

全國公立高級中學

110 學年度學科能力測驗第三次聯合模擬考試

考試日期：110 年 11 月 3~4 日

數學 B 考科

— 作答注意事項 —

考試時間：100 分鐘

作答方式：

- 選擇(填)題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正液(帶)。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響成績並損及權益。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若答案格式是 $\frac{\textcircled{18-1}}{\textcircled{18-2}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生必須分別在答題卷上的第

18-1 列的 \square^3 與第 18-2 列的 \square^8 劃記，如：

18-1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
18-2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若答案格式是 $\frac{\textcircled{19-1}\textcircled{19-2}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答題卷的第 19-1 列的 \square

與第 19-2 列的 \square^7 劃記，如：

19-1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
19-2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

選擇(填)題計分方式：

- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\frac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※ 試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

第壹部分、選擇（填）題（占85分）

一、單選題（占30分）

說明：第1題至第6題，每題5分。

1. 試問下列何者正確？

- (1) 若 a, b 為非負實數且 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 為有理數，則 \sqrt{a} 和 \sqrt{b} 都是有理數
- (2) 若 a, b 及 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 皆為有理數，則 $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ 為有理數
- (3) 若 a, b 是不相等的無理數，則 $ab + a - b$ 為無理數
- (4) 若 a, b 是有理數， c, d 是無理數，已知 $a + c = b + d$ ，則 $a = b$ 且 $c = d$
- (5) 若 a 為有理數且 $0 < a < 1$ ，則 a 為有限小數

2. 設 x, y 為實數，若 $(x-2)^2 \leq 1$ ， $|y - \frac{7}{2}| \leq \frac{13}{2}$ ，且 $x^2 + y^2$ 的最大值為 M ，最小值為 m ，求

$M + m$ 的值為何？

- (1) 109
- (2) 110
- (3) 111
- (4) 113
- (5) 115

3. 已知 a 為實數，多項式 $f(x)$ 滿足 $\frac{f(x)}{(x-3)^2} = \frac{3}{(x-3)^2} + \frac{a}{x-3} + 2$ ，且在 $x=2$ 時， $f(x)$ 有最

小值 1，試求 $f(x)$ 除以 $x-1$ 之餘式為何？

- (1) -2
- (2) -3
- (3) 2
- (4) 3
- (5) 4

4. 有一個富翁想要從他的所有孩子中選出繼承家業的人，並對所有孩子說，發給每人 1 萬元作為創業基金去闖事業，告訴他們每個月結算時的資產必須比上個月資產的兩倍再多 1 萬元，也就是說，從現在算起，一個月後的資產至少要 3 萬元，二個月後至少要 7 萬元，……以此類推，如果能夠持續一年就有機會競選繼承人。請問從富翁發給孩子創業基金那日開始算，一年後至少要累積多少萬元才有資格競選繼承人？

- (1) 4095 (2) 4096
(3) 8191 (4) 8192
(5) 16381

5. 在坐標平面上有三點 $O(0,0)$, $A(4,3)$, $B(24,7)$ ，在平面上取一個 x 和 y 坐標均為正整數的 P 點，使得 $\angle POA = \angle POB$ ，則 P 點的坐標可能為何？

- (1) (2, 1) (2) (1, 2)
(3) (2, 4) (4) (9, 13)
(5) (13, 9)

6. 潮汐是指海水受日月引力發生漲落的現象。在正常的情況下，船在漲潮時駛進航道，靠近船塢，卸貨後落潮時返回海洋。已知某港口所在的地區每天發生兩次潮汐現象，下表(1)是此港口在某一天的時間（時）與水深（米）的關係表：

表(1)

時間 (x)	水深 (y 米)	時間 (x)	水深 (y 米)	時間 (x)	水深 (y 米)
0	10.0	9	7.0	18	10.0
3	13.0	12	10.0	21	7.0
6	10.0	15	13.0	24	10.0

則這個港口的水深與時間的函數關係，可用下列哪一個函數描述？

- (1) $y = -\frac{1}{3}(x-3)^2 + 13$ (2) $y = 10 \log(x+10)$
(3) $y = 10 \sin(x + \frac{\pi}{6})$ (4) $y = 3 \sin(\frac{\pi}{6}x) + 10$
(5) $y = 3 \sin(\frac{\pi}{3}x) + 10$

二、多選題 (占 25 分)

說明：第 7 題至第 11 題，每題 5 分。

7. 已知三次函數 $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 9x - 12$ ，試問下列敘述哪些是正確的？
- (1) $y = f(x)$ 的圖形對稱中心為 $(1, -7)$
 - (2) $y = f(x)$ 的圖形和 x 軸交於相異三點
 - (3) $y = f(x)$ 的圖形由左往右上升
 - (4) 若點 (a, b) 在 $y = f(x)$ 的圖形上，則點 $(2-a, -14-b)$ 也在 $y = f(x)$ 的圖形上
 - (5) $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 附近的圖形近似於直線 $y = 3x - 10$
8. 設 $C: x^2 + y^2 - 4x + ky + 5 = 0$ 之圖形為一圓，且點 $(k, k-3)$ 在圓 C 之外部，則實數 k 可為何值？
- (1) -3
 - (2) -1
 - (3) $\frac{13}{6}$
 - (4) $\frac{5}{2}$
 - (5) 3
9. 若 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，則下列敘述哪些是正確的？
- (1) $y = \log_a x$ 與 $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ 兩圖形對稱於 y 軸
 - (2) $y = a^x$ 與 $y = (\frac{1}{a})^x$ 兩圖形對稱於 x 軸
 - (3) $y = a^x$ 與 $y = \log_a x$ 兩圖形對稱於直線 $y = x$
 - (4) $y = \log_a x$ 與 $y = \log_a (8x)$ 圖形相交於一點
 - (5) 若 $y = a^x$ 的圖形和直線 $y = 7x$ 交於相異兩點，則 $y = \log_a x$ 的圖形和直線 $y = \frac{1}{7}x$ 也交於相異兩點

10. 調查全班 n 位同學的身高 X (公分) 與數學成績 Y (分)，將其繪製成散布圖，並算出相關係數 r 與迴歸直線斜率 m 均為正數。若把身高的數據改為 X' (公尺)，並將 X' 與 Y 也繪製成散布圖，且算出相關係數 r' 與迴歸直線斜率 m' 。試問下列哪些選項敘述是正確的？
- (1) $r = r'$
 - (2) $m < m'$
 - (3) 對此資料可解讀為這個班的學生中，身高越高者，數學成績必然越高
 - (4) 若所有點都在直線 $x - 2y + 20 = 0$ 上，則相關係數為 $\frac{1}{2}$
 - (5) X 與 Y 的相關程度愈大，表示迴歸直線的斜率愈大
11. 設 \vec{a}, \vec{b} 為平面上兩個不平行的非零向量，若 $\vec{c} = \vec{a} - t\vec{b}$ ， $t \in R$ ，則下列敘述哪些是正確的？
- (1) \vec{c} 可能垂直 \vec{a}
 - (2) \vec{c} 可能平行 \vec{a}
 - (3) \vec{c} 可能垂直 \vec{b}
 - (4) \vec{c} 可能平行 \vec{b}
 - (5) 當 $|\vec{c}|$ 有最小值時， $t\vec{b}$ 恰為 \vec{a} 在 \vec{b} 上之正射影

三、選填題 (占 30 分)

說明：第 12 題至第 17 題，每題 5 分。

12. 設 $\{a_n\}$ 與 $\{b_n\}$ 都是等差數列，且 $a_1 = 1$ ， $a_2 = 2$ ， $b_3 = \frac{1}{2}$ 。已知對所有的正整數 n ， $\frac{a_n}{b_n}$ 皆

為常數 p 。求 $\{b_n^2\}$ 首 5 項的和為 $\frac{\textcircled{12-1} \textcircled{12-2}}{\textcircled{12-3} \textcircled{12-4}}$ 。

13. 2019 新型冠狀病毒 (COVID-19) 目前已知主要的傳染方式為近距離飛沫、接觸 (直接或間接) 傳染。醫用口罩的主要功用是阻擋使用者的飛沫傳給他人, 亦能以外層 PP 防潑水材質, 阻隔他人的飛沫傳到使用者的口和鼻。已知一奈米為 10^{-9} 米, 若某種變異的 2019 新型冠狀病毒 (COVID-19) 的直徑為 x 米, 且 $\log x = -7.1549$, 試求此病毒的直徑約為 $\frac{\textcircled{13-1} \textcircled{13-2}}{\textcircled{13-1} \textcircled{13-2}}$ 奈米。

14. 新冠病毒肆虐全球, T 國採購 A 、 B 兩個品牌的疫苗, 並將全國人民按照年齡與職業分成若干類別, 全部類別數的 $\frac{5}{6}$ 施打 A 牌疫苗; 有 11 個類別施打 B 牌疫苗, 全部類別數的 $\frac{1}{2}$ 兩個品牌疫苗都有施打, 而且只有『18 歲以下』這一類別兩種疫苗都沒施打。推知 T 國將民眾分為 $\frac{\textcircled{14-1} \textcircled{14-2}}{\textcircled{14-1} \textcircled{14-2}}$ 種類別。

15. 停車場內共有 12 個空的停車位排成一列, 今有 9 輛車抵達, 並隨機挑選一個位置停車。不久後又有一台需要兩個停車位大小的休旅車進入停車場, 試問此休旅車能夠完全停入停車格的機率 = $\frac{\textcircled{15-1}}{\textcircled{15-2} \textcircled{15-3}}$ 。(化成最簡分數)

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知兩個邊長 $\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = 3$, 若 $\angle A$ 有最大值為 θ , 則 $\sin \theta = \frac{\textcircled{16-1}}{\textcircled{16-2}}$ 。(化成最簡分數)

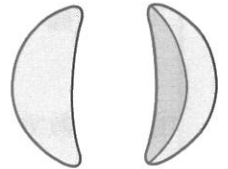
17. 已知 $\vec{a} = (3, -1)$ 在 \vec{b} 上的正射影為 $(2, 1)$, 若將 $2\vec{a}$ 分解為 \vec{u} 和 \vec{v} 兩個向量的和, 其中 \vec{u} 與 \vec{b} 平行且 \vec{v} 與 \vec{b} 垂直, 則 $\vec{v} = (\textcircled{17-1}, \textcircled{17-2} \textcircled{17-3})$ 。

第貳部分、混合題或非選擇題(占 15 分)

說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

第 18 至 20 題為題組

每年過年期間阿嬤都會親自到紫南宮向土地公、土地婆焚香祈福求發財金，期望一整年能夠好運發財。如圖(1)，求發財金的方式是透過「擲筊」：拿兩個相同且有正反兩面的筊杯往地上丟擲，出現一個正面一個反面的情形稱為『聖筊』。若第一次擲筊就獲得『聖筊』者，可求金 600 元；若第一次未獲『聖筊』，可再次向土地公、土地婆行禮許願後擲筊，如在第二次獲『聖筊』者，可求金 500 元。如此規則，若一開始連續沒有擲得『聖筊』，但依次在第三次、第四次、第五次、第六次才初獲『聖筊』者，可求金 400 元、300 元、200 元、100 元。倘若連續六次皆未獲『聖筊』者，則請下次再來祈福許願求金。假設每個筊杯出現正反面的機率一樣，試回答下列的問題。



圖(1)

18. 阿嬤今年求到 300 元的機率是 $\frac{\textcircled{18-1}}{\textcircled{18-2} \textcircled{18-3}}$ 。(選填題，3 分)

19. 假設求到發財金 $100 \times k$ 元的機率為 P_k ，其中 $k=1, 2, 3, 4, 5, 6$ ，試選出正確的選項。

(單選題，3 分)

(1) $P_1 + P_3 + P_5 = P_2 + P_4 + P_6$

(2) $P_1 + P_2 = 2 P_3$

(3) $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 1$

(4) $\{ P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 \}$ 是等比數列

(5) 阿嬤求到發財金的期望值為 $\frac{100 + 200 + 300 + 400 + 500 + 600}{6}$ 元

20. 阿嬤求發財金時擲筊次數的期望值為幾次？(非選擇題，9 分)

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項的和為 $S = \frac{n[2a + (n-1)d]}{2}$ 。

首項為 $a(a \neq 0)$ ，公比為 $r(r \neq 1)$ 的等比數列前 n 項的和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ 。

2. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑)。

$\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ 。

3. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，

算術平均數 $\mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ 。

標準差 $\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1 - \mu_X)^2 + (x_2 - \mu_X)^2 + \dots + (x_n - \mu_X)^2]} = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - n\mu_X^2]}$ 。

4. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，

相關係數 $r_{X,Y} = \frac{(x_1 - \mu_X)(y_1 - \mu_Y) + (x_2 - \mu_X)(y_2 - \mu_Y) + \dots + (x_n - \mu_X)(y_n - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$ 。

迴歸直線 (最適合直線) 方程式 $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$ 。

5. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$ 。

6. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ， $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ ， $\log_{10} 7 \approx 0.8451$ 。

$10^{0.3010} \approx 2$ ， $10^{0.4771} \approx 3$ ， $10^{0.6990} \approx 5$ ， $10^{0.8451} \approx 7$ 。