
即$f(2021)>f(2020)$。

(5) ×：由(2)可知，$f(x)=3(x-1)^3+4(x-1)+9$
平移後和$g(x)=3x^3+5x+9$不會重合。

故選(1)(3)(4)。

9. 設$<a_n>$的公差為d，$<b_n>$的公比為r

$a_3+a_5=b_3\Rightarrow(1+2d)+(1+4d)=r^2\Rightarrow2+6d=r^2$……①

$b_2b_4=a_4\Rightarrow r\times r^3=1+3d\Rightarrow1+3d=r^4$ ……………………②

由①②$\Rightarrow2r^4=r^2\Rightarrow r^2=\dfrac{1}{2}$代回①$\Rightarrow d=-\dfrac{1}{4}$。

(1) ×：數列$<a_n>$的$a_1=1$，$d=-\dfrac{1}{4}$，
所以數列$<a_n>$只有一種可能。

(2) ○：數列$<b_n>$的$b_1=1$，$r=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，
所以數列$<b_n>$有二種可能。

(3) ○：$|a_1+a_2+\cdots+a_{10}|=\left|\dfrac{10[2\times1+9\times(-\frac{1}{4})]}{2}\right|=\dfrac{5}{4}<2$。

(4) ○：$(b_1)^2+(b_2)^2+\cdots+(b_{10})^2$
$=\dfrac{1\times[1-(\frac{1}{2})^{10}]}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{1023}{512}<2$。

(5) ×：$a_n=a_1+(n-1)d=1+(n-1)\times(-\dfrac{1}{4})=-\dfrac{n}{4}+\dfrac{5}{4}\geq0$
$\Rightarrow n\leq5$，又$a_5=0$，所以$k=4$或5。

故選(2)(3)(4)。

10. (1) ○：y對x的迴歸直線必過點$(\mu_x,\mu_y)=(60,70)$，
又由題意知也過點$(20,40)$，
$\Rightarrow$斜率$=\dfrac{70-40}{60-20}=\dfrac{3}{4}=0.75$。

(2) ×：y對x的迴歸直線方程式為$y-\mu_y=r\cdot\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x)$，
所以$r\cdot\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}=0.75\Rightarrow(0.8)\times\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}=0.75$
$\Rightarrow\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}=\dfrac{75}{80}<1\Rightarrow\sigma_y<\sigma_x$（因為$\sigma_x\geq0$，$\sigma_y\geq0$）。

(3) ×：$(76,84)$與$(60,70)$所在直線的斜率，
$=\dfrac{84-70}{76-60}=\dfrac{14}{16}\neq\dfrac{3}{4}$，
所以$(76,84)$不在此迴歸直線上。

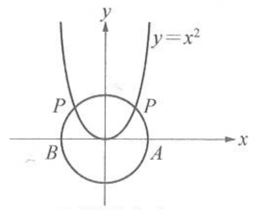
(4) ○：若$x'=ax+b$，$y'=cy+d$，$ac\neq0$，
則$r(x',y')=\dfrac{ac}{|ac|}\times r(x,y)$，
故$r(x',y')=-r(x,y)=-0.8$。

(5) ○：$m=r(x',y')\times\dfrac{\sigma_y'}{\sigma_x'}=(-0.8)\times\dfrac{2\sigma_y}{3\sigma_x}$
$=(-0.8)\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{75}{80}<0$。

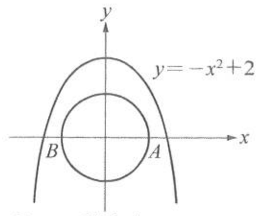
故選(1)(4)(5)。

11. 因為$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，
所以P點軌跡為以$\overline{AB}$為直徑的圓
故只要所求的函數圖形與此圓有交點，P點即存在。

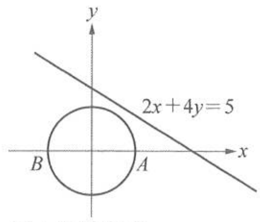
(1) ○：P點存在。



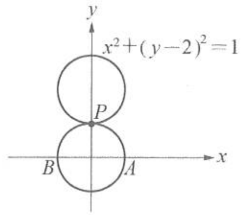
(2) ×：P點不存在。



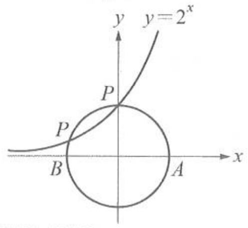
(3) ×：P點不存在。



(4) ○：P點存在。



(5) ○：P點存在。



故選(1)(4)(5)。

12. 令$\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$，

$\overrightarrow{a}*\overrightarrow{b}=(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2$
$=a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_2^2-a_1^2b_1^2$
$-2a_1b_1a_2b_2-a_2^2b_2^2$
$=(a_1b_2-a_2b_1)^2=\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}^2$……①

(1) ○：$\overrightarrow{a}*\overrightarrow{b}=\begin{vmatrix}99&100\\98&99\end{vmatrix}^2=1$。
（因為$\begin{vmatrix}99&100\\98&99\end{vmatrix}\times(-1)=\begin{vmatrix}1&1\\98&99\end{vmatrix}=1$。）

(2) ×：根據①可得，$\overrightarrow{a}*\overrightarrow{b}\geq0$。

(3) ○：若$\overrightarrow{a}\,//\,\overrightarrow{b}\Rightarrow\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}$
$\Rightarrow a_1b_2=a_2b_1\Rightarrow a_1b_2-a_2b_1=0$
$\Rightarrow\overrightarrow{a}*\overrightarrow{b}\geq0$。

(4) ×：$\overrightarrow{a}*\overrightarrow{b}$的幾何意義為$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$所張成平行四邊形面積的平方，又$|\overrightarrow{a}|=3$，$|\overrightarrow{b}|=4$，
所張成面積最大的平行四邊形即為矩形，
此時面積為$3\times4=12$，故$\overrightarrow{a}*\overrightarrow{b}$最大值為144。

(5) ×：$(2\overrightarrow{a})*(3\overrightarrow{b})=\begin{vmatrix}2a_1&2a_2\\3b_1&3b_2\end{vmatrix}^2=36\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}^2$
$=36(\overrightarrow{a}*\overrightarrow{b})$。

故選(1)(3)。

三、選填題

13. ① 根據題意，當$n=2$時$\Rightarrow a_2+\alpha=\dfrac{1}{2}(a_1+\alpha)$
$\Rightarrow\dfrac{7}{4}+\alpha=\dfrac{1}{2}(3+\alpha)\Rightarrow\alpha=-\dfrac{1}{2}$
$\Rightarrow a_n-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}(a_{n-1}-\dfrac{1}{2})$……(*)

② 把(∗)式依序 n 代入 3，4，可得下列各式，

$a_3-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(a_2-\frac{1}{2})\Rightarrow a_3-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times(\frac{7}{4}-\frac{1}{2})\Rightarrow a_3=\frac{9}{8}$，

$a_4-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(a_3-\frac{1}{2})\Rightarrow a_4-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times(\frac{9}{8}-\frac{1}{2})\Rightarrow a_4=\frac{13}{16}$，

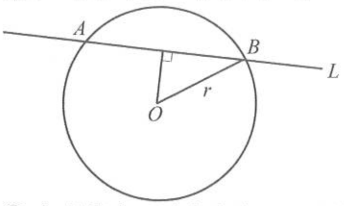
故 $a_4=\frac{13}{16}$。

14. $C: x^2+(y-a)^2=a^2+2\Rightarrow$ 圓心 $O(0,a)$，$r=\sqrt{a^2+2}$，

直線 $L: x-y+2a=0\Rightarrow d(O,L)=\frac{|0-a+2a|}{\sqrt{2}}=\frac{|a|}{\sqrt{2}}$，

所以由畢氏定理可得 $(\frac{|a|}{\sqrt{2}})^2+(\sqrt{3})^2=(\sqrt{a^2+2})^2\Rightarrow a^2=2$，

故 $r=\sqrt{a^2+2}=\sqrt{2+2}=2$。



15. ① 如果停水 3 天集中在 2～7 日有
(2，4，6)，(2，4，7)，(2，5，7)，(3，5，7)，共 4 種。
② 同理如果停水 3 天集中在 9～14 一樣有 4 種。
③ 如果停水 3 天，其中 2 天停在 2～7 日，另 1 天停在 9～14 日
(a) 2～7 日停水 2 天方法數有 $C_2^5=10$ 種。
(b) 9～14 日：1 天，有 6 種。
所以 $10\times6=60$(種)。
④ 同理如果停水 3 天，其中 1 天停 2～7 日，另 2 天停在 9～14 日，一樣有 60 種。
由①②③④可得停水方法數有 $4+4+60+60=128$(種)。

16. 設需再放入 x 顆其它顏色的球，可得下表

顏色組合	二球皆為藍色	二球皆為紅色	一球為藍色，一球為紅色	其它顏色組合
出現機率	$\frac{C_2^2}{C_2^{x+5}}$	$\frac{C_2^3}{C_2^{x+5}}$	$\frac{C_1^2\cdot C_1^3}{C_2^{x+5}}$	$\frac{C_2^x+C_1^5\cdot C_1^x}{C_2^{x+5}}$
可獲折價券金額	1800	1200	600	0

由上表可知期望值為：

$$\frac{C_2^2}{C_2^{x+5}}\cdot1800+\frac{C_2^3}{C_2^{x+5}}\cdot1200+\frac{C_1^2\cdot C_1^3}{C_2^{x+5}}\cdot600+0\cdot\frac{C_2^x+C_1^5\cdot C_1^x}{C_2^{x+5}}=200。$$

$\Rightarrow 1800+3600+3600=100(x+5)(x+4)$

$\Rightarrow x^2+9x-70=0\Rightarrow(x-5)(x+14)=0$

$\Rightarrow x=5$ 或 -14(不合)

所以 $x=5$，故需要再放入 5 顆不同顏色的球。

17. ＜法一＞

因為 $\overline{DE}:\overline{EF}=2:1$，所以 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AF}$

$\Rightarrow\overrightarrow{AF}=\frac{3}{2}(\overrightarrow{AE}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD})=\frac{3}{2}[(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC})-\frac{1}{3}(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB})]$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$。

所以 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}=(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}+(\frac{1}{2}-\frac{3}{4})\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=-\frac{1}{2}\times1+\frac{3}{4}\times1+(-\frac{1}{4})\times1\times1\times\cos60°$

$=-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$。

＜法二＞

建立坐標系，設 $B(0,0)$，$C(1,0)$

$\Rightarrow A(\cos60°,\sin60°)=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})\Rightarrow D(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4})$，$E(\frac{1}{2},0)$

又 $\overrightarrow{DF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DE}=\frac{3}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{4},0-\frac{\sqrt{3}}{4})=(\frac{3}{8},-\frac{3\sqrt{3}}{8})$

$\Rightarrow F(\frac{1}{4}+\frac{3}{8},\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{3\sqrt{3}}{8})=(\frac{5}{8},-\frac{\sqrt{3}}{8})$

$\Rightarrow\overrightarrow{AF}=(\frac{5}{8}-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\sqrt{3}}{2})=(\frac{1}{8},-\frac{5\sqrt{3}}{8})$，$\overrightarrow{BC}=(1,0)$，

所以 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{8}\times1+(-\frac{5\sqrt{3}}{8})\times0=\frac{1}{8}$。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. $\sin^2A+\sin^2C=\sin^2B+\sqrt{2}\sin A\cdot\sin C$

$\Rightarrow a^2+c^2=b^2+\sqrt{2}ac\Rightarrow a^2+c^2-b^2=\sqrt{2}ac$，

所以 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\sqrt{2}ac}{2ac}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow\angle B=\frac{\pi}{4}$。

故選(2)。

19. $\angle A+\angle B+\angle C=\pi\Rightarrow\angle A+\angle C=\frac{3\pi}{4}$(2 分)

$\Rightarrow\sqrt{2}\cos A+\cos C=\sqrt{2}\cos A+\cos(\frac{3\pi}{4}-A)$

$=\sqrt{2}\cos A+(\cos\frac{3\pi}{4}\cos A+\sin\frac{3\pi}{4}\sin A)$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos A+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin A$

$=\sin\frac{\pi}{4}\cos A+\cos\frac{\pi}{4}\sin A$

$=\sin(A+\frac{\pi}{4})$。(3 分)

故最大值為 1。(1 分)

20. 已知 $\sqrt{2}\cos A+\cos C$ 之最大值為 1，

此時 $\angle A+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，所以 $\angle A=\frac{\pi}{4}$，(2 分)

可得 $\angle C=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$。(2 分)